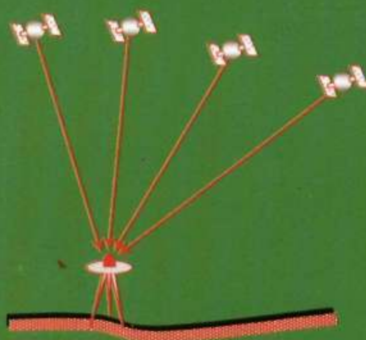
Andrzej Jagielski

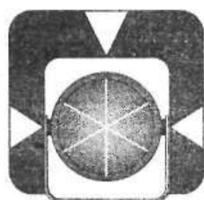
Geodezja II





Kraków 2003

Andrzej Jagielski



Geodezja II

Wydawnictwo
P.W. „Stabill"

Kraków 2003

Opiniodawcy:
prof. dr hab. inż. Józef Beluch
dr hab. inż. Jacek Szewczyk – prof. n. A.G.H. Kraków

Wydanie I

Kraków 2003

Podręcznik jest przeznaczony jako lektura pomocnicza dla studentów II roku wydziałów geodezyjnych i uczniów klas III – IV technikum geodezyjnego.

Projekt okładki, skład komputerowy, redakcja i rysunki: *Andrzej Jagielski*

Druk, oprawa: P. W. STABIL
Wydawnictwo: P. W. STABIL
tel/fax (012) 410-28-20, 410-28-21
P.W. „stabil"

ISBN 83-918598–2–7

SPIS TREŚCI:



*Pamięci profesora **Czesława Kameli** – wybitnego geodety, uczonego i nauczyciela akademickiego oraz człowieka o niezwykłej szlachetności podręcznik ten poświęcam:*

Autor

Przedmowa

Od dłuższego czasu na polskim rynku wydawniczym odczuwalny jest brak podręczników geodezji, przeznaczonych dla II roku studiów wydziałów geodezyjnych wyższych uczelni technicznych, obejmujących swą treścią materiał nauczania geodezji ogólnej zgodny z programem specjalności geodezja i kartografia. Skrypty i podręczniki z tego zakresu wydawane w latach 1980-1990 już dawno zniknęły z półek księgarń, a ze względu na szybki postęp techniczny w dziedzinie technik informatycznych i konstrukcji przyrządów geodezyjnych częściowo także utraciły aktualność. Szczególnie duże trudności w nauczaniu geodezji występują jednak w średnim szkolnictwie zawodowym, ponieważ dla technikum geodezyjnego już od prawie dwudziestu lat nie są wydawane żadne podręczniki z zakresu przedmiotów kierunkowych.

Stało się to dla mnie bodźcem do choćby częściowego wypełnienia wspomnianej luki wydawniczej i po edycji książki *Geodezja I*, która spotkała się z przychylnym przyjęciem P. T. Czytelników, podjąłem się napisania podręcznika *Geodezja II*, który objąłby następną partię materiału nauczania i jednocześnie jako lektura pomocnicza był przydatny zarówno dla studentów drugiego roku kierunku geodezji i kartografii wyższych uczelni, jak i uczniów starszych klas technikum geodezyjnego oraz słuchaczy II roku policealnego studium zawodowego.

W doborze tematyki zawartej w niniejszym podręczniku starałem się uwzględnić istotne zagadnienia z zakresu klasycznej geodezji oraz informacje związane z nowymi technologiami wykonywania i opracowania pomiarów geodezyjnych, a także podstawowe wiadomości związane z wprowadzaną ostatnio w Polsce zmianą geodezyjnego systemu odniesień przestrzennych, co z kolei wiąże się z sukcesywnym opracowywaniem przez zespoły autorów podległe Głównemu Geodecie Kraju nowych przepisów technicznych, które stopniowo zastępują zdezaktualizowane stare instrukcje i wytyczne. Proces ten właśnie się rozpoczął, toteż w ramach podręcznika starałem się w możliwym dla mnie zakresie ująć dostępne mi informacje związane z wymogami nowych standardów technicznych oraz ich projektów, które niebawem wejdą w życie.

Podręcznik *Geodezja II* składa się z szesnastu rozdziałów, z których część obejmuje podstawowe wiadomości z takich zagadnień geodezji ogólnej jak: czynniki decydujące o jednolitości prac geodezyjnych na terenie Polski, kwestie związane ze szczegółowymi i pomiarowymi osnowami geodezyjnymi, począwszy od aktualnie stosowanych technologii ich zakładania, poprzez projektowanie, stabilizację punktów, pomiar i obliczenie.

Głównie z myślą o nauczaniu w technikum geodezyjnym, gdzie rachunek wyrównawczy nie stanowi odrębnego przedmiotu, lecz połączony jest z geodezją, w podręczniku znalazły się dwa rozdziały dotyczące podstawowych zasad metodyki obliczeń geodezyjnych i wyrównania obserwacji.

Trzecią grupę zagadnień ujętych w tej książce stanowią wiadomości dotyczące niwelacji trygonometrycznej i tachimetrii. Ostatnia część podręcznika została poświęcona mapom oraz podejmowanym dla ich aktualizacji pomiarom uzupełniającym.

Trzecią grupę zagadnień ujętych w tej książce stanowią wiadomości dotyczące niwelacji trygonometrycznej i tachimetrii. Ostatnia część podręcznika została poświęcona mapom oraz podejmowanym dla ich aktualizacji pomiarom uzupełniającym.

Autorem podrozdziału 2.7. pt. *Zastosowanie sieci modularnych do zakładania osnów pomiarowych* jest dr inż. Tadeusz Gargula, mój Kolega z Katedry Geodezji A.R. w Krakowie, zaś podrozdziału 15.10, dotyczącego programu komputerowego *„Mapa Kontekstowa - MK2000"*, przeznaczonego do sporządzenia mapy numerycznej, jest jego twórca i zarazem także pracownik naszej Katedry – mgr inż. Mariusz Zygmunt. Obydwu Kolegom za istotne wzbogacenie treści niniejszej książki składam tą drogą wyrazy mojej wdzięczności.

Pragnę również w tym miejscu złożyć najserdeczniejsze podziękowania Panom Profesorom z Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie: p. prof. Józefowi Beluchowi oraz p. prof. Jackowi Szewczykowi za życzliwą ocenę, cenne korekty i wskazówki dotyczące udoskonalenia wiadomości zawartych w tego podręcznika.

Szanownych Czytelników zapraszam również do odwiedzania mojej strony internetowej: http://www.ar.krakow.pl/~ajagielski/ , gdzie będę się starał umieszczać przydatne informacje i pliki do pobrania dla osób studiujących geodezję.

Andrzej Jagielski

ROZDZIAŁ 1:
Podstawy jednolitości prac geodezyjnych na terenie Polski

1.1. Założenia ogólne

Unifikacja prac geodezyjno-kartograficznych wykonywanych na obszarze całego kraju wynika z konieczności zachowania wymogów technicznych, jak również z zasady ciągłości i porównywalności wyników pomiarów oraz sporządzanej w rezultacie prac geodezyjnych przez różnych wykonawców dokumentacji gromadzonej w państwowym zasobie geodezyjnym i kartograficznym. Zgodnie z ustawą „Prawo geodezyjne i kartograficzne" z dnia 17 maja 1989 r. (Dz. U. nr 30 z dnia 26 maja 1989 r. poz. 163) „zasób ten służy gospodarce narodowej, obronności państwa, nauce, kulturze i potrzebom obywateli".

Na jednolitość prac geodezyjnych i kartograficznych w Polsce składają się następujące czynniki:

- jednakowy system miar, zgodny z międzynarodowym układem SI,
- system odniesień przestrzennych wzajemnie przeliczalny z innymi systemami, określony za pośrednictwem elipsoidy o znanych parametrach jako powierzchni odniesienia pomiarów geodezyjnych, z którą związany jest układ współrzędnych geograficznych lub geocentrycznych,
- stały poziom odniesienia wysokości oparty na ustalonym systemie wysokości i umownym punkcie mareograficznym o wysokości zero,
- obowiązujące odwzorowanie kartograficzne i wynikający z niego układ współrzędnych prostokątnych płaskich, konieczny do określenia położenia sytuacyjnego punktów osnowy poziomej oraz dostosowany do tworzenia map w wybranych skalach,
- jednolita na terenie całego kraju podstawowa i szczegółowa, trwała osnowa pozioma i wysokościowa,
- jednakowe zasady prowadzenia prac geodezyjnych obowiązujące wszystkich wykonawców, ujednolicone za pomocą przepisów prawnych, standardów technicznych zawartych w instrukcjach, wytycznych technicznych i normach, określających zasady, wymogi dokładnościowe oraz rodzaje, skład i cechy rezultatów, stanowiących produkt końcowy wykonanych prac.

W Polsce zalegalizowane są *jednostki międzynarodowego systemu SI*, przy czym w geodezji stosowane są głównie jednostki odległości i kąta: metr i radian oraz niektóre dopuszczone do stosowania jednostki miar spoza tego systemu, do których zalicza się stopień i grad jako miary kąta płaskiego. Dla zapewnienia poprawności pomiaru wszystkie geodezyjne przymiary, dalmierze i łaty muszą mieć ważne świadectwa komparacji, zaś teodolity, niwelatory, tachimetry – atesty oraz dokumentację z okresowego sprawdzania i rektyfikacji.

Pozostałe czynniki decydujące o zapewnieniu jednolitości przebiegu prac geodezyjnych i sporządzanej w ich wyniku dokumentacji zostaną omówione w dalszym ciągu tego rozdziału.

1.2. Powierzchnie odniesienia i globalne układy współrzędnych

1.2.1. Powierzchnie odniesienia

Na jednolity dla całego kraju państwowy system odniesień przestrzennych składają się następujące elementy:

a) geodezyjny układ odniesienia określający geometryczne i geofizyczne parametry Ziemi, stosowany przy wyznaczaniu współrzędnych B, L;
b) układ i system wysokości, w którym wyznacza się wysokości punktów względem przyjętego poziomu odniesienia;
c) układy współrzędnych prostokątnych płaskich.

Wykonanie mapy w postaci płaskiego rysunku, przedstawiającego obiekty na zakrzywionej i nieregularnej powierzchni Ziemi, wymaga przyjęcia dającej się zdefiniować matematycznie *powierzchni odniesienia* o wymiarach i kształcie, która możliwie najwierniej oddaje rzeczywisty kształt Ziemi. Następnie za pomocą promieni prostopadłych do powierzchni odniesienia należy zrzutować na tę powierzchnię wybrane punkty ziemskie. Sposoby ustalające rodzaj tych punktów oraz metodykę ich lokalizowania na powierzchni odniesienia stanowią istotę sytuacyjnych i wysokościowych pomiarów geodezyjnych.

Kształt Ziemi najdokładniej wyraża *geoida* – powierzchnia powstała w wyniku przedłużenia pod lądami i nad depresjami przeciętnej, spokojnej powierzchni mórz i oceanów. Nierównomierny rozkład mas wewnątrz Ziemi, zmienne zasolenie wód, wpływy grawitacji Słońca i Księżyca powodują, że geoida jest powierzchnią nieregularną, zwłaszcza w obrębie lądów, wyznaczalną wprawdzie fizycznie, lecz nie dającą się opisać matematycznie. Jej położenie dla mórz określane jest poprzez wieloletnie obserwacje poziomu wód za pomocą przyrządów zwanych *mareografami*, natomiast pod lądami usytuowanie geoidy jest wyznaczane za pomocą pomiarów grawimetrycznych. Geoida stanowi specyficzny przypadek powierzchni o stałym potencjale ziemskiego pola grawitacyjnego, czyli *powierzchni ekwipotencjalnej** (geopotencjalnej). Powierzchnia ta charakteryzuje się tym, że jej dowolny najmniejszy element jest zawsze prostopadły do działającej na niego siły ciężkości. Geoida jest więc często definiowana jako powierzchnia ekwipotencjalna, która najlepiej (w rozumieniu metody najmniejszych kwadratów) wpasowana jest do średniej powierzchni mórz i oceanów. Jako powierzchnię odniesienia w ramach dokładnych pomiarów wysokościowych przyjmuje się tzw. *geoidę zerową*, czyli powierzchnię ekwipotencjalną przechodzącą przez średni poziom morza wybranej stacji mareograficznej.

Wskutek niemożności matematycznego opisania nieregularnej powierzchni geoidy zachodzi potrzeba zastąpienia jej powierzchnią regularną, przebiegającą możliwie jak najbliżej geoidy. Warunki te najlepiej spełniają: elipsoida trójosiowa i elipsoida obrotowa (dwuosiowa). *Elipsoida trójosiowa*, czyli bryła dająca trzy różne elipsy w trzech wzajemnie do siebie prostopadłych przekrojach, której południki są elipsami o jednej osi stałej, zaś drugiej zmiennej, mimo najlepszego przybliżania kształtu Ziemi ma powierzchnię zbyt skomplikowaną matematycznie, toteż nie nadaje się na powierzchnię odniesienia ze względu na duże trudności obliczeniowe. Postulowano wprawdzie wprowadzenie trójosiowej elipsoidy ziemskiej w formie elipsoidy nieobrotowej, o dodatkowym spłaszczeniu równikowym około stukrotnie mniejszym od biegunowego i leżącym wzdłuż prostej łączącej punkty na równiku o długościach geograficznych 15°W i 165°E, jednak trudności

* Potencjał W siły F w danym punkcie jest równy pracy, którą musi wykonać siła - F, w celu przesunięcia masy jednostkowej z danego punktu do nieskończoności.

obliczeniowe powodowały że jako praktyczną powierzchnię odniesienia przyjmuje się nadal znacznie prostszą elipsoidę dwuosiową, czyli elipsoidę obrotową. Elipsoida umożliwia ustalenie matematycznych zależności wiążących elementy geometryczne utworzone przez punkty zrzutowane na powierzchnię elipsoidy, dla których oblicza się współrzędne. Po odwzorowaniu powierzchni elipsoidy na płaszczyznę można na tej podstawie sporządzać mapy.

Elipsoida obrotowa spłaszczona powstaje poprzez obrót elipsy wokół osi małej. Przekrój elipsoidy reprezentującej bryłę ziemską, dla której południki są elipsami, zaś równoleżniki – kołami, dokonany za pomocą płaszczyzny przechodzącej przez oś obrotu Ziemi (rys. 1.3) tworzy tzw. *elipsę południkową* o półosi dużej – a, stanowiącej promień równikowy Ziemi i półosi małej – b, określanej jako promień biegunowy. Elipsoidę określa dwójka parametrów: a, p lub a, b, przy czym długości a, b są wielkościami liniowymi, zaś spłaszczenie p jest parametrem kształtu oznaczanym w literaturze geograficznej i geodezyjnej także symbolami s, f lub α.

W geodezji elipsoida obrotowa, na którą rzutuje się punkty położone na powierzchni Ziemi nosi nazwę *elipsoidy odniesienia*. Jej kształt i wymiary są określone za pomocą *parametrów geometrycznych* (długości obu półosi a, b lub jednej półosi i spłaszczenia a, p). Dodatkowo elipsoidę odniesienia określają *parametry geofizyczne*, na które składają się: stała grawitacyjna, prędkość kątowa obrotu Ziemi i współczynnik dynamiczny kształtu Ziemi. Parametry geometryczne stanowią podstawę do ustalenia geodezyjnego systemu odniesienia, niezbędnego do wyznaczenia współrzędnych geograficznych geodezyjnych B, L (rys. 1.3).

Autor koncepcji geoidy, niemiecki uczony Listing wprowadził w r. 1873 pojęcie tzw. *elipsoidy ziemskiej*, tj. elipsoidy obrotowej, spłaszczonej, której rozmiary są maksymalnie zbliżone do kształtu Ziemi. Ich ustalenie jest uzależnione od aktualnego stopnia zbadania kształtu geoidy.

Postulaty dotyczące elipsoidy ziemskiej są następujące:

- elipsoida powinna być geocentryczna, tzn. jej środek geometryczny powinien pokrywać się ze środkiem ciężkości geoidy,
- płaszczyzny równików obu brył powinny się pokrywać lub przynajmniej zachować równoległość,
- suma odstępów pomiędzy powierzchniami: elipsoidy i geoidy powinna być równa zero,
- suma kwadratów tych odstępów powinna się równać minimum.

Spełnienie dla całego globu ziemskiego wszystkich powyższych postulatów w ramach wcześniej stosowanych elipsoid nie było możliwe, lecz dotyczyło pewnego fragmentu powierzchni Ziemi. Pierwszą powszechnie wykorzystywaną elipsoidą ziemską była elipsoida obliczona w 1841 przez F. W. Bessela. W 1924 przyjęto jako obowiązującą elipsoidę ziemską bardziej odpowiadającą rzeczywistym wymiarom Ziemi elipsoidę, obliczoną w r. 1909 przez J.F. Hayforda. W PRL, podobnie jak w innych państwach byłego Układu Warszawskiego, jako powierzchnia odniesienia obowiązywała od roku 1952 przyjęta w b. ZSSR w roku 1942 elipsoida Krasowskiego styczna do powierzchni geoidy w punkcie Pułkowo z lokalną orientacją azymutalną na punkt Bugry. Elipsoida Krasowskiego zastąpiła w Polsce dawną elipsoidę Bessela z punktem przyłożenia elipsoidy do geo-

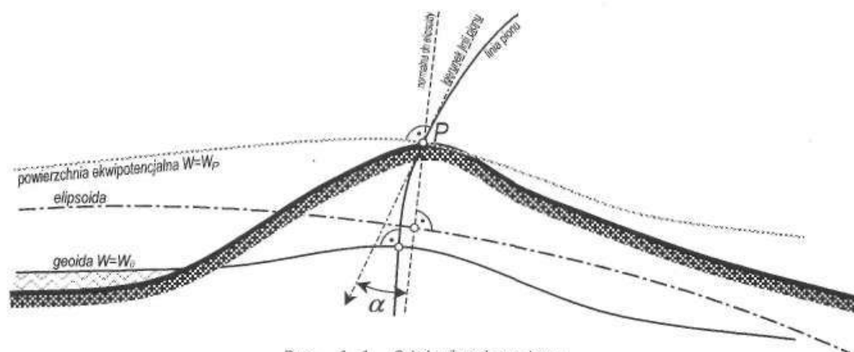
idy w Borowej Górze. Dopiero w wyniku pomiarów satelitarnych określono parametry elipsoidy ziemskiej (GRS 80)* aproksymującej geoidę na całym obszarze Ziemi.

Siła ciężkości, będąca wypadkową siły przyciągania (grawitacji) mas Ziemi i siły odśrodkowej, stanowi podstawę do orientacji w przestrzeni instrumentów geodezyjnych. Kierunek pionu, czyli kierunek siły ciężkości umożliwia zorientowanie przestrzeni za pomocą prostych przyrządów tj. libel i pionów.

Linia pionu miejsca obserwacji jest krzywą przechodzącą przez dany punkt P i prostopadłą do dowolnej powierzchni ekwipotencjalnej, a więc także do tej powierzchni, na której położony jest punkt P (rys. 1.1). Zakrzywienie linii pionu wynika z nierównoległości powierzchni ekwipotencjalnych, których odległości stopniowo zmniejszają się w kierunku od równika do biegunów. Linia pionu jest w każdym swoim punkcie styczna do wektora: $\mathbf{g} = \text{grad}\ W$.

Kierunek linii pionu jest to prosta przechodząca przez dany punkt P, styczna do linii pionu w tym punkcie. Kierunek ten stanowi podstawę horyzontalnego układu obserwacyjnego, który jest realizowany za pośrednictwem spoziomowanych osi lub płaszczyzn instrumentów geodezyjnych ustawionych na stanowisku pomiarowym.

Normalna do elipsoidy w zadanym punkcie P przeważnie nie pokrywa się z kierunkiem linii pionu, tworząc z nim kąt α zwany *odchyleniem pionu* (rys. 1.1).



Rys. 1.1. Odchylenie pionu

Elementy kątowe i liniowe pomierzone na fizycznej powierzchni Ziemi muszą podlegać redukcji na elipsoidę odniesienia. Poprawki redukcyjne tych elementów wynikają z odchylenia pionu oraz odstępu elipsoidy od geoidy.

1.2.2. Globalne układy współrzędnych

Układ współrzędnych jest to zespół obiektów geometrycznych, względem których określa się jednoznacznie położenie punktu (lub zbioru punktów). Jednowymiarowy układ współrzędnych to oś liczbowa lub zorientowana krzywa podzielona na odcinki o pewnej długości, pozwalające ustalić odległość danego punktu od początku układu, czyli punktu zerowego. Przy dwuwymiarowym układzie współrzędnych, który występuje na płaszczyźnie, określenie położenia punktu wymaga podania dwóch liczb, zaś w układzie trójwymiarowym (w przestrzeni trójwymiarowej) – trzech liczb. Na płaszczyźnie i w przestrzeni najczęściej stosuje się różne typy układów współrzędnych kartezjańskich, ponadto także na

* $p = 298.257^{-1} \pm 5 \cdot 10^{-6}$; $a = 6378137\ \text{m} \pm 3\ \text{m}$.

płaszczyźnie biegunowy układ współrzędnych. Na powierzchniach odniesienia używane są układy współrzędnych krzywoliniowych (sferycznych lub elipsoidalnych), do których zaliczamy współrzędne geograficzne.

Wielkościami określającymi położenie punktów na powierzchni odniesienia są ich współrzędne w przyjętych układach. Znane są różne metody tworzenia układów współrzędnych, zaś wybór sposobu realizacji układu zależy od jego przeznaczenia. Każdy układ współrzędnych musi posiadać dokładnie sprecyzowaną charakterystykę geometryczną, niezbędną do określenia położenia punktu na ustalonej powierzchni tj. położenie początku układu, zdefiniowane kierunki osi współrzędnych, a dla układów krzywoliniowych sposób realizacji współrzędnych kątowych.

Wielkościami umożliwiającymi powiązanie układów obserwacyjnych, realizowanych za pomocą osi i płaszczyzn instrumentów pomiarowych, z układem globalnym są tzw. *współrzędne naturalne*. Podstawową osią układu naturalnego jest chwilowa oś obrotu Ziemi przechodząca przez środek masy Ziemi. Płaszczyzna prostopadła do osi w tym punkcie stanowi płaszczyznę *równika astronomicznego*. Płaszczyzna *południka astronomicznego* jest płaszczyzną przechodzącą przez kierunek linii pionu miejsca obserwacji, równoległą do chwilowej osi obrotu Ziemi. Ze względu na przestrzenną krzywiznę linii pionu płaszczyzna południka nie zawiera osi obrotu Ziemi. Wspomniane płaszczyzny oraz kierunek linii pionu umożliwiają zdefiniowanie naturalnego układu współrzędnych, jakim jest układ współrzędnych geograficznych-astronomicznych (rys. 1.2), w którym współrzędnymi są: szerokość geograficzna φ i długość geograficzna λ.

Szerokość geograficzna - astronomiczna φ jest to kąt zawarty pomiędzy kierunkiem linii pionu w danym punkcie P (miejscu obserwacji) a płaszczyzną równika astronomicznego. Współrzędna ta zmienia się w przedziale od 0° do +90° na północ (N) od równika oraz od 0° do -90° na południe (S) od równika.

Długość geograficzna - astronomiczna λ jest to kąt dwuścienny zawarty pomiędzy płaszczyznami południków astronomicznych: Greenwich i danego punktu P. Długość geograficzna zmienia się w przedziale od 0° do +180° w kierunku na wschód (E) od południka 0° i w przedziale od 0° do -180° na zachód (W) od tego południka.

Współrzędne φ, λ wyznaczane na podstawie pomiarów wykonywanych metodami astronomii geodezyjnej. Kąty: φ, λ oraz wartość potencjału ciężkości W stanowią trzy współrzędne naturalne punktu P, które w danym momencie określają jego położenie w przestrzeni. Są one wartościami chwilowymi, ponieważ bieguny Ziemi, a więc także jej oś obrotu nie zajmują stałego położenia. Przyczynami ruchu biegunów są znane z astronomii zjawiska precesji i nutacji spowodowane oddziaływaniem Księżyca i Słońca oraz przemieszczanie mas wewnątrz i na powierzchni Ziemi. Z tego powodu dokładniejsze pomiary geodezyjne odnosi się do umownego układu związanego z Ziemią.

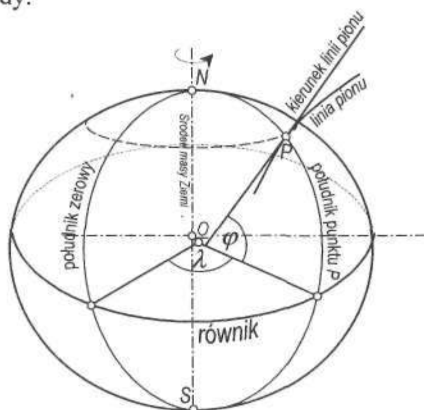
Jest nim geocentryczny *Umowny Układ Ziemski* (CTS - *Conventional Terrestial System*) z początkiem w środku mas Ziemi. Oś z pokrywa się ze średnią osią obrotu Ziemi i jest prostopadła do płaszczyzny średniego równika. Oś x układu powstaje jako krawędź przecięcia płaszczyzn średniego równika i średniego południka zerowego. Układ CTS jest określony przez zbiór współrzędnych prostokątnych stacji fundamentalnych tworzących światową sieć ustanowioną w tym celu.

Powszechnie stosowanym układem do określania położenia punktów na elipsoidzie jest *układ współrzędnych geograficznych-geodezyjnych* B, L. Układ kartezjański

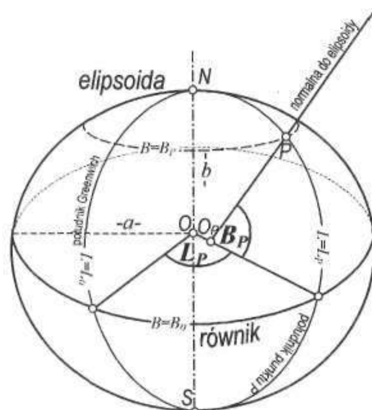
X,Y,Z może być wpisany w każdy z układów krzywoliniowych tj. zarówno w astronomiczny jak i geodezyjny.

Szerokość geograficzna geodezyjna (elipsoidalna) ***B*** jest to kąt zawarty pomiędzy normalną do elipsoidy w danym punkcie *P* (miejscu obserwacji) a płaszczyzną równika geodezyjnego. Równik ten jest kołem utworzonym w wyniku przecięcia elipsoidy płaszczyzną przechodzącą przez jej środek i prostopadłą do osi obrotu elipsoidy.

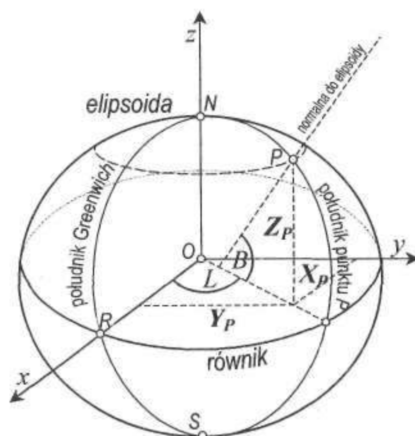
Długość geograficzna geodezyjna (elipsoidalna) ***L*** jest to kąt dwuścienny zawarty pomiędzy płaszczyzną geodezyjnego południka zerowego a płaszczyzną geodezyjnego południka przechodzącego przez dany punkt *P*. Oś obrotu elipsoidy i normalna do elipsoidy w danym punkcie wyznaczają płaszczyzny południków. Południki geodezyjne są elipsami powstałymi w wyniku przecięcia elipsoidy płaszczyznami przechodzącymi przez oś obrotu elipsoidy.



Rys. 1.2. Układ współrzędnych geograficznych-astronomicznych



Rys. 1.3. Układ współrzędnych geograficznych-geodezyjnych



Rys. 1.4. Układ prostokątny, geocentryczny

Współrzędne *B*, *L* można określić jako kąty kierunkowe prostej prostopadłej do geocentrycznej elipsoidy obrotowej. Oprócz współrzędnych *B*, *L* jako trzecia współrzędna może być określona również wysokość punktu *h* nad powierzchnią elipsoidy, czyli tzw. *wysokość elipsoidalna*.

Układ współrzędnych prostokątnych X, Y, Z pokazany na rys. 1.4 jest elipsoidalnym *układem przestrzennym, geocentrycznym*. Początek układu *O* znajduje się w płaszczyźnie równika geodezyjnego, w środku ciężkości masy Ziemi. Oś *x* jest śladem przecięcia płaszczyzn: równika i południka zerowego, zaś oś *y* powstaje jako ślad przecięcia płaszczyzn: równika i południka 90°. Oś *z* pokrywa się z osią obrotu elipsoidy i jest skierowana na północ. Układ geocentryczny jest obecnie wykorzystywany do określania położenia punktów za pomocą pomiarów GPS.

W połowie roku 1992 zostały podjęte prace w celu włączenia obszaru Polski do europejskiego systemu odniesień przestrzennych ETRS (*European Terrestrial Reference System*), będącego częścią światowego systemu ITRS (*International Reference System*). Dzięki obserwacjom sztucznych satelitów z sieci stacji rozmieszczonych na całym globie ziemskim odpowiednie służby definiują światowy system odniesienia związany z Ziemią wprowadzony w r. 1984. Międzynarodowym układem współrzędnych w tym systemie jest układ WGS-84 (*World Geodetic System* 1984), którego początek pokrywa się ze środkiem mas Ziemi, oś *z* jest skierowana do umownego bieguna ziemskiego (*Conventional Terrestrial Pole* - CTP). Wzajemnie prostopadłe do siebie osie *x*, *y* tego układu leżą w płaszczyźnie równika, przy czym kierunek osi *x* jest wyznaczony przez przecięcie płaszczyzny południka zerowego i płaszczyzny równika związanego z CTP, zaś oś *y* stanowi uzupełnienie prawoskrętnego, ortogonalnego układu współrzędnych.

Elipsoidą odniesienia tego układu jest elipsoida geocentryczna o symbolu GRS 80 (*Geodetic Reference System* 1980), a także WGS 84, której parametrami geometrycznymi są: $a = 6\,378\,137$ m; $b = 6\,356\,752$ m; ($p \cong 1:298{,}26$). Nazwa GRS 80 dotyczy w rzeczywistości szerszego zbioru parametrów geometryczno-geofizycznych opisujących Ziemię. Wprowadzony w r. 1984 inny zmodyfikowany zbiór parametrów, znany pod nazwą WGS 84, poza jednym elementem* praktycznie nie zmienia geometrii elipsoidy. Dlatego nazwa elipsoida (lub układ elipsoidalny) GRS 80 jest używana równoważnie z nazwą WGS 84.

1.3. Odwzorowania kartograficzne

Konieczność przedstawiania zakrzywionej powierzchni Ziemi na płaszczyźnie rysunku mapy powoduje, że sferoidalne elementy geometryczne wyznaczone na powierzchni odniesienia (elipsoidzie lub kuli), muszą być przeniesione na płaszczyznę odwzorowania kartograficznego, co umożliwia określenie położenia pomierzonych punktów za pomocą współrzędnych prostokątnych, płaskich *X*, *Y*. Ponieważ powierzchnia kuli lub elipsoidy nie da się rozwinąć na płaszczyznę bez rozerwania jej ciągłości i bez zniekształceń, toteż niektóre elementy figur, w tym sieci geodezyjnych, tj. długości, kąty lub pola po przeniesieniu z tych powierzchni na płaszczyznę muszą ulegać zniekształceniom. Z tego tytułu wyznacza się poprawki do wyników pomiarów według formuł związanych z określonym odwzorowaniem.

* Współczynnik dynamiczny kształtu Ziemi J_2

Odwzorowanie kartograficzne jest sposobem przedstawienia globu ziemskiego lub jego fragmentu w taki sposób, aby każdemu punktowi na powierzchni odniesienia odpowiadał określony punkt na płaszczyźnie (mapie).

Odwzorowanie, stanowiące sposób przetworzenia sytuacji z powierzchni zakrzywionej na obraz płaski, polega na matematycznym przyporządkowaniu poszczególnych punktów na powierzchni odniesienia punktom na płaszczyźnie poprzez funkcje f_1, f_2 pomiędzy współrzędnymi geograficznymi geodezyjnymi na elipsoidzie a współrzędnymi prostokątnymi na płaszczyźnie: $X = f_1(B,L)$; $Y = f_2(B,L)$.

Obraz siatki geograficznej przedstawiony na mapie z zachowaniem zasad odwzorowania tworzy *siatkę kartograficzną*. Jest ona ilustracją graficzną przyjętej zasady odwzorowania utworzoną przez obrazy południków i równoleżników w wybranych interwałach zmian współrzędnych geograficznych (np. co 1° lub kilkadziesiąt – kilka minut). Oczka siatki są wypełniane szczegółami, składającymi się na treść mapy. Siatkę kartograficzną można otrzymać bądź drogą przeliczeń matematycznych, określających położenie punktów przecięcia linii siatki geograficznej, bądź drogą jej rzutowania geometrycznego bezpośrednio na płaszczyznę lub figurę dającą się rozwinąć na płaszczyźnie, np. stożek względnie walec.

W wyniku procesu przenoszenia figur z powierzchni odniesienia na płaszczyznę pewne elementy odwzorowywanych figur mogą być jednak zachowane bez zniekształceń, czyli wiernie, stąd odwzorowania dzielimy na:

- wiernokątne (czyli równokątne lub konforemne),
- wiernoodległościowe (równoodległościowe),
- wiernopolowe (równopolowe),
- dowolne.

Najczęściej wykorzystywane w praktyce są odwzorowania wiernokątne, nie zmieniające kształtu figur geometrycznych. Ich dodatkową zaletą jest to, że zniekształcenia odległości w miarę oddalania się od punktu lub linii styczności powierzchni odwzorowawczej wzrastają stopniowo we wszystkich kierunkach. Odwzorowania, które nie zachowują wierności żadnego z elementów tj. kątów, powierzchni, ani też odległości są odwzorowar'a'ni dowolnymi. W żadnym z wyżej wymienionych rodzajów odwzorowań nie da się ot zy ać wiernego przedstawienia odległości na całej mapie. Można to uzyskać tylk w dłuz ewnych kierunków i takie odwzorowanie nazywa się wiernoodległościowym.

D ug:m kryterium podziału odwzorowań jest rodzaj powierzchni odwzorowania (rys 1.5) k'órą rzutuje się punkty z powierzchni odniesienia. Z tego punktu widzenia odwz o n dz'elą s'ę na:

- ;ł szczyznowe (azymutalne),
- w lcowe,
- s. żkowe.

Ze względu na położenie osi powierzchni odwzorowawczej względem osi Ziemi wyró n się odwzorowania:

- normalne (biegunowe), gdy osie obu powierzchni pokrywają się,
- poprzeczne (równikowe), gdy osie są ustawione prostopadle,
- ukośne (horyzontalne), gdy osie zajmują względem siebie położenie ukośne.

W przypadku, gdy powierzchnia odwzorowania jest płaszczyzną, rolę osi spełnia normalna do płaszczyzny. Dla odwzorowań azymutalnych możliwe jest zastosowanie nie tylko płaszczyzn stycznych do kuli, lecz także płaszczyzn siecznych. Powierzchnia odwzo-

rowania styka się z powierzchnią kuli lub elipsoidy ziemskiej w jednym punkcie, w przypadku odwzorowań płaszczyznowych stycznych, lub koła (elipsy), którym w zależności od wzajemnego ustawienia osi może być równoleżnik (odwzorowania normalne), południk (odwzorowania poprzeczne) lub dowolna krzywa zamknięta, które odwzorowują się wiernie bez zniekształceń kartograficznych. Na pozostałych obszarach mapy obraz powierzchni Ziemi jest w większym lub mniejszym stopniu zniekształcony. Wielkość i charakter zniekształceń zależy od skali mapy, rodzaju odwzorowania i położenia obszaru w stosunku do punktu lub linii styczności.

Dla odwzorowań płaszczyznowych źródło promieni rzutujących może znajdować się w różnym położeniu w stosunku do punktu styczności powierzchni: w środku kuli (rzut gnomoniczny), na antypodach punktu styczności (rzut stereograficzny) lub w nieskończoności (rzut ortograficzny wiązką promieni równoległych).

Rodzaj odwzorowania	normalne (biegunowe)	poprzeczne (równikowe)	ukośne (horyzontalne)
płaszczyznowe			
walcowe			
stożkowe			

Rys. 1.5. Rodzaje odwzorowań kartograficznych

Kombinacja wymienionych wcześniej elementów podziału, a szczególnie: rodzaj powierzchni rzutowania, położenie punktu lub linii styczności i źródło promieni rzutujących tworzą konkretne odwzorowanie. Czynniki te decydują o kształcie południków i równoleżników, odległościach i kątach pomiędzy nimi, a więc o charakterze i rozkładzie zniekształceń na mapie. Na przykład odwzorowanie płaszczyznowe w położeniu normalnym w rzucie gnomonicznym jest wiernokątne, dlatego też nazywa się go azymutalnym. W odwzorowaniu płaszczyznowym, w położeniu normalnym, południki odwzorowują się w postaci prostych rozchodzących się promieniście od bieguna; równoleżniki natomiast odwzorowują się w postaci współśrodkowych okręgów. Odległości między równoleżnikami zależą od położenia źródła promieni rzutujących, które w przypadku odwzorowań stereogra-

ficznych znajduje się na osi odwzorowania, łączącej punkt styczności (biegun odwzorowania) i środek kuli. Szczególnie korzystne jest położenie źródła promieni w punkcie znajdującym się na powierzchni Ziemi po przeciwnej stronie punktu styczności (w odległości $2R$). W Polsce w okresie międzywojennym mapy topograficzne w większych skalach były sporządzone w *odwzorowaniu quasi-stereograficznym Roussilhe'a*, podobnym do odwzorowania stereograficznego. Różnica tych odwzorowań polega głównie na tym, że dla zmniejszenia skrajnych odkształceń płaszczyznę styczną zastąpiono płaszczyzną sieczną.

W odwzorowaniach walcowych poprzecznych (rys. 1.6) oś walca leży w płaszczyźnie równika, zaś pobocznica walca styka się z powierzchnią odniesienia wzdłuż wybranego południka. Po rozcięciu walca wzdłuż tworzącej i rozwinięciu jego pobocznicy na płaszczyznę południk styczności odwzorowuje się wiernie, zachowując skalę na całej swej długości, lecz w miarę oddalania się od niego zniekształcenia wzrastają coraz szybciej, co powoduje, że południki zostają odtworzone w postaci łuków o rosnącej krzywiźnie, a więc są dłuższe od południka styczności. Równik odwzoruje się w postaci prostej prostopadłej do południka środkowego, zaś pozostałe równoleżniki w postaci łuków (rys. 1.7).

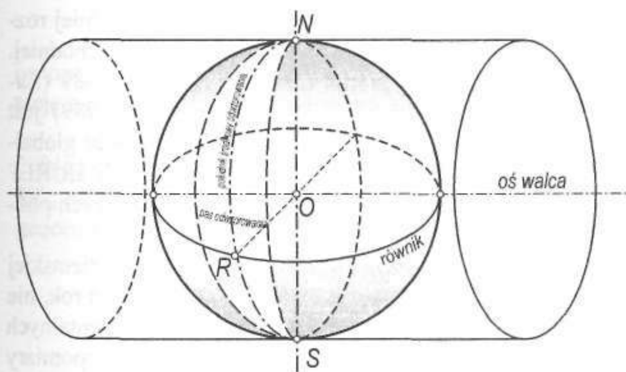
Zasady ustalania odwzorowań potrzebnych do określenia układu współrzędnych prostokątnych, przeliczania współrzędnych geograficznych na prostokątne i sporządzania map w różnych skalach są unormowane w odpowiednich instrukcjach wydawanych przez właściwe organy służb geodezyjno-kartograficznych poszczególnych państw. Ważnym czynnikiem doboru obowiązującego odwzorowania jest nieprzekraczalna wartość zniekształceń odwzorowawczych, wpływających poprzez redukcje obserwacji kątowych i liniowych na dokładność określenia współrzędnych prostokątnych punktów geodezyjnej osnowy poziomej kraju i kartometryczność map opartych na danym odwzorowaniu. Odwzorowania płaszczyznowe są przydatne do przedstawiania niedużych obszarów o granicach kształtu kolistego, walcowe poprzeczne – dla pasów biegnących południkowo, walcowe podłużne – dla terenów okołorównikowych i nawigacji, natomiast stożkowe dla obszarów średnich szerokości geograficznych (30° – 60°).

Szczególną rolę we współczesnej geodezji i kartografii odgrywają konforemne odwzorowania walcowe, a przede wszystkim opracowane przez dwóch niemieckich matematyków C. F. Gaussa (1825 r.) i L. Krügera (1912 r.) odwzorowanie wiernokątne, walcowe, poprzeczne określane też jako odwzorowanie Mercatora* w położeniu poprzecznym. Gauss odwzorował najpierw wiernokątnie elipsoidę na kulę, której koło wielkie ma obwód równy obwodowi elipsy południkowej elipsoidy, po czym powierzchnię kuli zrzutował na pobocznicy walca stycznego do kuli wzdłuż wybranego południka, zwanego południkiem środkowym lub osiowym. Krüger ulepszył rozwiązanie Gaussa, podając wzory na przejście z elipsoidy bezpośrednio na płaszczyznę z pominięciem kuli.

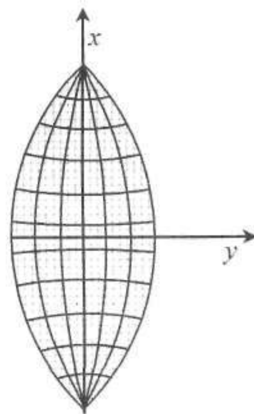
Dla ograniczenia wartości zniekształceń odległości i pól powierzchnię Ziemi dzieli się na pasy południkowe, czyli tzw. *strefy* i każdą z nich odwzorowuje się oddzielnie. W przypadku zastosowania walca stycznego do kuli, a więc ustalenia skali długości na południku środkowym jako dokładnie równej jedności (m_0=1) południk ten odwzoruje się wiernie, stanowiąc linię wzdłuż której zniekształcenia liniowe są równe zero. W efekcie odwzorowania inne południki ulegną zniekształceniom liniowym, zaś ich obrazy utworzą linie krzywe zbieżne na biegunach *N*, *S*, natomiast równoleżniki przyjmą postać zwróconych wypukłością do równika krzywych o krzywiźnie wzrastającej stopniowo w kierunku

* Powszechnie stosowane w nawigacji, typowe odwzorowanie Mercatora, jest odwzorowaniem wiernokątnym, walcowym, podłużnym.

biegunów. W wiernokątnym odwzorowaniu Gaussa-Krügera zniekształcenia długości wzrastają w miarę oddalania się od południka osiowego, toteż większe obszary należy podzielić wzdłuż południków na strefy (pasy odwzorowania – rys. 1.7) i każdą z nich odwzorowywać oddzielnie. Południk środkowy stanowi oś symetrii strefy, której zasięg wyznacza różnica długości geograficznych południków skrajnych określana jako *szerokość strefy*. Obrazy sąsiadujących ze sobą stref odwzorowania Gaussa-Krügera po rozwinięciu na płaszczyznę stykają się ze sobą tylko w punktach na równiku.



Rys. 1.6. Zasada odwzorowania Gaussa-Krügera



Rys. 1.7. Strefa odwzorowawcza

Zastosowana szerokość strefy zależy od tolerowanych zniekształceń, związanych przede wszystkim ze skalą opracowywanych map. Im większa jest skala mapy, tym mniejsze musi być dopuszczalne zniekształcenie pól i odległości na granicy strefy. Zwykle do sporządzania map wielkoskalowych o skalach większych niż 1:10 000 stosowane są strefy trzystopniowe, zaś dla wykonania map topograficznych – strefy sześciostopniowe lub większe. Dla stref o szerokości 6° zniekształcenia długościowe na brzegach wynoszą $^{1}/_{1500}$ (ok. 70 cm/km). Dla stref 9° są one dwukrotnie większe, zaś przy strefach o szerokości 12° – czterokrotnie.

Prostopadłość obrazów południka środkowego strefy i równika w odwzorowaniu Gaussa-Krügera pozwala na wykorzystanie ich w charakterze osi układu współrzędnych prostokątnych płaskich. Każda strefa posiada więc własny układ, w którym oś x stanowi obraz południka środkowego strefy, zaś oś y – obraz równika (rys. 1.7), zaś ich punkt przecięcia – początek układu. Aby uniknąć znaków minus we współrzędnych Y na zachód od południka środkowego jako współrzędną Y tego południka przyjmuje się nie zero, lecz pewną okrągłą wartość np. 500 km.

1.4. Międzynarodowy System Odniesienia (ITRS) i układ europejski (ETRF)

Układ współrzędnych pozostaje w ścisłym związku z przyjętą powierzchnią odniesienia (elipsoidy) generalizującą lokalnie lub globalnie kształt geoidy oraz rodzajem i zasięgiem obszarowym zastosowanego odwzorowania kartograficznego. Wybór konkretnego odwzorowania dla map wielkoskalowych (mapy zasadniczej) i topograficznych zależy od wielkości dopuszczalnych zniekształceń liniowych, istotnej szczególnie dla map wielkoskalowych.



Rys. 1.8. Punkty sieci EUREF znajdujące się na terenie Polski (EUREF-POL)

Globalny układ odniesienia ITRS (*International Terrestial Reference System*) jest geocentrycznym układem współrzędnych prostokątnych i opiera się na sieci złożonej z blisko stu stacji obserwacyjnych odbierających sygnały z satelitów wyznaczających na bieżąco pozycje poszczególnych stacji. W Europie stacje te były początkowo rozmieszczone tylko w krajach zachodniej Europy, lecz system został później rozszerzony na kraje Europy środkowo-wschodniej. Układ odniesienia dla Europy – ETRF-89 (*European Terrestial Reference Frame* 1989) jest układem utworzonym jako część układu globalnego ITRS i składa się z sieci stacji EUREF (*European Reference Frame*) stanowiących podzbiór sieci światowej.

Ze względu na ruchy skorupy ziemskiej układ europejski zmienia swoje położenie w stosunku do globalnego o ok. 1-3 cm/rok, nie ulegając jednak wewnętrznemu zniekształceniu. Ze uwagi na ruch płyt kontynentalnych i związane z tym zmiany w czasie współrzędnych stacji definiujących układ pomiary punktów sieci globalnej przy zakładaniu ITRS odniesiono do epoki roku 1989. Układ ETRF ma być okresowo synchronizowany z układem ITRS poprzez nowe kampanie obserwacyjne. Powierzchnią odniesienia układu ETRF-89 jest elipsoida GRS-80 (*Geodet Reference System* - 1980) o wymiarach:

$a = 6\,378\,137$ m, $p = 0{,}003\,352\,810\,681\,180$ (lub $p = 1{:}298{,}257\,222\,101\,2$).

W ramach układu ETRF przeprowadzono w Europie dwie kampanie obserwacyjne: w r. 1989 oraz w r. 1992, przy czym ta ostatnia objęła również Polskę, umożliwiając na jej terenie niezwykle precyzyjne wyznaczenie położenia 11 punktów z błędem nie przekraczającym ±1 cm (na epokę obserwacji), tworzących sieć rzędu zerowego i stanowiących polski fragment sieci EUREF, określany jako EUREF-POL 92 (rys. 1.8) oraz dowiązanie polskiej podstawowej osnowy poziomej do sieci EUREF. Odległości punktów sieci rzędu zerowego pokazanych na rys. 1.8 wynoszą przeciętnie 250 – 300 km. Rezultaty kampanii pomiarowej EUREF-POL zostały zatwierdzone przez Podkomisję dla Europejskiego Układu Odniesienia (EUREF) Międzynarodowej Asocjacji Geodezji w 1994 r.

Po utworzeniu na obszarze Polski sieci EUREF-POL dokonano następnie jej zagęszczenia siecią ok. 350 punktów, zwaną w skrócie POLREF. Wszystkie pomiary wykonane zostały techniką GPS (Global Positioning System). Sieci EUREF-POL i POLREF stały się z kolei podstawą ponownego wyrównania dawnej sieci astronomiczno-geodezyjnej i triangulacji wypełniającej (sieci I klasy), a następnie także sieci poziomej II klasy. Wszystkie obliczenia wykonano już na elipsoidzie.

1.5. Państwowy system odniesień przestrzennych w Polsce

Parametry techniczne i warunki stosowania państwowego systemu odniesień przestrzennych określa Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 8 sierpnia 2000 r. "W sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych" (Dz. U. z 2000r. Nr 70, poz. 821). Państwowy system odniesień przestrzennych stosuje się w pracach geodezyjnych i kartograficznych oraz w systemach informacji o terenie, wykonywanych do celów gospodarczych.

1.5.1. Geodezyjny układ odniesienia

Geodezyjny układ odniesienia, w którym wyznaczane są współrzędne punktów osnów geodezyjnych, określony jest poprzez: typ układu, położenie jego początku, orientację osi współrzędnych, parametry elipsoidy odniesienia.

Zgodnie ze wspomnianym rozporządzeniem i instrukcją O-1/O-2 (wydanie z r. 2001) powierzchnią obowiązującego w Polsce geodezyjnego układu odniesienia „EUREF-89", niezbędnego do wyznaczania współrzędnych *B, L, h* (*h* – wysokość elipsoidalna) jest geocentryczna elipsoida GRS-80 o następujących parametrach:

- promień równikowy Ziemi: $a = 6\,378\,137$ m,
- spłaszczenie geometryczne: $p = 1{:}298{,}257\,222\,101$,
- ziemska stała grawitacyjna (łącznie z atmosferą): $GM = 3\,986\,005 \cdot 10^8 m^3 s^{-2}$,
- współczynnik dynamiczny kształtu Ziemi (bez uwzględnienia stałej deformacji pływowej): $J_2 = 108263 \cdot 10^{-8}$,
- prędkość obrotu Ziemi: $\omega = 7\,292\,115 \cdot 10^{-11} rad \cdot s^{-1}$.

Położenie przestrzenne punktów w stosunku do elipsoidy wyznaczają współrzędne geodezyjne *B, L, h* lub geocentryczne współrzędne prostokątne: *X, Y, Z*.

1.5.2. Układ współrzędnych prostokątnych „1942"

Układ „1942" został wprowadzony w dawnym ZSSR w roku 1942 i obowiązywał później w krajach należących do b. Paktu Warszawskiego (w Polsce od r. 1953). Do r. 1968 układ ten był stosowany do celów cywilnych i wojskowych, zaś po roku 1968 – tylko dla potrzeb wojska. Jest on oparty na elipsoidzie Krasowskiego z punktem przyłożenia „Pułkowo" i odwzorowaniu Gaussa-Krügera, w którym dla opracowań wielkoskalowych obszar Polski został podzielony na cztery strefy trzystopniowe, zaś każda z nich posiadała swój niezależny układ współrzędnych prostokątnych. Układy te są oznaczone numerami: I, II, III, IV i dodatkowo określone nazwami pochodzącymi od większych miast znajdujących się na terenie danej strefy, blisko południków osiowych (rys. 1.9 b). Wyróżnia się układy:

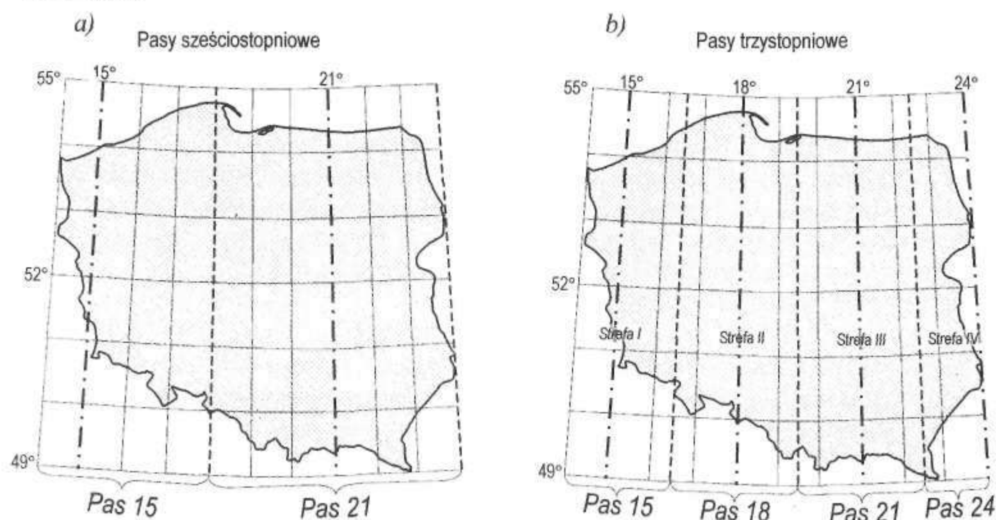
- Układ I szczeciński południk osiowy $\lambda = 15°$
- Układ II bydgoski południk osiowy $\lambda = 18°$
- Układ III warszawski południk osiowy $\lambda = 21°$
- Układ IV białostocki południk osiowy $\lambda = 24°$.

W każdym układzie dla uniknięcia powtarzania się współrzędnych i ujemnych wartości współrzędnej *Y* dla punktów położonych na południku osiowym o długości geograficznej λ przyjmuje się współrzędną: $Y_0 = {}^1/_3\, \lambda \cdot 10^6 + 500\,000$ m. Ostateczne współrzędne punktu w układzie międzynarodowej mapy świata (por. ust. 14.2) w oparciu o współrzędne *x, y* liczone względem osi układu strefy określimy wg wzorów:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = \frac{1}{3}\lambda \cdot 10^6 + 500\,000\text{ m} + y \end{cases} \tag{1.1}$$

gdzie: x – odległość punktu od równika,
y – odległość punktu od południka osiowego strefy.

Zniekształcenia długości na południku osiowym są zerowe (skala podobieństwa $m_0 = 1{,}00000$) i rosną stopniowo, osiągając na obrzeżach stref trzystopniowych wartość ok. +15 cm/km.



Rys. 1.9. Układ „1942": podział obszaru Polski na strefy 3° i 6° w odwzorowaniu Gaussa-Krügera

Dla opracowywania map topograficznych średnio- i małoskalowych stosowano też drugą wersję układu współrzędnych „1942" z podziałem terytorium Polski na strefy sześciostopniowe o południkach osiowych: 15° i 21° (rys. 1.9 a). Zniekształcenia długości na obrzeżach stref sześciostopniowych wynoszą ok. +59 cm/km.

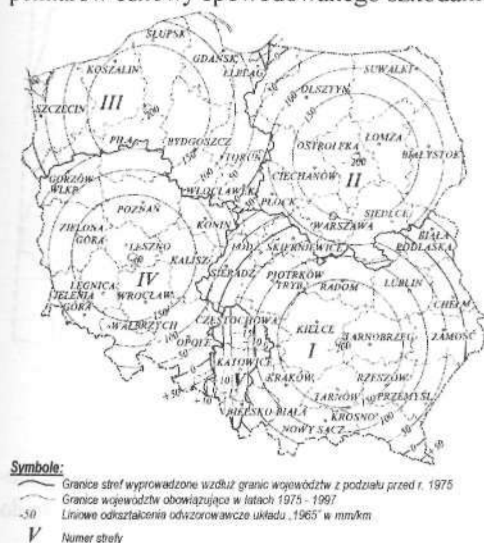
1.5.3. Układy współrzędnych „1965" i GUGiK-80

W końcu lat sześćdziesiątych, w ramach opisanego dalej układu współrzędnych prostokątnych „1965" (rys. 1.10), zastosowano podział kraju na pięć stref odwzorowawczych, z których cztery posiadały konforemne, płaszczyznowe *odwzorowanie quasi-stereograficzne*, natomiast w strefie 5 wykorzystano odwzorowanie Gaussa-Krügera. W umownych środkach stref: 1 – 4 określono położenie punktów głównych, czyli punktów środkowych okręgów sieczności oraz ustalono w tych punktach skalę $m_0 = 0{,}9998$, przez co liniowe zniekształcenia odwzorowawcze w środku każdej strefy wynoszą –200 mm/km.

Każda strefa posiada własny układ współrzędnych z półosią $+x$ zwróconą na północ oraz półosią $+y$ – na wschód. Granice stref zostały oparte na podziale administracyjnym sprzed r. 1975 i przebiegają wzdłuż granic dawnych województw.

Strefa I obejmująca południowo-wschodnią część obszaru Polski, na której położone są między innymi takie miasta jak: Kraków, Nowy Sącz, Rzeszów, Przemyśl, Lublin, Kielce, Łódź, Biała Podlaska.

Strefa II zawierająca rejon Polski północno-wschodniej z miastami: Warszawa, Płock, Białystok, Suwałki, Olsztyn.
Strefa III obejmująca północno-zachodnią część kraju z miastami: Gdańsk, Szczecin, Włocławek, Bydgoszcz.
Strefa IV zawierająca południowo-zachodnią część Polski, na której znajdują się między innymi: Poznań, Gorzów Wielkopolski, Leszno, Wrocław, Opole, Wałbrzych.
Strefa V obejmująca teren dawnego województwa katowickiego w granicach sprzed r. 1975, z miastami: Częstochowa, Katowice, Bielsko-Biała, o innym niż pozostałe strefy odwzorowaniu kartograficznym (Gaussa-Krügera), została specjalnie wydzielona dla terenu Śląska ze względów strategicznych oraz z uwagi na konieczność częstego wznawiania pomiarów osnowy spowodowanego szkodami górniczymi.



Rys. 1.10. Strefy układu"1965"

Ponieważ w strefach I – IV zastosowano wiernokątne (konforemne) odwzorowanie quasi-stereograficzne na płaszczyznę sieczną, toteż linie zniekształceń są współśrodkowymi okręgami, natomiast w strefie V wykorzystano wiernokątne odwzorowanie Gaussa-Krügera, które daje linie zniekształceń w postaci prostych równoległych skierowanych południkowo. Największe zniekształcenia liniowe występują w częściach środkowych, dochodząc w strefach I-IV do 250 mm/km, zaś w strefie V do 15 mm/km i stopniowo zmniejszają się w kierunku ich granic. W układzie „1965" sporządzano: mapę zasadniczą we wszystkich skalach bazowych i inne opracowania wielkoskalowe oraz mapy topograficzne do skali 1:50 000 włącznie. Mapy te nie posiadają siatki kartograficznej (południkowo-równoleżnikowej).

Obecnie następuje stopniowe odchodzenie od układu „1965", zaś decyzja o zmianie obowiązującego układu współrzędnych w poszczególnych województwach może być podjęta przez marszałka województwa w porozumieniu z wojewódzkim inspektorem nadzoru geodezyjnego. Zgodnie z cytowanym wcześniej Rozporządzeniem Rady Ministrów z dnia 8 sierpnia 2000 r. "W sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych" układ „1965" może być stosowany do 31 grudnia 2009 r. Po tym terminie poszczególne województwa w Polsce muszą obligatoryjnie przejść do korzystania z układów: „1992" i „2000".

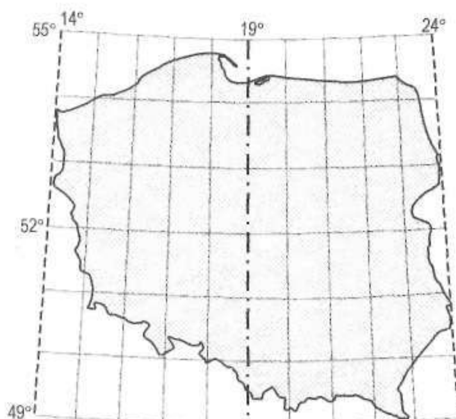
Dla wydawanych w latach 1980-1984 map przeglądowych w skali 1:100 000 i skalach mniejszych przyjęto natomiast układ zwany *Układem GUGiK-80*, oparty na jednostrefowym odwzorowaniu quasi-stereograficznym terenu całego kraju. Punkt główny odwzorowania wybrano w przybliżeniu w środku obszaru Polski ($B_0 = 52°10'$, $L_0 = 19°10'$; $X_0 = Y_0 = 500\ 000$ m). Współczynnik zmiany skali w tym punkcie wynosi 0,999714, a maksymalne zniekształcenie liniowe na granicach Polski jest równe około 93 cm/km.

1.5.4. Układy współrzędnych: „1992", „2000" i UTM

Dla określania współrzędnych punktów osnowy poziomej i sporządzania opracowań kartograficznych utworzono w Polsce nowe układy współrzędnych: „1992" oraz „2000" oparte na współrzędnych geograficznych - geodezyjnych *B*, *L* w układzie europejskim ERTF, dla którego powierzchnię odniesienia stanowi elipsoidzie obrotowa GRS-80. Współrzędne prostokątne, płaskie *X*, *Y* są obliczane w odwzorowaniu Gaussa-Krűgera. Oba te układy zostały wprowadzone do stosowania wspomnianym wcześniej rozporządzeniem Rady Ministrów z dnia 8 sierpnia 2000 r.

Układ „1992" jest stosowany przy sporządzaniu *map topograficznych* w skali 1:10 000 i w skalach mniejszych. Układ ten opiera się na odwzorowaniu Gaussa-Krűgera i jest monolityczny, co oznacza, że jedna strefa odwzorowawcza mieści w sobie cały obszar Polski (rys. 1.11), zawierający się w przedziale długości geograficznej wschodniej: od 14°07'*E* do 24°08'*E*. Południkiem środkowym strefy jest południk 19°*E*. Pozostałe parametry układu stanowią:

- skala wzdłuż południka środkowego wynosi 0,9993,
- punkt przecięcia się obrazu równika z obrazem południka osiowego otrzymuje współrzędną $X = -5\,300\,000$ m, zaś punkty leżące na południku środkowym współrzędną $Y = 500\,000$ m.



Rys. 1.11. Jednostrefowy układ „1992"

W związku z przyjęciem wzdłuż południka środkowego skali $m_0 = 0{,}9993$ zniekształcenia długości zmieniają się w zakresie: od ok. –70 cm/km na południku osiowym do +90 cm/km na obrzeżach dziesięciostopniowej strefy.

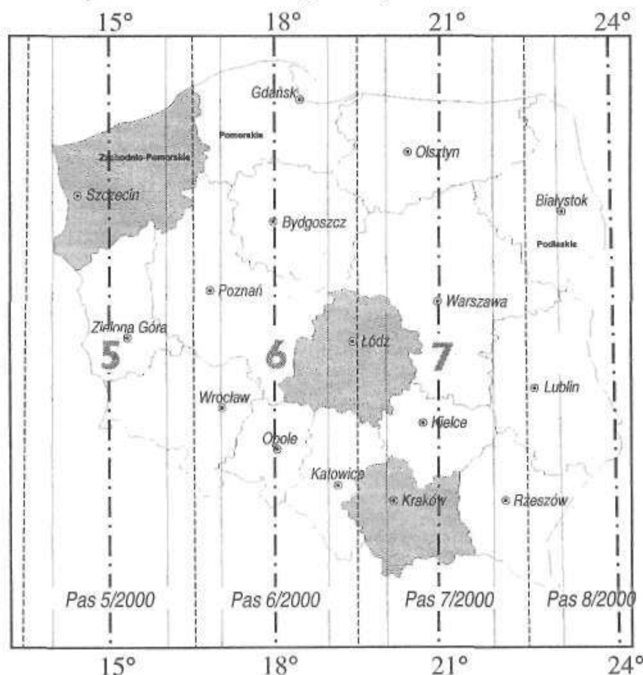
Układ „2000", określany niekiedy jako drugi wariant układu „1992", oparty jest na odwzorowaniu Gaussa-Krűgera i podziale obszaru Polski na cztery strefy trzystopniowe. Jest więc koncepcją nawiązującą do dawniejszego układu „1942", lecz elipsoidą odniesienia nie jest w tym wypadku elipsoida Krasowskiego, lecz elipsoida GRS 80, zaś skala południka środkowego wynosi 0,999923. Układ „2000" jest wykorzystywany w pracach geodezyjnych dla potrzeb Systemu Informacji o Terenie (SIT) oraz w pracach kartograficznych do sporządzania map w skalach 1:10 000 i większych.

Długości geograficzne wschodnie południków środkowych stref trzystopniowych wynoszą: 15°, 18°, 21°, 24°, zaś strefy te są oznaczone kolejnymi numerami: 5, 6, 7, 8 (rys. 1.12). Obraz równika jest linią prostą o równaniu $X=0$, natomiast wszystkie punkty leżące na południku osiowym mają końcówkę współrzędnej *Y* równą 500 000 m. Dla jednoznacznego określenia przynależności danego punktu do konkretnego pasa (strefy), jako pierwszą cyfrę współrzędnej *Y* podaje się numer pasa, stąd współrzędne *Y* punktów położonych na poszczególnych południkach środkowych wynoszą:

- 5 500 000 m dla południka L_0= 15° (strefa 5),
- 6 500 000 m dla południka L_0= 18° (strefa 6),
- 7 500 000 m dla południka L_0= 21° (strefa 7),
- 8 500 000 m dla południka L_0= 24° (strefa 8).

Pomnożenie pierwszej cyfry współrzędnej *Y* każdego punktu przez 3 daje więc liczbę równą wyrażonej w stopniach długości geograficznej południka środkowego strefy, w której położony jest rozpatrywany punkt.

Ze względu na przyjęcie na południku osiowym współczynnika skali 0,999923 (zamiast 1) zniekształcenia liniowe zmieniają się w zakresie: od –7,7 cm/km na tym południku do ok. +7 cm/km na brzegu pasa. Izolinie zniekształceń liniowych są prostymi równoległymi do obrazu południka środkowego strefy.



Rys. 1.12. Układ „2000": pasy trzystopniowe w odwzorowaniu Gaussa-Krügera

Układ UTM jest międzynarodowym układem współrzędnych płaskich stosowanym na świecie do celów nawigacyjnych i wojskowych, opartym aktualnie na elipsoidzie WGS 84 i uniwersalnym poprzecznym odwzorowaniu Mercatora (*Universal Transverse Mercator Projection*). Jest to odwzorowanie Gaussa-Krügera w pasach sześciostopniowych, ze skalą na południku środkowym m_0 = 0,9996 (zniekształcenie na tym południku wynosi 40 cm/km). Odwzorowanie UTM zostało wprowadzone pierwotnie na elipsoidzie Hayforda, obecnie zaś zarówno do celów cywilnych, jak i wojskowych obowiązuje elipsoida GRS-80 (WGS-84). W Polsce układ ten jest wykorzystywany od początku lat 90-tych do opracowania map wojskowych, zgodnych ze standardami NATO. W układzie UTM obszar powierzchni elipsoidy zawarty pomiędzy równoleżnikami 80°*N* i 80°*S* dzieli się na strefy południkowe o rozpiętości 6° długości geograficznej, zaczynając od południka 180°. Układ ten tworzy system meldunkowy, dzieląc każdą z południkowych stref (ponumerowanych od 1 do 60) na czworoboki sferyczne o wysokości 8° szerokości geograficznej. Czworoboki te identyfikuje się poprzez kod cyfrowo-literowy np.34 *U*. Każdy z tych czworoboków dzieli się następnie na kwadraty o boku 100 km , oznaczane za pomocą odpowiedniej kombinacji liter.

1.5.5. Odniesienia prac grawimetrycznych i magnetycznych*

Poziomem odniesienia obowiązującym w Polsce przy pracach grawimetrycznych wykonywanych na potrzeby geodezyjne jest system określony przez zespół wartości przyspieszenia siły ciężkości, wyznaczonych na punktach europejskiej sieci grawimetrycznej. Wektor ***g*** *przyspieszenia siły ciężkości Ziemi*, prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej, jest wyznaczany na podstawie pomiarów grawimetrycznych oraz znajomości współrzędnych geograficznych miejsca obserwacji.

Obowiązującym układem odniesienia zdjęć magnetycznych, wykonywanych dla elementów pola magnetycznego Ziemi, jest regionalny standard obserwatoriów magnetycznych, wyrównany dla Europy środkowej i południowo-wschodniej.

1.5.6. Układ wysokościowy

Najmniejszą jednostką terytorialną, na której powinien obowiązywać jednolity poziom odniesienia wysokości jest obszar państwa. Istnienie bowiem w kraju wielu poziomów wprowadza chaos w określaniu wysokości punktów osnowy i przedstawianiu konfiguracji terenu na mapach. Do zdefiniowania układu wysokościowego konieczne jest ustalenie powierzchni odniesienia w określonym punkcie Ziemi oraz przyjęcie systemu wyznaczania wysokości, które mogą być: geopotencjalne, ortometryczne, normalne, elipsoidalne, dynamiczne itp. W Europie środkowo-wschodniej powszechnie wykorzystywano układ, w którym poziom powierzchni odniesienia ustalono jako średni poziom Morza Bałtyckiego w Zatoce Fińskiej wyznaczony na podstawie wieloletnich obserwacji z wykorzystaniem mareografu w Kronsztadzie, zaś jako system przyjęto wysokości normalne.

Zgodnie z instrukcją O-1/O-2 (§7 p. 1) aktualnie obowiązujący na terenie Polski państwowy „układ wysokości tworzą wysokości normalne, odniesione do średniego poziomu Morza Bałtyckiego w Zatoce Fińskiej, wyznaczonego dla mareografu w Kronsztadzie k. Sankt Petersburga (Federacja Rosyjska)". Długoletnie pomiary wykazały, że z powodu zmian klimatycznych poziom morza w Kronsztadzie podnosi się w ciągu roku o ok. 0,03 mm. Z tego powodu obecny poziom Bałtyku znajduje się już o około 4 cm powyżej zera łaty wodowskazowej mareografu w Kronsztadzie.

W układzie tym określane są wysokości punktów podstawowej osnowy wysokościowej, zaś na podstawie pomiarów niwelacyjnych nawiązanych do tej osnowy wyznacza się wysokości punktów osnowy szczegółowej i pomiarowej względem przyjętego poziomu odniesienia.

Punkty o jednakowej szerokości geograficznej, leżące na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej, mają identyczne wysokości normalne. Są one odnoszone do tzw. *quasigeoidy* – powierzchni mórz i oceanów oraz tych punktów pod lądami, dla których przeciętna wartość przyspieszenia normalnego γ jest równa średniej wartości przyspieszenia rzeczywistego g siły ciężkości. Quasigeoida, zwana także *geoidą niwelacyjną*, jest teoretyczną powierzchnią aproksymującą swobodny poziom mórz i oceanów w systemie wysokości normalnych, których spodki są położone na powierzchni quasigeoidy.

Równanie W = const. opisuje rodzinę powierzchni ekwipotencjalnych czyli poziomych, wśród których geoida zerowa o potencjale ciężkości $W = W_0$ pokrywa się ze średnim poziomem mórz otwartych. Wysokości punktów, zwane *wysokościami normalnymi*, oblicza się jako różnicę potencjałów C_P siły ciężkości pomiędzy zerową powierzch-

* Instrukcja techniczna O1/O2 §8.

nią ekwipotencjalną a powierzchnią ekwipotencjalną przechodzącą przez dany punkt P podzieloną przez przeciętną wartość normalną γ przyspieszenia ziemskiego na odcinku linii pionu od punktu P do powierzchni odniesienia.

Wysokość normalna ***H*** punktu P jest to różnica potencjałów siły ciężkości $W_0 - W_P$ na powierzchni geoidy (W_0) oraz w danym punkcie (W_P), czyli *wartość (cecha) geopotencjalna* C_P podzielona przez średnią wartość przyspieszenia siły ciężkości γ, mierzonego wzdłuż linii pionu normalnego pola siły ciężkości.

Uwzględniając, że: $C_P = W_0 - W_P$ otrzymamy zatem:

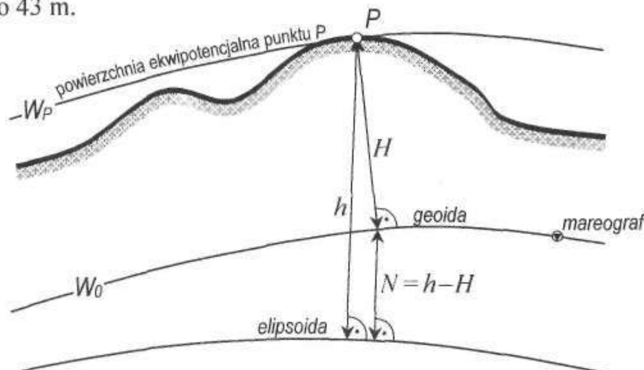
$$H = \frac{C_P}{\gamma} \tag{1.2}$$

Oprócz wysokości normalnej odniesionej do quasigeoidy, wyróżnia się także *wysokość elipsoidalną* (*wysokość geodezyjną*) ***h*** (rys. 1.13) w geodezyjnym układzie odniesienia, czyli odległość pomiędzy danym punktem P a powierzchnią elipsoidy odniesienia. Wysokość ta jest dodatnia dla punktów leżących poza elipsoidą.

Znajomość odstępu N geoidy od elipsoidy, wyrażonego wzorem:

$$N = h - H \tag{1.3}$$

umożliwia obliczenie wysokości normalnej na podstawie pomierzonej wysokości elipsoidalnej ($H = h - N$). Tę z kolei można uzyskać z pomiarów satelitarnych GPS, natomiast odstęp elipsoidy od geoidy N określa się na podstawie pomiarów grawimetrycznych. Na obszarze Polski odstęp geoidy od geocentrycznej elipsoidy GRS-80 waha się w przedziale od 28 m do 43 m.



Rys. 1.13. Wysokość elipsoidalna *h* i wysokość względem średniego poziomu morza *H*

1.6. Instrukcje geodezyjne, wytyczne techniczne i normy

Zadaniem instrukcji technicznych jest ujednolicenie zasad zakładania na terenie całego kraju osnowy geodezyjnej i sposobów wykonywania prac geodezyjno-kartograficznych oraz prowadzenia krajowego systemu informacji o terenie. Stanowią one tzw. *standardy techniczne* zawierające przepisy i normy techniczne, ustanowione w oparciu o następujące akty prawne: art. 19 ust. 1 pt. 4 ustawy z dnia 19 maja1989 r.– Prawo Geodezyjne i Kartograficzne wraz z rozporządzeniem Ministra S.W. i A. z dn. 24 marca 1999 r. W rozporządzeniu tym wymienia się: rodzaje prac, przy których jednolite standardy techniczne w formie instrukcji znajdują zastosowanie oraz wykaz standardów

w postaci symbolu i tytułu instrukcji, daty jej wprowadzenia oraz dokonanych w nich zmian na podstawie rozporządzeń Prezesa Głównego Urzędu Geodezji i Kartografii (GUGiK).

1.6.1. Instrukcje geodezyjne

Instrukcje techniczne dzielą się na grupy oznaczone symbolami: O, G, K, przy czym:

- **Instrukcje O** regulują sprawy i ustalenia ogólne porządkujące, obowiązujące w geodezji i kartografii. Określają także niektóre wspólne, standardowe cechy produktów geodezyjno-kartograficznych.
- **Instrukcje G** dotyczą prac geodezyjnych, a w szczególności: zakładania, pomiaru i stabilizacji osnów geodezyjnych, pomiarów astronomicznych, grawimetrycznych i magnetycznych dla potrzeb geodezji, pomiarów sytuacyjnych i wysokościowych, pomiarów realizacyjnych i obsługi inwestycji, pomiarów i opracowań z zakresu ewidencji gruntów, budynków (katastru) i sieci uzbrojenia terenu oraz przetwarzania informacji uzyskanych z pomiarów i tworzenie baz danych.
- **Instrukcje K** regulują przepisy dotyczące materiałów kartograficznych, a szczególnie pojęć, treści i form opracowania mapy zasadniczej, map topograficznych i map tematycznych. Zawierają też wzory stosowanych na mapach znaków umownych.

Instrukcje należące do grupy „G" i „K" składają się z dwóch części:

1. Instrukcji głównej zwanej instrukcją techniczną, określanej jako *część obligatoryjna* instrukcji, zawierająca kryteria dokładnościowe oraz określenie treści i formy prac geodezyjno-kartograficznych.
2. Wytycznych technicznych stanowiących *część fakultatywną* instrukcji, zawierającą wzory, przykłady, opisy zalecanych technologii i przyrządów pomiarowych, parametry techniczne poszczególnych etapów prac, wzory formularzy i dokumentów.

Jednolitość i odpowiednią jakość prac geodezyjnych wykonywanych dla potrzeb poszczególnych resortów gospodarczych zapewniają *resortowe instrukcje techniczne*, i wytyczne wykonania prac geodezyjnych dla potrzeb poszczególnych gałęzi przemysłu. Ich treść nie może być sprzeczna z instrukcjami podstawowymi z grup: „O", „G", „K".

Aktualny wykaz obowiązujących instrukcji (standardów technicznych) podany jest w cytowanym wcześniej rozporządzeniu Ministra S.W. i A. z dn. 24 marca 1999 r. Obejmuje on następujący wykaz instrukcji i zmian do nich:

1. Instrukcje techniczne: „**O-1**; Ogólne zasady wykonywania prac geodezyjnych" i „**O-2**; Ogólne zasady opracowania map do celów gospodarczych", wprowadzone do stosowania zarządzeniem nr 1 Prezesa GUGiK z dnia 9 lutego 1979 r., zmienione zarządzeniem nr 4 Prezesa GUGiK z dnia 23 lipca 1983 r.
2. Instrukcja techniczna „**O-3**; Zasady kompletowania dokumentacji geodezyjnej i kartograficznej", wprowadzona do stosowania zarządzeniem nr 1 Ministra Gospodarki Przestrzennej i Budownictwa z dnia 4 lutego 1992 r.
3. Instrukcja techniczna „**O-4**; Zasady prowadzenia państwowego zasobu geodezyjnego i kartograficznego", wprowadzona zarządzeniem nr 5 Prezesa GUGiK z dnia 10 lipca 1987 r.

4. Instrukcja techniczna „**G-1**; Pozioma osnowa geodezyjna", wprowadzenia do stosowania zarządzeniem nr 4 Prezesa GUGiK z dnia 19 lutego 1979 r., zmieniona zarządzeniem nr 5 Prezesa GUGiK z dnia 23 lipca 1983 r.
5. Instrukcja techniczna „**G-2**; Wysokościowa osnowa geodezyjna", wprowadzona do stosowania zarządzeniem nr 4 Prezesa GUGiK z dnia 11 kwietnia 1980 r., zmieniona zarządzeniem nr 6 Prezesa GUGiK z dnia 23 lipca 1983 r.
6. Instrukcja techniczna „**G-3**; Geodezyjna obsługa inwestycji", wprowadzona do stosowania zarządzeniem nr 5 Prezesa GUGiK z dnia 11 kwietnia 1980 r.
7. Instrukcja techniczna „**G-4**; Pomiary sytuacyjne i wysokościowe", wprowadzona do stosowania zarządzeniem nr 7 Prezesa GUGiK z dnia 23 lipca 1983 r., zmieniona zarządzeniem nr 1 Prezesa GUGiK z dnia 24 lutego 1984 r.
8. Instrukcja techniczna **G-7**; Geodezyjna ewidencja sieci uzbrojenia terenu", wydana w 1998 r. przez Głównego Geodetę Kraju.
9. Instrukcja techniczna „**K-1**; Mapa zasadnicza", wprowadzona do stosowania zarządzeniem Prezesa GUGiK z dnia 9 lutego 1979 r., zmieniona zarządzeniem nr 1 Prezesa GUGiK z dnia 24 lutego 1984 r. Instrukcja techniczna „K-1; Podstawowa mapa kraju", wprowadzona do stosowania przez Głównego Geodetę Kraju pismem z dnia 16 maja 1995 r. i znowelizowana w r. 1998.
10. Instrukcja techniczna „**K-2**; Mapy topograficzne do celów gospodarczych", wprowadzona do stosowania zarządzeniem Prezesa GUGiK z dnia 9 lutego 1979 r.
11. Instrukcja techniczna „**K-3**; Mapy tematyczne", wprowadzona do stosowania zarządzeniem nr 1 Prezesa GUGiK z dnia 12 stycznia 1980 r.

Począwszy **od roku 2000** wydawane są przez GUGiK nowe wersje instrukcji tj.:

- Instrukcja O-1/O-2 (wydanie pierwsze) pt. „Ogólne zasady wykonywania prac geodezyjnych i kartograficznych"; GUGiK Warszawa 2000 r.
- Instrukcja O-3/O-4 pt. „Prowadzenie Państwowego Zasobu Geodezyjnego i Kartograficznego oraz kompletowanie prac geodezyjnych i kartograficznych"; GUGiK Warszawa 2001 r.
- Instrukcja G-2 (wydanie piąte, zmienione) pt. „Szczegółowa pozioma i wysokościowa osnowa geodezyjna i przeliczenia współrzędnych między układami"; GUGiK Warszawa 2001 r.
- Instrukcja G-4 (wydanie czwarte, zmienione) pt. „Pomiary sytuacyjne i wysokościowe"; GUGiK Warszawa 2002 r.

1.6.2. Wykaz wytycznych technicznych

Wytyczne techniczne są zaleceniami i wskazówkami techniczno-technologicznymi, ułatwiającymi osiągnięcie parametrów dokładnościowych wymaganych w instrukcjach geodezyjnych.

G-1.1 Pomiary astronomiczne i opracowanie ich wyników;
G-1.2 Pomiary grawimetryczne i opracowanie ich wyników;
G-1.3 Pomiary pola magnetycznego Ziemi i opracowanie ich wyników;
G-1.4 Budowle triangulacyjne;
G-1.5 Szczegółowa osnowa pozioma. Projektowanie, pomiar i opracowanie wyników;

G-1.6 Przeglądy, konserwacje i odtwarzanie punktów geodezyjnych, grawimetrycznych i magnetycznych;
G-1.7 Centralne banki osnów geodezyjnych, grawimetrycznych i magnetycznych;
G-1.8 Aerotriangulacja analityczna;
G-1.9 Katalog znaków geodezyjnych oraz zasady stabilizacji punktów;
G-1.10 Poprawki odwzorowawcze państwowego układu współrzędnych;
G-2.1 Podstawowa osnowa wysokościowa. Projektowanie, pomiar i opracowanie wyników;
G-2.2 Szczegółowa osnowa wysokościowa. Projektowanie, pomiar i opracowanie wyników;
G-3.1 Osnowy realizacyjne;
G-3.2 Pomiary realizacyjne;
G-3.4 Inwentaryzacja zespołów urbanistycznych, zespołów zieleni i obiektów architektury;
G-4.1 Sieci modularne;
G-4.2 Uczytelnianie fotogrametrycznych zdjęć lotniczych i pomiary uzupełniające dla mapy zasadniczej;
G-4.3 Bezpośrednie pomiary wysokościowe;
G-4.4 Prace geodezyjne związane z podziemnym uzbrojeniem terenu;
K-1.1 Metryka mapy zasadniczej;
K-1.2 Mapa zasadnicza. Aktualizacja i modernizacja;
K-1.3 Mapa zasadnicza. Opracowanie pierworysu z pomiarów bezpośrednich;
K-1.4 Mapa zasadnicza. Opracowanie rzeźby terenu z istniejących materiałów kartograficznych;
K-1.5 Mapa zasadnicza. Opracowanie pierworysu autogrametrycznego sytuacji i rzeźby terenu;
K-1.6 Mapa zasadnicza. Opracowanie pierworysu na podkładzie fotomapy i ortofotomapy;
K-1.7 Mapa zasadnicza w wersji rozwarstwionej;
K-1.8 Mapa zasadnicza. Zasady opracowania numerycznego;
K-1.9 Sporządzenie pierworysu mapy. Materiały kartograficzne, sprzęt kreślarski, tusze, technika rysowania;
K-1/K-3.10 Reprodukcja kartograficzna małonakładowa. Metody i technologie;
K-2.1 Mapy topograficzne. Opracowanie pierworysów i aktualizacja map w skalach: 1:5 000 i 1: 10 000;
K-2.2 Mapy topograficzne. Opracowanie czystorysów map w skalach: 1:5 000, 1:10 000;
K-2.3 Sporządzanie map fotograficznych;
K-2.4 Metryka mapy topograficznej 1:5 000, 1:10 000;
K-2.5 Metryka mapy topograficznej 1:25 000, 1:50 000;
K-2.6 Metryka mapy topograficznej 1:100 000, 1:200 000, 1:500 000;
K-2.7 Sporządzanie fotogrametrycznych zdjęć lotniczych;
K-2.8 Mapa topograficzna. Prace polowe;
K-2.9 Mapa topograficzna. Prace kartograficzne i aktualizacja;
K-3.1 Mapy społeczno-gospodarcze w skalach 1:5 000, 1:10 000, 1:25 000;
K-3.2 Sporządzanie map inżynieryjno-gospodarczych zakładów przemysłowych metodą stereofotogrametryczną;

K-3.3 Mapa przeglądowa uzbrojenia terenu;
K-3.4 Mapy przyrodnicze;
K-3.6 Mapa sozologiczna w skali 1:50 000.

Począwszy **od roku 2000** wydawane są przez GUGiK nowe wersje wytycznych:

- Wytyczne **G-1.10** (wydanie drugie zmienione) pt. „Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych"; GUGiK Warszawa 2001 r.
- Wytyczne **G-1.11** (wydanie pierwsze) pt. „Podstawowa osnowa wysokościowa projektowanie, pomiar i opracowanie wyników"; GUGiK Warszawa 2002 r.
- Wytyczne **G-2.5** pt. „Szczegółowa pozioma i wysokościowa osnowa geodezyjna. Projektowanie, pomiar i opracowanie wyników"; GUGiK Warszawa 2002 r.

1.6.3. Normy

Pewne zagadnienia geodezyjne zostały także ujednolicone w ramach: Polskich Norm (PN) określanych przez Polski Komitet Normalizacyjny (PKN) oraz Branżowych Norm (BN) odpowiednich ministerstw. PKN jest członkiem komitetów: europejskiego – *European Comittee for Standarization* (CEN) oraz międzynarodowego – *International Organization for Standarization* (ISO). Zweryfikowane do potrzeb polskich normy międzynarodowe oznaczane są symbolem PN-ISO.

Rozporządzenie Ministra Gospodarki Przestrzennej i Budownictwa z dnia 21 czerwca 1994 r. „w sprawie wprowadzenia obowiązku stosowania niektórych Polskich Norm z zakresu budownictwa, gospodarki przestrzennej i komunalnej oraz geodezji i kartografii.(Dz. U. nr 84 z dnia 25 lipca 1994 r. poz. 387)" stwierdza:
„Na podstawie art. 19 ust. 2 ustawy z dnia 3 kwietnia 1993 r. o normalizacji (Dz. U. Nr 55, poz. 251) zarządza się, co następuje:
§ 1. Wprowadza się obowiązek stosowania niektórych Polskich Norm (PN) z zakresu budownictwa, gospodarki przestrzennej i komunalnej oraz geodezji i kartografii, wymienionych w załączniku do rozporządzenia."

Załącznik do rozporządzenia Ministra Gospodarki Przestrzennej i Budownictwa z dnia 21 czerwca 1994 r. (poz. 387)

WYKAZ POLSKICH NORM DO OBOWIĄZKOWEGO STOSOWANIA
Pominięto: dział 04, 06, 07, 10

Dział 13: Przyrządy pomiarowe, środki automatyzacji

Lp.	Numer i tytuł normy	Obowiązujące postanowienia normy	Zakres obowiązkowego stosowania normy
1	2	3	4
	Klasa 134. Przyrządy optyczne i mikroskopy		
	Grupa 1340. Nomenklatura, klasyfikacja i normy ogólne		
1	PN-78/N-99250 Sprzęt geodezyjny. Podstawowe nazwy i określenia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy

Dział 16: Zagadnienia naukowo-techniczne, dokumentacja i organizacja

Lp.	Numer i tytuł normy	Obowiązujące postanowienia normy	Zakres obowiązkowego stosowania normy
1	2	3	4
	Klasa 164. Geodezja i kartografia Grupa 1640. Ogólne zagadnienia geodezji i kartografii		
1	PN-78/N-02206 Obliczenia geodezyjne. Rachunek krakowianowy. Teoria błędów. Rachunek wyrównawczy. Podstawowe nazwy, określenia i oznaczenia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
2	PN-86/N-02207 Geodezja. Terminologia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
3	PN-74/N-02210 Astronomia geodezyjna. Nazwy, określenia i oznaczenia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
4	PN-74/N-02211 Geodezyjne wyznaczanie przemieszczeń. Podstawowe nazwy i określenia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
5	PN-87/N-02212 Magnetyzm ziemski. Pomiar elementów pola. Terminologia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
6	PN-87/N-02213 Grawimetria geodezyjna. Terminologia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
7	PN-90/N-02214 Teledetekcja. Terminologia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
8	PN-91/N-02220 Fotogrametria. Terminologia i oznaczenia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
9	PN-87/N-02251 Geodezja. Osnowy geodezyjne. Terminologia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
10	PN-87/N-02260 Kartografia. Opracowanie map. Terminologia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
11	PN-84/N-02261 Kartografia. Reprodukcja kartograficzna. Terminologia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
12	PN-73/N-99310 Geodezja. Pomiary realizacyjne. Nazwy i określenia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy
13	PN-91/N-99252 Dalmierze elektroniczne. Terminologia	Wszystkie	Według p. 1.2 normy

1.7. Zakres prac geodezyjnych

Współczesne zadania geodezji obejmują pozyskiwanie, przetwarzanie, opracowywanie i udostępnianie informacji o wymiarach, kształcie i środowisku geograficznym Ziemi, utrzymywanie i doskonalenie ładu przestrzennego poprzez system informacji przestrzennej dotyczący obiektów identyfikowanych w odniesieniu do Ziemi oraz obsługa wznoszenia budowli i konstrukcji technicznych, a następnie zapewnienie ich bezpiecznej eksploatacji.

Pozyskiwanie informacji, będących przedmiotem zainteresowania geodezji, odbywa się: za pomocą bezpośrednich pomiarów terenowych, poprzez studium dokumentacji sporządzanych dla celów technicznych i prawnych, wykorzystanie zdjęć fotogrametrycz-

nych: naziemnych, lotniczych i satelitarnych. Gromadzenie danych odbywa się w bankach danych systemu informacji przestrzennej. Efektem przekształcenia pozyskanych informacji są najczęściej różnego rodzaju mapy, zawierające w zależności od założonej wcześniej treści (tematyki) różnorodne zestawy informacji.

Główne grupy prac geodezyjnych stanowią:

I. Pomiary osnów geodezyjnych i podstawowych osnów grawimetrycznych i magnetycznych;
II. Pomiary i opracowania szczegółowe: sytuacyjne i wysokościowe;
III. Pomiary i opracowania realizacyjne oraz obsługa inwestycji;
IV. Prace związane z katastrem nieruchomości (ewidencją gruntów i budynków);
V. Inne prace geodezyjne wykonywane dla określonych potrzeb gospodarczych.

Podział prac z zakresu **grupy I**, czyli pomiarów osnów obejmuje:

1. Pomiary astronomiczno-geodezyjne oraz satelitarne i opracowanie ich wyników;
2. Zakładanie osnów grawimetrycznych, magnetycznych, pomiary pola grawitacyjnego Ziemi i jej pola magnetycznego oraz opracowanie wyników tych pomiarów;
3. Zakładanie, pomiar i wyrównanie podstawowych i szczegółowych osnów geodezyjnych: poziomych i wysokościowych;
4. Prowadzenie geodezyjnego systemu informatycznego (baz danych) w zakresie wyżej wymienionych osnów;
5. Utrzymywanie w aktualności wyżej wymienionych osnów (przeglądy, konserwacje i odtwarzanie punktów osnów).

W ramach prac wchodzących do **grupy II**, czyli szczegółowych pomiarów sytuacyjnych i wysokościowych, możemy wyróżnić:

1) Zakładanie, pomiar i wyrównanie geodezyjnych osnów pomiarowych: poziomych i wysokościowych;
2) Pomiary szczegółów sytuacyjnych i ich opracowanie, a w tym: pomiar stanu zagospodarowania terenu (zabudowy, ogrodzeń, komunikacji), uzbrojenia terenu w urządzenia techniczne: nadziemne, naziemne i podziemne oraz innych obiektów SIT*;
3) Pomiary rzeźby terenu, tj. naturalnych i sztucznych form ukształtowania powierzchni terenu;
4) Opracowanie pomiarów sytuacyjnych ora z pomiarów rzeźby terenu ze szczególnym uwzględnieniem potrzeb SIT
5) Pomiary uzupełniające i prowadzenie baz danych o obiektach SIT;

Do prac związanych z **grupą III**, czyli pomiarami realizacyjnymi i obsługą inwestycji zaliczamy:

1) Przygotowanie map dla celów planowania i projektowania;
2) Zakładanie, pomiar i obliczenie osnów realizacyjnych;
3) Wyznaczanie w terenie położenia przestrzennego projektowanych budowli i konstrukcji inżynierskich;
4) Obsługę geodezyjna budowy i montażu budowli;

* SIT – skrót od określenia *System Informacji Terenowej*. Jest on systemem informacji przestrzennej stosowanym w Polsce (zob. ust. 15.8).

5) Geodezyjną inwentaryzację powykonawczą;
6) Pomiary przemieszczeń, odkształceń oraz opracowania wyników tych pomiarów.

Prace wykonywane w ramach **grupy IV** z zakresu ewidencji gruntów obejmują:
1. Ustalenie stanu stosunków własności i władania gruntami, budynkami i lokalami, w tym badania dokumentów określających stan prawny nieruchomości;
2. Techniczne prowadzenie rozgraniczeń, pomiar położenia punktów załamania granic gruntów i wznawianie punktów zaginionych, pomiar obrysów budynków, konturów użytków i konturów klasyfikacyjnych;
3. Pomiary i opracowania dla projektów podziałów i scaleń nieruchomości;
4. Prowadzenie systemu informatycznego katastru nieruchomości, w tym stała aktualizacja, konserwacja i udostępnianie danych w formie opisowej i kartograficznej;
5. Przekształcanie do postaci komputerowej systemów katastru nieruchomości, istniejących w postaci papierowych rejestrów i map.

Na zakres **grupy V**, obejmującej inne prace geodezyjne i kartograficzne dla określonych potrzeb gospodarczych, składają się:
1) Geodezyjne i kartograficzne opracowanie planów zagospodarowania przestrzennego;
2) Prace geodezyjne i kartograficzne związane z eksploatacją zakładów przemysłowych;
3) Prace z zakresu miernictwa górniczego;
4) Geodezyjne i kartograficzne prace urządzeniowo-rolne i urządzeniowo-leśne;
5) Prace geodezyjne związane z eksploatacją kolei i dróg publicznych;
6) Geodezyjne i kartograficzne prace związane z regulacją sieci wodnych i budownictwem hydrotechnicznym;
7) Pomiary i opracowania bezpośrednie i fotogrametryczne w dokumentacji budowli i budynków;
8) Prace geodezyjne na potrzeby drobnoskalowych kartograficznych opracowań fotogrametrycznych: lotniczych i satelitarnych itp.

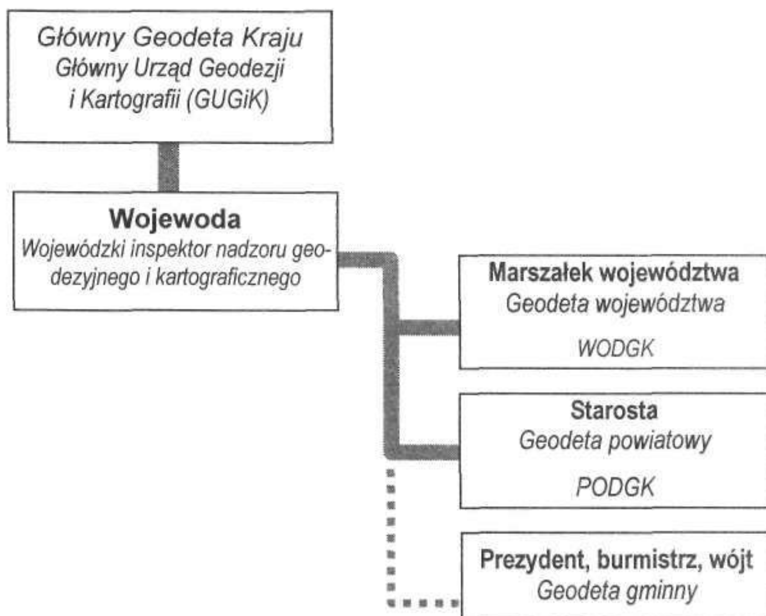
1.8. Organizacja służb geodezyjno-kartograficznych w Polsce

Szeroki zakres wykorzystania opracowań geodezyjnych w różnych dziedzinach powiązanych z nauką, kształtowaniem środowiska, porządkiem prawnym, gospodarką, obronnością, planowaniem przestrzennym, systemem informacji przestrzennej itp. powoduje konieczność koordynowania prac geodezyjnych oraz unormowania jakości, formy i jednolitości tych opracowań. Stwarza to potrzebę utworzenia służby geodezyjno-kartograficznej, której komórki ulokowane są na wszystkich szczeblach administracji państwowej i samorządowej.

Aktem prawnym regulującym organizację tej służby jest ustawa *Prawo Geodezyjne i Kartograficzne* z dnia 17 maja 1989 r. wraz z późniejszymi zmianami. Z ustawy tej wynikają następujące zadania dla organów służby geodezyjno-kartograficznej:
- prowadzenie sytemu informacji terenowej (SIT) w tym: katastru nieruchomości i uzbrojenia terenu,

- aktualizacja, udostępnianie i administrowanie zasobem geodezyjno-kartograficznym,
- kontrolowanie urzędów i instytucji w zakresie przestrzegania przepisów prawnych dotyczących geodezji i kartografii,

Organizację służby geodezyjno-kartograficznej pokazano schematycznie na rys. 1.14.



Rys. 1.14. Schemat organizacyjny służby geodezyjno-kartograficznej w Polsce

Zadania Głównego Geodety Kraju

Główny Geodeta Kraju wykonuje zadania określone w ustawie, a w szczególności:

1) pełni funkcję organu wyższego stopnia w rozumieniu kodeksu postępowania administracyjnego w stosunku do wojewódzkich inspektorów nadzoru geodezyjnego i kartograficznego, a także nadzoruje i kieruje ich działaniami,
2) prowadzi centralny zasób geodezyjny i kartograficzny oraz dysponuje środkami Centralnego Funduszu Gospodarki Zasobem Geodezyjnym i Kartograficznym,
3) zakłada podstawowe osnowy geodezyjne, grawimetryczne i magnetyczne,
4) opracowuje zasady przygotowania organizacyjno-technicznego katastru, uzgadnia usytuowanie projektowanych sieci uzbrojenia terenu oraz wytyczne powszechnej taksacji nieruchomości,
5) prowadzi państwowy rejestr granic Rzeczypospolitej Polskiej oraz granic administracyjnych województw,
6) rejestruje systemy informacji o terenie o znaczeniu ogólnopaństwowym i przechowuje ich kopie zabezpieczające oraz współpracuje z innymi resortami w zakładaniu i prowadzeniu geograficznych systemów informacyjnych,

7) współpracuje z wyspecjalizowanymi w dziedzinie geodezji i kartografii organizacjami międzynarodowymi, regionalnymi oraz agendami i urzędami innych krajów,
8) inicjuje prace naukowe i badawczo-rozwojowe w zakresie standardów organizacyjno-technicznych oraz zastosowania metod informatycznych, fotogrametrycznych i satelitarnych w dziedzinie geodezji i kartografii oraz w krajowym systemie informacji o terenie,
9) nadaje uprawnienia zawodowe w dziedzinie geodezji i kartografii, prowadzi rejestr osób uprawnionych oraz współpracuje z samorządami i organizacjami zawodowymi geodetów i kartografów,
10) prowadzi sprawy związane z ochroną tajemnicy państwowej i służbowej działalności geodezyjnej i kartograficznej.

Zadania wojewody

Wojewoda wykonuje zadania z zakresu ustawy *Prawo geodezyjne i kartograficzne* przy pomocy wojewódzkiego inspektora nadzoru geodezyjnego i kartograficznego jako kierownika inspekcji geodezyjnej i kartograficznej, wchodzącej w skład zespolonej administracji rządowej w województwie. Wojewódzki inspektor wykonuje w imieniu wojewody zadania i kompetencje Służby Geodezyjnej i Kartograficznej określone w ustawach i przepisach odrębnych.

Wojewódzki inspektor nadzoru geodezyjnego i kartograficznego wykonuje zadania nie zastrzeżone na rzecz organów administracji geodezyjnej i kartograficznej, a w szczególności kontroluje przestrzeganie i stosowanie przepisów ustawy, w tym między innymi:

1) zgodności wykonywania prac geodezyjnych i kartograficznych z przepisami ustawy,
2) posiadanie uprawnień zawodowych przez osoby wykonujące samodzielne funkcje w dziedzinie geodezji i kartografii,
3) kontroluje działania administracji geodezyjnej i kartograficznej,
4) współdziała z organami kontroli państwowej w zakresie właściwości nadzoru geodezyjnego i kartograficznego,
5) rejestruje lokalne systemy informacji o terenie oraz przechowuje kopie zabezpieczające bazy danych, w tym m.in. bazy danych ewidencji gruntów i budynków,
6) prowadzi rejestr granic administracyjnych gmin i powiatów.

W rozumieniu kodeksu postępowania administracyjnego wojewódzki inspektor nadzoru geodezyjnego i kartograficznego jest organem:

1) pierwszej instancji w sprawach określonych w ustawie,
2) wyższego stopnia w stosunku do organów administracji geodezyjnej i kartograficznej.

Zadania marszałka

Do zadań marszałka województwa należy w szczególności:

1) prowadzenie wojewódzkiego zasobu geodezyjnego i kartograficznego, a także dysponowanie środkami wojewódzkiego Funduszu Gospodarki Zasobem Geodezyjnym i Kartograficznym,

3) zlecanie wykonania i udostępnianie map topograficznych i tematycznych dla obszarów właściwych województw,
4) prowadzenie wojewódzkich baz danych wchodzących w skład krajowego systemu informacji o terenie.

Zadania starosty

Do zadań starosty należy w szczególności:

1) prowadzenie powiatowego zasobu geodezyjnego i kartograficznego, w tym ewidencji gruntów i budynków, gleboznawczej klasyfikacji gruntów i geodezyjnej ewidencji sieci uzbrojenia terenu oraz dysponowanie środkami powiatowego Funduszu Gospodarki Zasobem Geodezyjnym i Kartograficznym,
5) uzgadnianie usytuowania projektowanych sieci uzbrojenia terenu,
6) zakładanie osnów szczegółowych,
7) zakładanie i aktualizacja mapy zasadniczej,
8) przeprowadzanie powszechnej taksacji nieruchomości oraz opracowywanie i prowadzenie map i tabel taksacyjnych dotyczących nieruchomości,
9) ochrona znaków geodezyjnych, grawimetrycznych i magnetycznych,
10) prowadzenie powiatowych baz danych wchodzących w skład krajowego systemu informacji o terenie.

Starosta na wniosek gminy powierza wójtowi (burmistrzowi, prezydentowi miasta), w drodze porozumienia, prowadzenie spraw należących do jego zadań i kompetencji, w tym wydawanie decyzji administracyjnych po spełnieniu warunków: organizacyjnych, kadrowych i technicznych, które określi minister właściwy do spraw administracji publicznej w drodze rozporządzenia.

1.9. Ośrodki dokumentacji geodezyjno-kartograficznej

Jednym z najważniejszych zadań służby geodezyjno-kartograficznej jest prowadzenie ośrodków dokumentacji geodezyjno-kartograficznej (ODGK). Zasady działania ODGK zostały szczegółowo określone w instrukcji technicznej O-4. Zadania ODGK polegają na:

- prowadzeniu ewidencji, zabezpieczaniu i przechowywaniu dokumentów geodezyjnych i map,
- informowaniu o zasobie dokumentów posiadanym w danym ośrodku oraz innych jednostkach ODGK,
- aktualizacji bieżącej zasobu i jego poszczególnych składników,
- udostępnianiu dokumentacji zainteresowanym stronom,
- przyjmowaniu zleceń i zgłoszeń, ich ewidencjonowaniu, ustalaniu warunków technicznych i koordynowaniu robót geodezyjnych na danym terenie,
- dokonywaniu odbioru i oceny merytorycznej dokumentów powstałych w wyniku realizacji zleceń,
- ocenie stanu zasobów i wnioskowaniu wykonania aktualizacji jednorazowej, okresowej lub nowych pomiarów,
- wyłączanie z zasobu i niszczenie dokumentów nieaktualnych i nieprzydatnych.

Zależnie od terytorialnego zasięgu działania i roli ośrodków w państwie wyróżnia się następujące rodzaje ODGK:

1. Ośrodek centralny (CODGK), którego zasób dokumentów odnosi się do całego kraju.
2. Ośrodki wojewódzkie (WODGK), gromadzące dokumentację z obszaru danego województwa i pełniące rolę wiodącą w stosunku do ośrodków powiatowych.
3. Ośrodki powiatowe (PODGK) przekształcone z dawnych ośrodków rejonowych, działające na obszarze powiatów.

Gromadzone w danym ośrodku zbiory dokumentów geodezyjnych i map stanowią zasób tego ośrodka. Zasoby wszystkich ODGK w Polsce składają się na *Państwowy Zasób Geodezyjny i Kartograficzny* (PZGiK), stanowiący zbiór map oraz materiałów: fotogrametrycznych, teledetekcyjnych, rejestrów, wykazów, informatycznych baz danych, katalogów danych geodezyjnych i innych opracowań powstałych w wyniku wykonania prac geodezyjnych i kartograficznych.

W zależności od funkcji i sposobu wykorzystania zasób geodezyjny i kartograficzny dzieli się na następujące grupy:

1. *Zasób bazowy*, na który składają się źródłowe dokumenty geodezyjno-kartograficzne, stanowiące podstawę do wykonywania innych robót geodezyjno-kartograficznych.
2. *Zasób użytkowy* obejmujący dokumenty geodezyjno-kartograficzne służący do bezpośredniego udostępniania zainteresowanym stronom.
3. *Zasób przejściowy* złożony z dokumentów pomocniczych (np. szkiców, dzienników polowych itp.), przekazywanych do przechowania na czas określony.

1.10. Podział osnowy geodezyjnej

Zgodnie z instrukcją O-1/O-2 *osnowa geodezyjna* jest to usystematyzowany zbiór zastabilizowanych punktów, dla których określono matematycznie ich wzajemne położenie i dokładność usytuowania. Osnowa geodezyjna jest utworzona z poszczególnych *sieci geodezyjnych*, które są zbiorami punktów geodezyjnych stanowiących odrębną całość. Sieć charakteryzuje się jednolitością metod pomiarów i sposobów służących do określenia położenia punktów wchodzących w skład sieci, dzięki czemu są one zaliczane do tej samej klasy dokładnościowej.

Osnowy geodezyjne dzielą się na:

a) *osnowy pozioma*, dla której wzajemne położenie punktów określają ich współrzędne geodezyjne o znanych miarach błędności,
b) *osnowa wysokościowa*, dla której wysokości punktów zostały określone względem przyjętego poziomu odniesienia, zaś jej punktom oprócz wysokości przypisano także dokładność ich określenia.
c) *osnowa dwufunkcyjna*, której punkty mają znane położenie i wysokość, a więc spełniają równocześnie funkcje punktów osnowy poziomej i wysokościowej.

Ze względu na *rolę i znaczenie* dla prac geodezyjnych osnowę dzieli się na: podstawową, szczegółową i pomiarową. Podział ten jest odzwierciedleniem obowiązującej w geodezji znanej zasady: „od ogółu do szczegółu", polegającej w tym wypadku na kolejności nawiązania i wyrównania sieci oraz stopniowym zmniejszaniu się zasięgu, długości boków i dokładności poszczególnych rodzajów osnów.

Osnowy podstawowe tworzą sieci rozwiązywane równocześnie na obszarze całego kraju, charakteryzują się najwyższą dokładnością oraz określonym, równomiernym za-

gęszczeniem. Służą do celów naukowych, zadań związanych z obronnością kraju oraz nawiązania i wyrównania osnów szczegółowych w państwowym systemie odniesień przestrzennych.

Osnowy szczegółowe, stanowiące dalsze rozwinięcie osnowy podstawowej, służą do nawiązania i wyrównania osnów pomiarowych, zdjęć fotogrametrycznych i numerycznych modeli terenu w tym systemie.

Osnowy pomiarowe wykorzystuje się do oparcia na nich pomiarów sytuacyjnych i wysokościowych, opracowań i wyznaczeń szczegółowych, realizacyjnych, katastralnych oraz innych.

Osnowy: podstawowa i szczegółowa mają charakter osnowy trwałej, tzn. punkty tych osnów posiadają *stabilizację trwałą* wykonaną za pomocą znaków z trwałych materiałów takich jak: znak nacięty na litej skale, słup granitowy, żelbetowy, stalowy lub pal drewniany, impregnowany. *Stabilizacja nietrwała* (markowanie) stosowana dla osnowy pomiarowej polega na zaznaczeniu i utrwaleniu punktów tylko na okres prac pomiarowych. Zarówno osnowy poziome jak i wysokościowe składają się z *sieci geodezyjnych*.

Pod względem dokładności osnowę geodezyjną dzieli się na *klasy* oznaczane cyframi rzymskimi. Klasa jest cechą charakteryzującą dokładność określenia położenia punktu po wyrównaniu obserwacji. Podstawę klasyfikacji sieci geodezyjnej stanowią średnie błędy obserwacji po wyrównaniu i (lub) błędy położenia punktu po wyrównaniu, a czasem jeszcze inne dodatkowe kryteria.

Niekiedy dzieli się także sieci geodezyjne na *rzędy* określające kolejność włączania poszczególnych sieci do wyrównania. Podział osnowy na rzędy w znacznym stopniu upraszcza proces wyrównania sieci, jednak powoduje pewne zniekształcenie w wyznaczeniu położenia punktów i oceny dokładności, wynikające z założenia bezbłędności nawiązań, dlatego obecnie dąży się do prowadzenia wyrównania sieci osnów geodezyjnych w formie jednorzędowej.

Innymi czynnikami podziału osnów mogą być:

- cele zakładania osnów i ich zadania oraz sposób wykorzystywania,
- przyrządy i technologie stosowane do wyznaczania położenia punktów osnowy,
- zasięg terytorialny osnowy.

Ze względu na cele i zadania można podzielić osnowy na:

1. *Osnowy typowe*, które służą do oparcia najczęściej wykonywanych pomiarów geodezyjnych, te zaś z uwagi na możliwy zasięg dzielą się na:
   1.1. *Osnowy państwowe* obliczone na elipsoidzie odniesienia oraz w układzie współrzędnych lub wysokości obowiązującym na terenie całego kraju;
   1.2. *Osnowy lokalnego znaczenia*, obejmujące mniejszy obszar, obliczone w lokalnym układzie współrzędnych i dobranej lokalnie powierzchni odniesienia, której wysokość może być różna od zera*.
2. *Osnowy specjalne*, wykorzystywane do pomiarów z zakresu tzw. pomiarów specjalnych. Wyróżniamy tu następujące rodzaje osnów:
   2.1. *Osnowy realizacyjne*, służące do wynoszenia w teren opracowanych geodezyjnie projektów budynków, budowli i innych obiektów inżynierskich;

* Lokalne układy współrzędnych mogą być stosowane do 31 grudnia 2009 r.

2.2. *Osnowy inwentaryzacyjne*, zakładane dla pomiarów rejestrujących aktualny stan nowych obiektów np. budynków, armatury itp. w celu zaprowadzenia lub uzupełnienia ich ewidencji;
2.3. *Osnowy obserwacyjne*, przeznaczone do monitoringu obiektów naturalnych na powierzchni terenu (osuwisk) oraz antropogenicznych np. tam, mostów, wysokich kominów przemysłowych z punktu widzenia bezpieczeństwa ludzi i środowiska, w tym do obserwacji przemieszczeń oraz odkształceń tych obiektów.

Osnowy specjalne wskutek ich dostosowania do szczególnych zadań pomiarowych różnią się od osnów typowych geometrią, w tym szczególnie długościami boków, lokalizacją, sposobem stabilizacji i zagęszczeniem punktów. W pewnych przypadkach osnowy typowe mogą jednak spełniać funkcje osnów specjalnych.

Z punktu widzenia stosowanych technologii i przyrządów pomiarowych wykorzystywanych do określenia położenia punktów oraz celów badawczych osnowy dzielą się na:

1. *Osnowy grawimetryczne* wykorzystywane do pomiaru parametrów siły ciężkości: wartości, przyspieszenia oraz potencjału siły ciężkości w celu wyznaczenia powierzchni geoidy i jej odstępów od elipsoidy odniesienia;
2. *Klasyczne osnowy geodezyjne*, których elementami mierzonymi są kąty poziome lub kierunki, długości boków lub różnice wysokości;
3. *Osnowy satelitarne GPS* obejmujące punkty, na których podczas sesji pomiarowych zostały ustawione odbiorniki GPS przyjmujące sygnały pomiarowe emitowane przez sztuczne satelity Ziemi wyposażone w specjalną aparaturę umożliwiającą określanie położenia punktów naziemnych w oparciu o konstrukcję przestrzennego wcięcia liniowego;
4. *Osnowy fotogrametryczne* tworzone na podstawie obserwacji dokonywanych na zdjęciach fotograficznych i specjalnych: naziemnych, lotniczych i satelitarnych.

Połączenie technik: astronomicznej i geodezyjnej (np. triangulacji) umożliwia zakładanie sieci astronomiczno-geodezyjnych (SAG) stosowanych do niedawna dla realizacji osnów poziomych o najwyższej dokładności (kl. I).

Dla określenia współrzędnych punktów sieci pomiarowi polowemu podlegają jej elementy wyznaczone przez poszczególne punkty osnowy: kąty wierzchołkowe i długości boków, w ilości n nie mniejszej od ilości niewiadomych u, czyli ilości spostrzeżeń niezbędnych do rozwiązania zadania ($n > u$). W sieciach geodezyjnych wystąpią więc wtedy spostrzeżenia nadliczbowe, umożliwiające przeprowadzenie kontroli pomiaru i przeprowadzenie procesu wyrównania. Ich ilość: $n_n = n - u$ ma istotne znaczenie dla oceny jakości sieci i dokładności wyznaczenia współrzędnych jej punktów. Wyjątkowo do określania ostatecznych współrzędnych punktów wykorzystuje się konstrukcje jednoznacznie wyznaczalne, w których ilość obserwacji (spostrzeżeń) jest równa ilości niewiadomych ($n=u$) np. wcięcia pojedyncze lub ciągi poligonowe wiszące. Konstrukcje te powinny być stosowane w ostateczności, ponieważ przy braku obserwacji kontrolnych stwarzają niebezpieczeństwo trudnej do wykrycia omyłki w pomiarach lub obliczeniach, najczęściej jednak mają zastosowanie do obliczania współrzędnych przybliżonych we wstępnej fazie wyrównania sieci geodezyjnych.

1.11. Geodezyjna osnowa pozioma

1.11.1. Pozioma osnowa podstawowa

Poziomą osnowę geodezyjną tworzą utrwalone na powierzchni terenu lub płytko pod nią punkty o znanym położeniu, określonym za pomocą geodezyjnej techniki pomiarowej i obliczeniowej poprzez wyznaczenie ich geograficznych współrzędnych geodezyjnych B, L na elipsoidzie lub prostokątnych X, Y na płaszczyźnie odwzorowania. Współrzędne geodezyjne B, L są współrzędnymi pierwotnymi, natomiast współrzędne prostokątne X, Y mają charakter wtórny w stosunku do współrzędnych B, L.

Punkty, stanowiące klasyczną osnowę poziomą klasy I, są połączone liniami celowania w większe zespoły, tworząc sieci, czyli konstrukcje geometryczne, zakładane w celu obliczenia najbardziej prawdopodobnych wartości współrzędnych. Tego rodzaju wzajemnych powiązań nie mają punkty określane współcześnie za pomocą technologii GPS. *Osnowa podstawowa* jest przeznaczona do badania kształtu Ziemi i ruchów jej skorupy, realizacji zadań z zakresu obronności kraju oraz nawiązywania osnowy szczegółowej. Osnowa podstawowa jest osnową geodezyjną rozwiązywaną na obszarze całego państwa. Charakteryzuje się najwyższą dokładnością oraz najmniejszym zagęszczeniem i składa się z rzadko, lecz równomiernie rozmieszczonych punktów (1 punkt/60 km^2), tworzących możliwie najdłuższe boki. Jej wymaganą dokładność wyrażano do niedawna za pomocą średniego błędu względnego długości boku po wyrównaniu sieci, który zgodnie z poprzednią wersją instrukcji G-1 nie powinien przekraczać wartości $5 \cdot 10^{-6}$ (5 mm/km), zaś aktualnie według nowej instrukcji G-2 miarą dokładności osnowy podstawowej jest błąd położenia punktu po wyrównaniu $m_P \leqslant 0{,}05$ m.

Pomiary geodezyjne w sieciach podstawowych podlegają redukcji na geoidę (poziom morza), a następnie na obowiązującą elipsoidę. Dla punktów osnowy podstawowej wyznacza się geodezyjne współrzędne geograficzne B, L na powierzchni elipsoidy odniesienia. W celu wykorzystania punktów osnowy podstawowej do jej dalszego zagęszczenia osnową szczegółową należy w oparciu o przyjęte odwzorowanie przeliczyć współrzędne geograficzne B, L na współrzędne X, Y w układzie prostokątnym płaskim.

W ramach tradycyjnej technologii zakładania podstawowej osnowy poziomej orientacja sieci geodezyjnych była uzyskiwana jest dzięki tzw. *punktom Laplace'a*, na których dokonywano precyzyjnych pomiarów astronomiczno-geodezyjnych w celu wyznaczenia współrzędnych geograficznych φ, λ oraz azymutów – A boków znajdujących się przeważnie na końcach łańcuchów triangulacyjnych. Azymuty astronomiczne A pomierzone na punktach Laplace'a o współrzędnych B, L podlegały następnie redukcji do azymutów geodezyjnych – A_g wg tzw. *równania Laplace'a*:

$$A_g = A - (\lambda - L) \sin \varphi \tag{1.4}$$

Konieczność uniknięcia zbyt dużych rozbieżności pomiędzy powierzchniami geoidy i elipsoidy, wywołujących znaczne różnice współrzędnych astronomicznych i geodezyjnych, powoduje, że w niektórych państwach dopasowuje się te powierzchnie przez przesunięcie elipsoidy przyjmując, że w pewnym punkcie elipsoida odniesienia i geoida stykają się z sobą. Punkt ten nosi nazwę *punktu przyłożenia elipsoidy do geoidy*. W punkcie tym odchylenie pionu jest równe zero, co oznacza, że linia pionu i normalna do elipsoidy pokrywają się. Ponadto na elipsoidzie azymuty geodezyjne A_g kierunków wychodzących z punktu przyłożenia są równe azymutom astronomicznym A.

W Polsce w okresie międzywojennym i bezpośrednio po wojnie do r. 1952 stosowano elipsoidę Bessela* (a=6377397 m, b=6356078,963 m, $p={}^{1}/_{299,153}$) z punktem przyłożenia *Borowa Góra* (w obrębie obserwatorium astronomicznego koło Zegrza na płn.-wsch. od Warszawy), później wykorzystywano elipsoidę Krasowskiego**(a=6378245 m, b=6356863 m, $p={}^{1}/_{298,3}$) z punktem przyłożenia *Pulkowo* (w obrębie obserwatorium astronomicznego koło Sankt Petersburga) i orientacją określoną azymutem A_g na punkt o nazwie *Bugry*.

Zgodnie z cytowanym wcześniej rozporządzeniem R. M. z dn. 8.09.2000 r. „w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych" aktualnie obowiązujący jest system, w którym:

1) Geodezyjny układ odniesienia, zwany dalej "EUREF-89", jest rozszerzeniem europejskiego układu odniesienia ETRF na obszar Polski, w wyniku kampanii pomiarowej EUREF-POL 92, której rezultaty zostały zatwierdzone przez Podkomisję dla Europejskiego Układu Odniesienia (EUREF) Międzynarodowej Asocjacji Geodezji w 1994 r.
2) W EUREF-89 stosuje się Geodezyjny System Odniesienia 1980 (GRS 80), przyjęty na XVII Zgromadzeniu Generalnym Międzynarodowej Unii Geodezji i Geofizyki (MUGG) w Canberze, w grudniu 1979 r.

W okresie poprzedzającym wykorzystanie techniki GPS do zakładania podstawowej osnowy poziomej technologią stosowaną najczęściej do tego celu była *triangulacja*, będąca metodą wyznaczania współrzędnych punktów terenowych za pomocą układów trójkątów, w których dokładnie mierzy się wszystkie kąty oraz stosunkowo nieliczne długości boków stanowiących tzw. *bazy triangulacyjne*. Bazy o długościach wynoszących kilka-kilkanaście kilometrów mierzono bezpośrednio przy użyciu dwudziestoczterometrowych drutów inwarowych*** Jäderina lub pośrednio w tzw. rozwinięciach czworobocznych baz. Pomiar był niezwykle pracochłonny i obejmował wiele czynności, które na rozpoczynały się od osadzenia centrów bazowych. Następnie wzdłuż całej bazy należało wytyczyć przęsła – odcinki 24 m odmierzone taśmą i zamarkować ich końce drewnianymi palami. Dalej rozstawiano na wytyczonych punktach statywy ze wskaźnikami, na których na podstawie niwelacji geometrycznej wyznaczano poprawki ze względu na nachylenie każdego przęsła. Podczas pomiaru odległości na każdym przęśle ustawiano parę statywów bloczkowych, zaś między nimi za pomocą obciążników (10 kG) naciągane były druty inwarowe z podziałkami milimetrowymi, na których długość przęsła była wyznaczana wielokrotnie z dokładnością ±0,1 mm. Dla zwiększenia precyzji określenia odległości mierzono także temperaturę drutów, a nawet siłę i kierunek wiatru. Bazy były niekiedy powiązane geometrycznie z jednym bokiem sieci za pomocą rozwinięcia bazowego (rys. 1.15, 2.6).

Już ten pobieżny opis czynności związanych z wyznaczeniem długości baz triangulacyjnych wskazuje, że był to pomiar długotrwały, żmudny i wysoce kosztowny, pozwalał jednak na osiągnięcie bardzo wysokiej dokładności pomiaru liniowego, wyrażonej błędem względnym rzędu 10^{-6} (1 ppm), czyli ±1mm/km.

---

* Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) – astronom niemiecki. Wyznaczył w r. 1841 elementy elipsoidy ziemskiej.

** Fiedosij Krasowski (1878-1948) – geodeta rosyjski, który w r. 1940 wyznaczył elementy elipsoidy ziemskiej wykorzystywanej jako powierzchnia odniesienia w b. ZSSR i państwach b. Układu Warszawskiego.

*** Inwar jest stalą niskowęglową, stopem: żelaza (63,7%), niklu (35,8%) i 0,5% innych pierwiastków o bardzo niskim współczynniku rozszerzalności termicznej. Nazwa stopu pochodzi od słowa łacińskiego *invariabilis* – niezmienny.

Osnowa podstawowa zakładana na dużym obszarze metodą klasycznej triangulacji była czterorzędową siecią powierzchniową z równomiernie rozłożonymi punktami, tworzącymi przylegające do siebie trójkąty o kształcie zbliżonym do trójkąta równobocznego. Rząd pierwszy tworzyła wówczas sieć powierzchniowa lub wieńcowa złożona z trójkątów o bokach 25-50 km. Rząd drugi oparty na punktach I rzędu stanowiła sieć zagęszczająca o bokach 12-15 km, zaś rząd III – sieć trójkątów o bokach 6-9 km. Odpowiednie nasycenie danego obszaru punktami osnowy poziomej, potrzebne do nawiązania pomiarów szczegółowych, uzyskiwano poprzez dalsze zagęszczenie triangulacji siecią IV rzędu złożoną z trójkątów o bokach 2-5 km. Do wyznaczania położenia punktów tego rzędu oprócz nawiązanej sieci trójkątów często stosowano także wcięcia wielokrotne.

Wobec konieczności szybkiej odbudowy kraju po zniszczeniach II Wojny Światowej, niemal całkowitej dewastacji istniejącej wcześniej osnowy geodezyjnej, zmiany granic państwa oraz ze względów ekonomicznych zrezygnowano w Polsce z klasycznej czterorzędowej triangulacji. Założona po wojnie *sieć astronomiczno-geodezyjna* – SAG o najwyższej dokładności i bokach wynoszących średnio ok. 20 km miała na północnej części kraju charakter powierzchniowy, zaś na pozostałym obszarze – wieńcowy. Wieńce (rys. 1.14) z pustymi przestrzeniami wewnątrz były utworzone poprzez podwójne łańcuchy trójkątów, biegnące w kierunku południkowym i równoleżnikowym. Obszary pokryte siecią główną SAG i puste przestrzenie wewnątrz wieńców zostały zagęszczone *siecią wypełniającą* – SW o długości boków wynoszącej średnio 7 km. Sieci SAG i SW tworzą łącznie sieć triangulacyjną I klasy, dając zagęszczenie odpowiadające III rzędowi klasycznej sieci triangulacyjnej. Opisana koncepcja w porównaniu z rozwiązaniem klasycznym zapewniła istotne zmniejszenie kosztów i przyspieszenie prac związanych z założeniem podstawowej osnowy poziomej na całym terytorium kraju bez obniżenia jej dokładności.

Pod koniec lat osiemdziesiątych w sieci SAG przeliczanej i modernizowanej w okresie od r. 1957 do r. 1987 występowało 388 punktów, w tym 55 punktów Laplace'a zapewniających jej orientację oraz 163 bazy nadające sieci właściwą skalę. Sieć wypełniająca SW zawierała 5937 punktów. Jako stały punkt podczas wyrównania całej sieci osnowy podstawowej przyjęto wspomniany wcześniej punkt Borowa Góra.

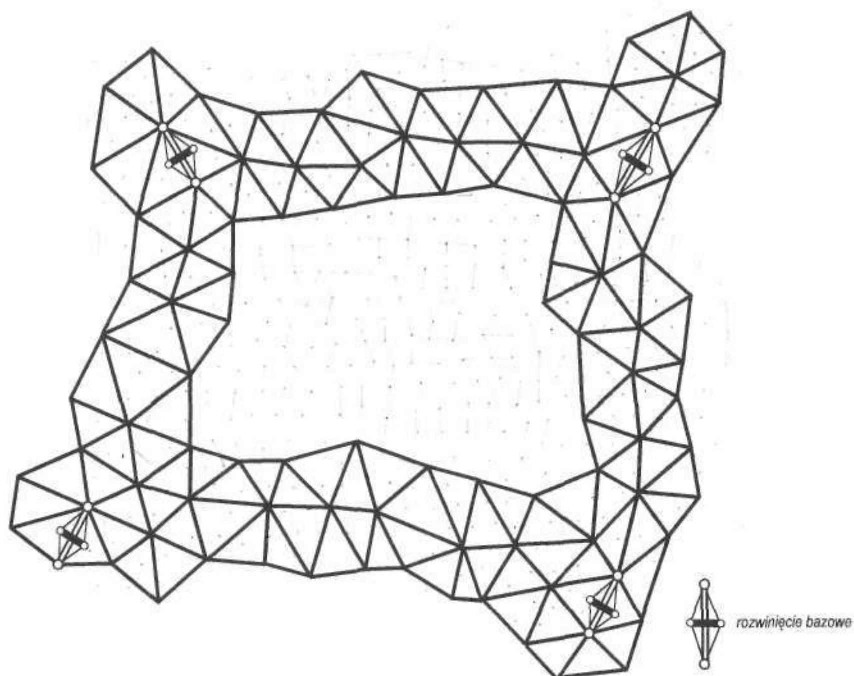
Dokładność sieci SAG i SW w Polsce charakteryzowały następujące wielkości:

Sieć SAG

- średni błąd położenia punktu: od $\pm 0,10$ m do $\pm 0,30$ m;
- średni błąd względny pojedynczego boku: od $0,8 \cdot 10^{-6}$ do $1,5 \cdot 10^{-6}$; maksymalnie $3,0 \cdot 10^{-6}$
- średni błąd kątów pomierzonych metodą Schreibera wynosił $\pm 0,54''$, maksymalnie $\pm 0,7''(2,2^{cc})$;
- średni błąd orientacji boku: $\pm 0,34''$;
- przeciętna długość boku sieci SAG wynosiła około 20 km.

Sieć SW

- średni błąd względny pojedynczego boku: od $2,2 \cdot 10^{-6}$ do $3,2 \cdot 10^{-6}$, maksymalnie $5,0 \cdot 10^{-6}$;
- średni błąd kątów pomierzonych metodą kątową – wypełniania horyzontu wynosił $\pm 0,74''$, zaś maksymalnie $\pm 1,2''$ $(3,7^{cc})$;
- średni błąd orientacji boku: $\pm 1,23''$;
- przeciętna długość boku sieci SW wynosiła około 7 km.



Rys. 1.15. Wieniec triangulacji głównej i sieć wypełniająca

Współczesne sposoby pomiarów odległości za pomocą dalmierzy elektromagnetycznych i technik satelitarnych pozwalają na szybkie, wygodne i dokładne pomiary liniowe, dzięki czemu sieci kątowe z nielicznymi bazami mogą być zastępowane bardziej optymalnymi sieciami kątowo-liniowymi i liniowymi. Na niezwykle precyzyjny pomiar dużych odległości, osiągający dokładność 1-2 cm dla linii o długości 5 000 km, pozwalają także metody laserowej geodezji satelitarnej. Największe możliwości w zakresie tworzenia osnowy podstawowej daje technologia GPS opisana skrótowo w ust. 2.6.

Powiązanie osnowy podstawowej znajdującej się na obszarze Polski z osnową europejską EUREF nastąpiło za pośrednictwem jej części EUREF-POL złożonej z 11 punktów (rys. 1.8), tworzących sieć rzędu zerowego. Jej dalsze zagęszczenie stanowi sieć POLREF (*Polish Reference Frame*), która pełni rolę sieci pierwszego rzędu złożonej z równomiernie rozmieszczonych na terenie kraju 348 punktów (rys. 1.16) o współrzędnych określonych techniką GPS, z błędem nie przekraczającym ±2 cm. Dokładność nowej osnowy jest więc znacznie wyższa od zakładanej wcześniej osnowy SAG. Długości boków sieci POLREF mieszczą się w granicach 20-25 km. Nowa osnowa stanowi sieć powierzchniową, precyzyjną i jednorodną spełniającą podwyższone wymogi dokładnościowe podane w nowej instrukcji O-1/O-2, według której średni błąd położenia punktu osnowy podstawowej po wyrównaniu sieci nie może przekraczać ±0,05 m.

Przyjmując dokładność osnów poziomych jako kryterium ich podziału na klasy osnowa podstawowa, stanowiąca w całości klasę I, obejmuje:

- sieć geodezyjną złożona z 11 punktów, pomierzona techniką satelitarną GPS, stanowiąca część europejskiej sieci EUREF na obszarze Polski (EUREF-POL), tworząca rząd „0”,

- sieć POLREF zawierającą 348 punktów, stanowiąca zagęszczenie sieci EUREF-POL, tworząca rząd „1",
- punkty istniejącej sieci astronomiczno-geodezyjnej (SAG) i sieci (SW).

W roku 1981 za pomocą komputera NOVA 840 dokonano pierwszego jednoczesnego, wspólnego wyrównania na elipsoidzie Krasowskiego sieci osnowy podstawowej określanej symbolem PPOG81 (skrót od podstawowej, powierzchniowej osnowy geodezyjnej). Sieć obejmowała łącznie 6555 punktów w tym: 546 punktów sieci astronomiczno-geodezyjnej SAG i 5937 punktów sieci SW oraz 72 punkty zagraniczne. Jako stały przyjęto punkt Borowa Góra.



Rys. 1.16. Sieć POLREF

W roku 1996 na zlecenie Departamentu Katastru, Geodezji i Kartografii MGPiB dokonano dwóch niezależnych wyrównań sieci poziomej kl. I w układzie „1992" odniesionego do elipsoidy GRS-80. Sieć zawierała 338 punktów nawiązania pochodzących głównie z sieci POLREF i 6877 punktów wyznaczanych pochodzących z sieci PPOG81, SAG i SW oraz śląskiej kątowo-liniowej sieci GOP–ROW. Do wyrównania wykorzystano dwa programy: SIEĆPOZ i GEONET (zob. ust. 10.6), uzyskując jednakowe wyniki. Około 95% punktów sieci odznacza się błędem położenia nie przekraczającym ±0,03 m[*].

Bardziej szczegółowo zagadnienia związane z osnową poziomą kl. I zostaną przedstawione w ramach wykładów z geodezji wyższej.

1.11.2. Pozioma osnowa szczegółowa

Szczegółowa osnowa pozioma, o znacznie krótszych bokach wynoszących w zależności od klasy osnowy od kilku kilometrów do kilkuset metrów, jest nawiązywana do osnowy podstawowej i stanowi jej zagęszczenie, wypełniając przestrzenie wewnątrz oczek sieci osnowy podstawowej. Punkty osnowy szczegółowej należą do klas: II i III. Osnowa ta jest głównie przeznaczona do:

- oparcia pomiarów sytuacyjno-wysokościowych dla wykonania map wielkoskalowych,
- nawiązywania i wyrównania osnowy pomiarowej,
- wykorzystanie osnowy szczegółowej do nawiązywania pomiarów sytuacyjnych: nowych, uzupełniających i realizacyjnych, związanych z przenoszeniem na grunt projektów inwestycyjnych.

---

[*] Powyższe informacje zaczerpnięto z artykułu W. Kozakiewicza „Wyrównanie pierwsza klasa"; Geodeta 2/98 (33).

Podstawowymi technologiami zakładania osnów szczegółowych były: triangulacja, trilateracja, poligonizacja, wcięcia wielokrotne oraz technologie kombinowane takie jak: poligonotriangulacja, triangulateracja, wzmocniona poligonizacja. Technologie te w coraz większym stopniu są wpierane przez pomiary satelitarne GPS.

Zgodnie z instrukcją O-1 kryterium podziału osnowy szczegółowej na dwie klasy: II, III stanowi średni błąd położenia punktów m_P po wyrównaniu względem osnowy wyższej klasy. Dla klasy II: $m_P \leq 0{,}05$ m, zaś dla klasy III: $m_P \leq 0{,}10$ m. Według nowej instrukcji G-2 (wydanie V z r. 2001) kryteria dokładnościowe osnowy szczegółowej w sieciach zakładanych przy użyciu systemów satelitarnych zostały zaostrzone i wynoszą: dla klasy II: $m_P \leq 0{,}03$ m, zaś dla klasy III: $m_P \leq 0{,}07$ m. Sieci osnowy szczegółowej zakładane przy użyciu systemów satelitarnych oznaczane są w zależności od klasy symbolami: I_S, II_S, III_S. W sieciach zakładanych metodami klasycznymi lub w sieciach klasycznych z obserwacjami wykonanymi przy użyciu systemów satelitarnych utrzymano dotychczasowe wymogi, tj. dopuszczalne błędy dla wspomnianych klas nie powinny przekroczyć wartości wynoszących odpowiednio ±0,05 m i ±0,10 m.

Oprócz wymagań dokładnościowych osnowa II klasy musi spełniać wymóg związany z konstrukcją geometryczną sieci, zgodnie z którym położenie każdego z punktów sieci musi być określone przez co najmniej dwa niezależne wyznaczenia. Do poziomej osnowy klasy III zalicza się tylko te sieci, które spełniają warunek nieprzekroczenia wymienionej wcześniej wartości błędu położenia punktu dla punktów o najmniej korzystnych warunkach wyznaczenia (np. punkty środkowe w ciągach poligonowych, skrajne punkty bloku aerotriangulacji itp.).

Na wybranych obszarach osnowa szczegółowa może być realizowana jako bardziej zagęszczona osnowa jednoklasowa, obejmująca tylko klasę II, na innych zaś jako osnowa dwuklasowa składająca się z sieci klasy II nawiązanych od punktów klasy I i sieci klasy III, nawiązanych do punktów klasy II. Wymagany standard zagęszczenia osnowy szczegółowej kl. II wynosi 1 punkt osnowy na:

- 0,8 km^2 dla terenów intensywnie zainwestowanych;
- 1-2 km^2 (średnio 1,5 km^2) dla terenów rolnych, w zależności od potrzeb zagospodarowania terenu;
- 12,0 km^2 dla zwartych kompleksów leśnych.

Osnowa II klasy może być zakładana jako powierzchniowa sieć kątowo-liniowa, sieć wektorowa GPS lub sieć mieszana (zintegrowana), zawierająca zarówno obserwacje klasyczne jak i satelitarne (wektory GPS). Przy zakładaniu osnowy poziomej III klasy najczęściej stosowane są najczęściej metody: poligonizacji, aerotriangulacji analitycznej, wcięć, satelitarne GPS.

Punkty osnowy szczegółowej II klasy powinny mieć wyznaczone wysokości metodą niwelacji geometrycznej lub trygonometrycznej z dokładnością wyrażoną błędem średnim nie większym niż 0,10 m.

Sprzęt wykorzystywany do obserwacji klasycznych w sieciach klasy II musi spełniać następujące wymagania:

- teodolit musi zapewniać pomiaru kierunku z błędem średnim nie przekraczającym $\pm 8^{cc}$,
- dalmierz elektrooptyczny ma umożliwić pomiar odległości d [km] z błędem standardowym nie większym niż $\pm(0{,}01 + 0{,}005 \cdot d)$.

Dla osnowy poziomej klasy III analogiczne parametry dokładnościowe wynoszą:

- błąd kierunku: $\leqslant 20^{cc}$
- błąd długości: $\leqslant (0{,}01 + 0{,}01 \cdot d)$.

W przypadku zastosowania metody wcięć określenie położenia punktów sieci III klasy powinno nastąpić w oparciu o co najmniej 3 elementy wyznaczające, nie dłuższe niż 5 km, przy czym kąt przecięcia ψ dowolnie wybranej pary prostych powinien mieścić się w przedziale od 45° do 135°. Stosunek dowolnych dwóch elementów wyznaczających pojedynczy punkt nie powinien przekraczać 4:1. Sprzęt pomiarowy należy wtedy dobierać w taki sposób, aby zapewniał dokładności zawarte w tabeli 1.1.

Tabela 1.1: Dokładność pomiaru elementów wyznaczających wcięć dla osnowy poziomej kl. III

Długość elementu wyznaczającego	Średni błąd pomiaru		Różnica między seriami (pomiary kątów)
	kąta	długości d	
0,4 – 1,5 km	$\leqslant 10''$ (30^{cc})	$5 \cdot 10^{-5} \cdot d$	$\leqslant 30^{cc}$
1,5 – 3,0 km	$\leqslant 5''$ (15^{cc})	$2{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot d$	$\leqslant 30^{cc}$
3,0 – 5,0 km	$\leqslant 3''$ (10^{cc})	$1{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot d$	$\leqslant 20^{cc}$

Osnowę szczegółową III klasy stanowi zbiór punktów, będących dalszym rozwinięciem osnowy poziomej kl. II. Osnowa ta służy do nawiązywania osnowy pomiarowej i wykonywania szczegółowych pomiarów geodezyjnych. Dla osnowy klasy III zagęszczenie punktów łącznie z punktami wyższych klas powinno wynosić:

- 1 punkt na 10-20 ha na terenach intensywnie zainwestowanych,
- 1 punkt na 20-50 ha na terenach rolnych w zależności od potrzeb zagospodarowania terenu,
- 1 punkt na 50-120 ha na terenach zwartych kompleksów leśnych.

Najczęściej stosowaną, technologią klasyczną zakładania sieci osnowy poziomej klasy III jest poligonizacja. Ciągi w sieciach poligonowych, zbliżone do równobocznych i prostoliniowych, powinny być obustronnie nawiązane kątowo i liniowo do punktów wyższej klasy lub punktów węzłowych. Długość pojedynczego ciągu nie może przekraczać:

- 4,5 km dla ciągów nawiązanych obustronnie do punktów osnowy wyższej klasy,
- 3,0 km dla ciągów nawiązanych do punktów węzłowych sieci poligonowej.

Dla wzmocnienia konstrukcji sieci należy dokonywać tzw. *nawiązań bocznych* np. mierząc kierunki na znane punkty położone na wysokich budowlach oraz dążyć do skracania długości ciągów poprzez zwiększanie liczby punktów węzłowych.

1.11.3. Pozioma osnowa pomiarowa

Do roku 2002 zasady zakładania osnowy pomiarowej były regulowane wymogami zawartymi w Instrukcji Technicznej G-4 pt. „Pomiary sytuacyjne i wysokościowe" wydanej r. 1979. W r. 2002 wprowadzono nowe wydanie tej instrukcji (wyd. IV - zmienione), zawierające w porównaniu z poprzednią edycją istotne zmiany, streszczone w niżej podanych informacjach.

Osnowa pomiarowa nie podlega podziałowi na klasy i stanowi rozwinięcie osnowy szczegółowej, zaś dokładność, stopień zagęszczenia i sposób rozmieszczenia punktów osnowy pomiarowej dostosowuje się do konkretnych zadań geodezyjno-kartograficznych i przyjętej technologii ich realizacji. Spełnia ona zadania doraźne, toteż ma charakter osnowy nietrwałej (tymczasowej), jednak w uzasadnionych przypadkach, gdy na danym obszarze nie ma dostatecznego zagęszczenia osnowy szczegółowej, wtedy punkty osnowy

pomiarowej mogą być stabilizowane w sposób trwały. Dotyczy to w szczególności terenów o znacznym stopniu zainwestowania: istniejącego lub przewidywanego.

Zgodnie z nową instrukcją G-4 pomiarowa osnowa sytuacyjna jest osnową jednorzędową, wyrównywaną ściśle, z obliczeniem błędów położenia punktów. Z tego względu niedopuszczalne jest stosowanie konstrukcji jednoznacznie wyznaczalnych, z wyjątkiem ciągów nawiązanych jednopunktowo (wiszących). Ciąg wiszący nie może zawierać więcej niż dwa boki i może być wyjątkowo stosowany wtedy, gdy warunki terenowe nie pozwalają na obustronne nawiązanie ciągu.

W zależności od potrzeb, przeznaczenia i posiadanego sprzętu do zakładania osnowy pomiarowej mogą być stosowane różne technologie, jednak ich wspólną cechą powinno być zachowanie dokładności wyrażonej poprzez średni błąd położenia punktu m_P względem punktów nawiązania, nie większy niż 0,10 m (dla najmniej dokładnego punktu pomiarowej osnowy sytuacyjnej). Zalecanymi sposobami zakładania osnowy pomiarowej są: ciągi kątowo-liniowe, wcięcia (kątowe, liniowe, kombinowane), sieci modularne, punkty określone techniką GPS, obserwacje mieszane (np. GPS i wcięcia), punkty wyznaczone fotogrametrycznie metodą aerotriangulacji.

Zgodnie z nową instrukcją G-4 (§8 p. 3), przy stosowaniu innych niż GPS metod budowy osnowy sytuacyjnej, należy spełnić następujące wymagania:

1) pomiarowa osnowa sytuacyjna musi być dowiązana do punktów osnowy klasy III lub wyższej,
2) punkty wcinane muszą stanowić integralny składnik całej sieci osnowy pomiarowej, a więc nie mogą być opierane na punktach wcześniej wyrównanej osnowy pomiarowej i obliczane jako punkty drugiego rzędu,
3) odległości pomiędzy sąsiednimi punktami osnowy pomiarowej (długości boków) powinny być zawarte w przedziale od 50 m do 400 m, zaś stosunek dwóch przyległych boków nie może być mniejszy niż 1:4.
4) teodolit użyty do pomiaru kątów powinien charakteryzować się średnim błędem pomiaru kierunku $m_\alpha \leq 6''$ (20^{cc}),
5) kąty mierzy się w jednym poczecie, zaś podczas pomiaru teodolitem optycznym z analogowym urządzeniem odczytowym należy między półpoczetami zmieniać orientację limbusa,
6) dalmierz użyty do wyznaczania długości boków osnowy powinien charakteryzować się błędem pomiaru odległości nie większym niż 0,005 + 3 mm/km, zaś długości trzeba mierzyć w obu kierunkach (tam i z powrotem),
7) dla osnowy pomiarowej na małym obszarze dopuszczalne błędy kierunku i odległości mogą być zwiększone, pod warunkiem nieprzekroczenia błędu położenia punktu tj. $m_P \leq 0,10$ m.

Każdy punkt osnowy pomiarowej powinien być powiązany przynajmniej z dwoma punktami sąsiednimi osnowy pomiarowej lub szczegółowej, zaś pomiędzy punktami należy zachować dobrą widoczność sygnałów celowniczych.

Według omawianego wydania instrukcji G-4 linie pomiarowe zakładane dla zdjęcia szczegółów metodą ortogonalną nie stanowią części składowej osnowy pomiarowej, która obejmuje tylko konstrukcje wymienione wcześniej. Linie te powinny przebiegać jak najbliżej zdejmowanych szczegółów sytuacyjnych. Maksymalna wartość tej odległości ta jest ograniczona dopuszczalną długością rzędnej (prostopadłej), zależną od grupy zdejmowanych szczegółów (tabela 1.2). Dla pomiaru szczegółów II i III grupy moż-

na opierać linię na trwałych szczegółach I grupy, zaś dopuszczalne długości rzędnych mogą być zwiększone o połowę (50%) pod warunkiem dokonania pomiarów sprawdzających w postaci miar kontrolnych takich jak: czołówki, miary przekątne, przecięcia, przedłużenia, odległości kontrolne pomiędzy punktami sytuacyjnymi.

Punktami oparcia dla linii pomiarowych mogą być:
- punkty osnowy szczegółowej,
- punkty osnowy pomiarowej,
- punkty pośrednie na bokach wyżej wymienionych osnów.

Tabela 1.2. Dopuszczalne rzędne i dokładność odczytu miar szczegółów

Grupa szczegółów	Dopuszczalna rzędna	Dokładność odczytu
I	25 m	0,01 m
II	50 m	0,05 m
III	70 m	0,10 m

Punkty te należy wyznaczyć na bokach osnowy za pomocą teodolitu, zastabilizować nietrwale i obliczyć ich współrzędne. Same linie pomiarowe dla potrzeb zdjęcia ortogonalnego należy przetyczyć za pomocą instrumentu kątomierczego o powiększeniu lunety min. 16× na odcinki pomiędzy punktami pośrednimi nie dłuższe niż 100 m. W zasadzie linie pomiarowe mogą tworzyć tylko jeden rząd, jednak w trudnych warunkach terenowych (np. przy gęstej zabudowie) dopuszcza się utworzenie linii pomiarowych II rzędu. Linia pomiarowa jest linią II rzędu wtedy, gdy przynajmniej jeden z jej punktów oparcia znajduje się na linii pomiarowej I rzędu. W razie potrzeby linię pomiarową można przedłużyć o odcinek nie większy niż połowa jej długości i zarazem nie więcej niż 200 m. Punkt końcowy przedłużenia należy wytyczyć teodolitem w dwóch położeniach lunety.

Długości linii pomiarowych nie mogą przekraczać:
- 400 m na terenach zurbanizowanych,
- 600 m na terenach rolno-leśnych.

Długości te należy mierzyć dwukrotnie, w tym przynajmniej raz przy zastosowaniu metody użytej do pomiaru długości w osnowie pomiarowej. Odchyłka f_L pomiędzy pierwszym pomiarem bezpośrednim a długością obliczoną ze współrzędnych nie może przekroczyć wartości $f_{L\,max} = \pm(7\text{ cm} + 5\text{ cm/km})$. Drugi pomiar nie powinien różnić się od pomiaru pierwszego o większą wartość niż podwójna odchyłka $f_{L\,max}$.

Tabela 1.3. Wymagania dla metody biegunowej zdjęcia szczegółów

Grupa szczegółów	Maksymalna długość celowej	Dopuszczalna długość celowej	Średni błąd pomiaru odległości
I	160 m	podwójna długość głównej celowej orientacji stanowiska	≤0,07 m
II	400 m	poczwórna długość głównej celowej orientacji stanowiska	≤0,20 m
III	600 m		≤0,35 m

Zdjęcie sytuacyjne m e t o d ą b i e g u n o w ą jest wykonywane ze stanowisk, będących punktami osnowy szczegółowej i pomiarowej oraz punktami pośrednimi wytyczonymi na bokach tych osnów. Na każdym stanowisku należy dokonać orientacji na co najmniej dwa punkty osnów: dalszy – główny i bliższy – kontrolny. Na zagęszczenie stano-

wisk pomiaru biegunowego wpływa grupa dokładnościowa szczegółów i związana z nią maksymalna długość celowej. Pomiar szczegółów zaliczanych do I grupy dokładnościowej musi być sprawdzany za pomocą miar kontrolnych.

1.12. Geodezyjna osnowa wysokościowa

Osnowa wysokościowa jest to zbiór punktów, których wysokości zostały określone względem przyjętego poziomu odniesienia, zaś wysokościom tym przypisano średni błąd ich wyznaczenia.

Podobnie jak osnowa pozioma również osnowa wysokościowa dzieli się na osnowę: podstawową, szczegółową i pomiarową. Osnowa podstawowa i szczegółowa podzielona jest na cztery *klasy* oznaczane cyframi rzymskimi: I-IV, natomiast punktów osnowy pomiarowej odrębnie nie klasyfikuje się. Zgodnie z instrukcją O-1 podstawowa osnowa wysokościowa służy do nawiązania osnowy szczegółowej i do celów badawczych. Składa się z punktów niwelacji precyzyjnej I i II klasy i jest wyrównywana z uwzględnieniem (redukcjami) nierówności powierzchni ekwipotencjalnej przyspieszenia siły ciężkości. Redukcje te określa się na podstawie pomiarów grawimetrycznych. W skład niwelacji precyzyjnej I klasy wchodzą punkty fundamentalne i wiekowe. Pozostałe standardowe cechy sieci geodezyjnych osnów wysokościowych zestawiono w tabeli 1.4. Osnowę podstawową i szczegółową tworzą sieci jednorzędowe, nawiązane do przynajmniej trzech punktów sieci wyższych klas.

Tabela 1.4. Wymagania dokładnościowe dla osnowy wysokościowej

Klasa i nazwa osnowy	Klasa punktów nawiązania	Średnia długość linii niwelacyjnej	Średnia długość linii w terenie uprzemysłowionym	Średni błąd niwelacji po wyrównaniu [mm/km]	Średni błąd wysokości punktu po wyrównaniu
I podstawowa	–	50 km	–	≤ ±1 mm/km	
II podstawowa	kl. I	25 km	8 km	≤ ±2 mm/km	
III szczegółowa	kl. I i II	18 km	6 km	≤ ±4 mm/km	≤±10 mm
IV szczegółowa	kl. I–III	–	–	≤ ±10 mm/km	≤±20mm
pomiarowa	kl. I–IV	–	–	≤ ±20 mm/km	≤±100mm

Elementami konstrukcyjnymi sieci wysokościowych są:

a) *poligony* niwelacyjne zamknięte lub otwarte, utworzone z linii (ciągów) niwelacyjnych,
b) *linie* (*ciągi*) niwelacyjne, utworzone z odcinków niwelacyjnych, łączące punkty węzłowe sieci lub punkty węzłowe z punktami nawiązania,
c) *odcinki* niwelacyjne, łączące dwa sąsiednie znaki linii niwelacyjnej.

Sieci niższych klas są zakładane w obrębie poligonów niwelacyjnych sieci klas wyższych, stanowiąc dalsze zagęszczenie osnowy wysokościowej. Punkty osnowy podstawowej są w przybliżeniu równomiernie rozmieszczone na obszarze całego kraju, natomiast zagęszczenie punktów osnowy szczegółowej jest zróżnicowane w zależności od stopnia zagospodarowania terenu.

Wysokościową osnowę szczegółową zakłada się w celu:

- obsługi geodezyjnej inwestycji przemysłowych i komunalnych,

- pomiaru elementów naziemnych i podziemnych sieci uzbrojenia terenu,
- pomiaru budowli i urządzeń technicznych o konstrukcji trwałej oraz budowli ziemnych i podziemnych,
- oparcia wysokościowej osnowy pomiarowej przy pomiarze rzeźby terenu metodami niwelacji powierzchniowej,
- oparcia wysokościowej osnowy fotogrametrycznej i topograficznej,
- potrzeb wykonywania innych pomiarów wymagających punktów nawiązania wyznaczonych z dokładnością niwelacji III lub IV klasy.

Punkty wysokościowej osnowy podstawowej i szczegółowej oprócz wysokości powinny także mieć określone współrzędne *X*, *Y* z dokładnością odpowiadającą punktom szczegółów sytuacyjnych I grupy dokładnościowej.

Pomiarowa osnowa wysokościowa jest zakładana doraźnie, dla oparcia konkretnych zadań niwelacyjnych. Stanowi ona dalsze zagęszczenie osnowy szczegółowej i jako osnowa jednorodna nie podlega podziałowi na klasy i rzędy. Punktami jej nawiązania są punkty sieci wysokościowej osnowy podstawowej i szczegółowej (klas I – IV). Punktów osnowy pomiarowej na ogół nie stabilizuje się trwale, jednak w terenach o znacznym stopniu zainwestowania stabilizacja taka jest zalecana (instr. G-4 § 12) lub należy wykorzystać stabilizację innych punktów, sporządzając przy tym opisy topograficzne punktów. Średni błąd niwelacji na 1 km (po wyrównaniu) nie powinien przekraczać wartości 20 mm, zaś średni błąd wysokości punktu nie powinien przekraczać 0,10 m ($m_H \leq 0{,}10$ m). W przypadku zastosowania do założenia osnowy pomiarowej innej technologii niż niwelacja geometryczna dopuszczalny błąd wysokości punktu musi spełnić warunek: $m_H \leq 0{,}20$ m. Do technologii tych należą w szczególności: niwelacja trygonometryczna, niwelacja przy użyciu systemów satelitarnych.

Wysokościowa osnowa pomiarowa ma być osnową jednorzędową, wyrównywaną ściśle, z określeniem średnich błędów wysokości punktów. Może być natomiast siecią wielowęzłową. Nie dopuszcza się stosowania ciągów niwelacyjnych wiszących (otwartych, nawiązanych jednopunktowo). Zalecanymi metodami pomiaru są tu: niwelacja geometryczna i metoda różnicowa GPS (DGPS).

Zakładana jest także *osnowa dwufunkcyjna*, której punkty są jednocześnie punktami osnowy sytuacyjnej i wysokościowej. Położenie sytuacyjne i wysokość punktu określane są oddzielnie, toteż oba systemy osnowy w ramach pojedynczego punktu klasyfikowane są niezależnie od siebie.

ROZDZIAŁ 2: Technologie stosowane do zakładania osnowy geodezyjnej

A. TECHNOLOGIE ZAKŁADANIA OSNÓW POZIOMYCH

2.1. Wiadomości ogólne

Technologia zakładania osnowy stanowi całokształt metod i środków zastosowanych w celu uzyskania odpowiedniego nasycenia wybranego obszaru zastabilizowanymi punktami o znanym położeniu i określonej dokładności oraz sporządzenia niezbędnej dokumentacji technicznej prac geodezyjnych związanych z tym procesem. W zależności od wymagań dokładnościowych, uwarunkowanych znaczeniem i klasą projektowanej sieci, zakładanie geodezyjnych osnów poziomych może być wykonywane przy użyciu różnych technologii. Współcześnie do realizacji osnowy podstawowej i szczegółowej najczęściej stosuje się: bezpośrednie pomiary geodezyjne, astronomiczno-geodezyjne i grawimetryczne, metody fotogrametryczne (aerotriangulacja) oraz pomiary satelitarne, obecnie realizowane najczęściej techniką GPS.

Klasycznymi technologiami geodezyjnymi stosowanymi dotychczas do zakładania podstawowej osnowy poziomej są: triangulacja, trilateracja i tworzenie nieregularnych sieci kątowo-liniowych. Technologia triangulacji prowadzi do powstania sieci kątowych, natomiast trilateracja – do sieci liniowych. W chwili obecnej obie te technologie praktycznie nie są już stosowane.

Sieć kątowa jest zespołem punktów geodezyjnych, wśród których występują co najmniej dwa punkty o znanych współrzędnych (punkty znane), zaś dla określenia współrzędnych pozostałych p punktów (punktów wyznaczanych lub szukanych) zmierzono więcej niż $2p$ kątów, charakteryzujących wzajemne położenie punktów sieci.

Siecią liniową nazywamy zespół punktów geodezyjnych, zawierający przynajmniej jeden punkt znany i dokładny azymut jednego z boków lub dwa punkty znane, w którym do określenia współrzędnych p punktów wyznaczanych (szukanych) zmierzono więcej niż $2p - 1$ lub $2p$ długości odcinków charakteryzujących wzajemne położenie punktów danej sieci.

Sieć kątowo-liniowa (kątowo-długościowa) stanowi zespół punktów geodezyjnych zawierający przynajmniej jeden punkt znany i azymut jednego z boków lub dwa punkty znane, w którym do wyznaczenia położenia p punktów szukanych pomierzono więcej niż $2p - 1$ lub $2p$ elementów geometrycznych, wśród których znajdują się zarówno kąty jak i długości boków.

Do wykonania poziomej osnowy szczegółowej za pomocą bezpośrednich pomiarów geodezyjnych oprócz wcześniej wymienionych technologii stosuje się przede wszystkim poligonizację i wcięcia wielokrotne.

Typowymi technologiami stosowanymi aktualnie do zakładania osnowy pomiarowej są: poligonizacja w postaci sieci i ciągów poligonowych, zwanych ciągami sytuacyjnymi, wcięcia do określania położenia pojedynczych punktów i ich grup, sieci mieszane (GPS i pomiary klasyczne), sieci kątowo-liniowe, sieci modularne i pomiary GPS.

Bezpośrednie pomiary geodezyjne i ich opracowanie wykonywane w ramach tych samych technologii, lecz stosowanych w sieciach o różnej dokładności, przebiegają podobnie, jednak w miarę obniżania klasy osnowy poszczególne etapy prac ulegają znacz-

nemu uproszczeniu lub nawet pominięciu. W zależności od klasy osnowy wymiary podobnych elementów geometrycznych sieci tj. boków, kątów i figur geometrycznych (trójkątów, wieloboków) ulegają zmianom. Zmienia się również dokładność pomiarów tych elementów, sposoby stabilizacji punktów i metod analitycznego opracowania wyników pomiarów.

Proces zakładania geodezyjnych osnów podstawowych i szczegółowych za pomocą pomiarów bezpośrednich obejmuje następujące etapy:

1) opracowanie założeń projektowych na mapie topograficznej w oparciu o ustalone wcześniej parametry techniczne sieci i analizę zebranych materiałów geodezyjno-kartograficznych;
2) wywiad terenowy, którego celem jest weryfikacja założeń projektowych i wskazanie sposobów utrwalenia punktów oraz ich ostatecznej lokalizacji;
3) projekt techniczny ustalający definitywnie konstrukcję sieci, nawiązanie, technologię jej założenia, lokalizację oraz utrwalenie jej punktów, zawierający opis sieci i mapę z naniesionymi punktami i elementami geometrycznymi sieci;
4) realizacja projektu w terenie, obejmująca stabilizację i sygnalizację znaków geodezyjnych;
5) pomiar elementów geometrycznych sieci;
6) opracowanie wyników pomiaru sieci, na które składają się: wstępna analiza dokładności, wyrównanie sieci i obliczenie współrzędnych jej punktów, ocena dokładności sieci po wyrównaniu;
7) skompletowanie dokumentacji technicznej z zakładania osnowy i rozdzielenie jej na poszczególne grupy funkcjonalne.

Dla osnów pomiarowych procedura ta ulega znacznemu uproszczeniu, ponieważ osnowę pomiarową można projektować bezpośrednio w terenie, a ponadto nie zawsze jest wymagana trwała stabilizacja jej punktów. Ze względu na niższą dokładność tej osnowy, można też stosować mniej dokładne metody pomiaru.

2.2. Triangulacja

2.2.1. Wiadomości wstępne

Jak wspomniano już wcześniej, triangulacja (trójkątowanie) stanowi sposób wyznaczania położenia stosunkowo odległych punktów osnowy poziomej tworzących sieć przylegających do siebie trójkątów. Wierzchołki trójkątów sieci triangulacyjnej są utrwalonymi w terenie punktami geodezyjnymi. Pod pojęciem „triangulacja" rozumiemy więc zarówno technologię zakładania poziomej osnowy geodezyjnej, jak i metodę konstruowania sieci. Wzajemne położenie punktów tworzących sieć trójkątów określane jest na podstawie pomiaru kątów wierzchołkowych tych trójkątów i co najmniej jednego boku wyjściowego, stanowiącego tzw. *bazę triangulacyjną*, niezbędną do nadania sieci właściwej skali. Najważniejszą zaletą triangulacji jest oparcie konstrukcji sieci na trójkącie – najprostszej figurze geometrycznej, łatwej do wyznaczenia na podstawie trzech elementów, spośród których przynajmniej jeden musi być liniowy.

Za twórcę triangulacji uważany jest Holender Willebrord Snel van Roijen (1580-1626), zwany z łacińska Snelliusem. Dla dokonania pomiaru dużej odległości (Alkmaar – Bergen) założył on łańcuch przylegających do siebie trójkątów, w którym każdy wewnętrzny trójkąt łańcucha miał bok wspólny z dwoma sąsiednimi trójkątami. Na obu koń-

cach łańcucha znajdowała się baza, zaś kąty zmierzono instrumentem przeziernikowym. Ze względu na prymitywne przyrządy do pomiaru kątów i baz wynik nie był zbyt dokładny (błąd wyznaczonej odległości wynosił 3,2%), niemniej sama metoda stanowiła istotny przełom w stosowanych wcześniej sposobach wyznaczania dużych długości.

W celu określenia długości *e* (rys. 2.1) pomiędzy punktami *5*, *6*, należy pomierzyć długość boku *1-2*, czyli bazę *a*, zaś w każdym trójkącie przynajmniej dwa kąty np. kąty: α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, α_8. Dla uzyskania obserwacji nadliczbowych można także zmierzyć kąty: β_1, β_2, β_3, β_4.

Na podstawie twierdzenia sinusów w poszczególnych trójkątach zapiszemy:

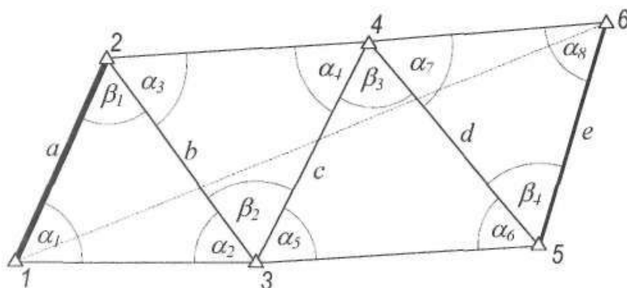
$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1};\ \frac{b}{c}=\frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_3};\ \frac{c}{d}=\frac{\sin\alpha_6}{\sin\alpha_5};\ \frac{d}{e}=\frac{\sin\alpha_8}{\sin\alpha_7},$$

skąd:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{e}=\frac{a}{e}=\frac{\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_4\cdot\sin\alpha_6\cdot\sin\alpha_8}{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_3\cdot\sin\alpha_5\cdot\sin\alpha_7}$$

Długość końcowego boku *e* łańcucha trójkątów wyniesie więc:

$$e=a\cdot\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_3\cdot\sin\alpha_5\cdot\sin\alpha_7}{\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_4\cdot\sin\alpha_6\cdot\sin\alpha_8}$$



Rys. 2.1. Określenie odległości za pomocą triangulacji

W celu określenia odległości między niesąsiednimi punktami np. *1-6* (rys. 2.1) należy obliczyć współrzędne punktów sieci w dowolnym układzie, do czego niezbędne jest przyjęcie azymutu boku wyjściowego *a* i znajomość jego długości oraz współrzędnych jednego z punktów sieci, najlepiej punktu *1*. Pozwala to na wyznaczenie azymutów i długości wszystkich pozostałych boków sieci, a następnie współrzędnych prostokątnych, płaskich *X*, *Y* punktów wyznaczanych. Nawiązanie sieci przynajmniej do dwóch punktów osnowy wyższej klasy pozwala na obliczenie sieci w układzie współrzędnych punktów nawiązania. Obliczenie i wyrównanie sieci triangulacyjnych powinno być wykonane metodą ścisłą: pośredniczącą lub zawarunkowaną (zob. rozdz. 8, 10).

Triangulacja jako trygonometryczna metoda wyznaczania współrzędnych punktów, odległości i badania kształtu Ziemi stosowana jest do dnia dzisiejszego, chociaż obecnie coraz częściej jest zastępowana przez sieci liniowe i kątowo-liniowe oraz znacznie tańsze i dokładniejsze pomiary satelitarne GPS.

Forma sieci zależy od wzajemnej konfiguracji przylegających do siebie trójkątów. W sieciach triangulacyjnych można wyróżnić szereg typowych układów geometrycznych, do których zaliczamy: pojedynczy trójkąt, czworobok geodezyjny, sieć wachlarzowatą (promienistą), łańcuch trójkątów, układ centralny, sieć powierzchniową i wieńcową.

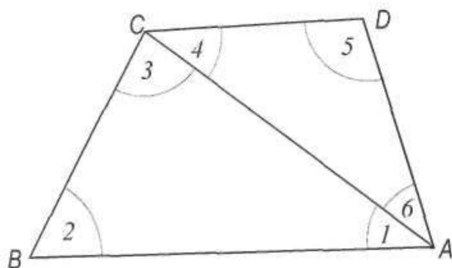
W pewnych przypadkach technologie i układy geometryczne mogą być również stosowane samodzielnie w charakterze *sieci niezależnych*, czyli nie dowiązanych do punktów osnowy państwowej. Sieci niezależne są często zakładane jako osnowy dużych zakładów przemysłowych i większych miast oraz do geodezyjnej obsługi inwestycji, takich jak tunele, trasy komunikacyjne, zapory wodne itp., wymagających wysokiej dokładności pomiaru, a która może być obniżana przez wpływy błędów punktów nawiązania. Innymi zaletami sieci niezależnych, zakładanych na małych obszarach, jest możliwość uznania ich za płaskie, co wiąże się z brakiem konieczności stosowania redukcji odwzorowawczych lub innych redukcji zniekształcających współrzędne *X, Y* punktów w dużych sieciach nawiązanych.

2.2.2. Czworobok geodezyjny

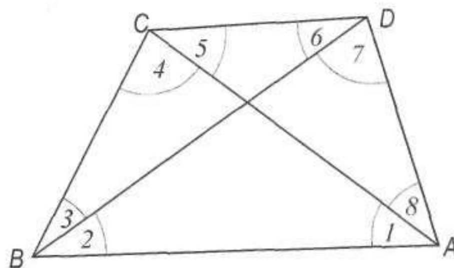
Prosta sieć w kształcie czworoboku może być zbudowana z dwóch przyległych trójkątów, w których pomierzono łącznie sześć kątów (w tym dwa nadliczbowe), zaś wspólny bok obydwóch trójkątów stanowi przekątna czworoboku (rys. 2.2). Typowy czworobok geodezyjny jest jednak konstrukcją mocniejszą, zawierającą o dwa spostrzeżenia więcej, ponieważ zgodnie z rys. 2.3 pomiarowi podlega osiem kątów poziomych, zawartych pomiędzy bokami czworoboku a obydwiema jego przekątnymi.

Czworobok geodezyjny jest konstrukcją wykorzystywaną przeważnie do *przeniesienia bazowego* (rys. 2.6), w którym długość krótszej przekątnej jest mierzona bezpośrednio. Długość ta jest konieczna dla określenia rozmiarów (skali) opisanej konstrukcji. W ramach niezależnego wyrównania pojedynczego czworoboku w układzie lokalnym, końce bazy stanowią punkty nawiązania, nie dostarczające niewiadomych. Dla wyznaczenia pary współrzędnych *X, Y* każdego innego punktu sieci należy wykonać minimum dwie obserwacje. W sieci kątowej złożonej z p punktów, w której zaobserwowano k kątów liczba niewiadomych u jest równa $2\cdot(p-2)$. Ilość spostrzeżeń nadliczbowych $k-u$, tożsamą z ilością niezależnych warunków w, można zapisać wzorem ogólnym:

$$w = k - 2\cdot(p-2) = k - 2p + 4 \tag{2.1}$$



Rys. 2.2. Czworobok złożony z dwóch przylegających trójkątów



Rys. 2.3. Czworobok geodezyjny

W czworoboku geodezyjnym $k=8$; $p=4$, a więc ilość warunków: $w=8-8+4=4$. Spośród tej liczby trzy warunki stanowią tzw. *warunki figur zamkniętych* dotyczące przeważnie sumy kątów w trójkątach, stąd nazywane są także *warunkami trójkątowymi*. Należy je ułożyć w takiej liczbie, aby żadne z utworzonych równań warunkowych nie dało się wyprowadzić z pozostałych warunków. Ogólny wzór na ilość f tych warunków wynika z następującego rozumowania:

Dla p punktów sieci można dokonać połączenia $p-1$ bokami (celowymi dwustronnymi), w wyniku czego powstanie ciąg poligonowy otwarty. Każde następne połączenie punktów dowolnym bokiem spowoduje powstanie figury zamkniętej, dla której można napisać warunek figur. Jeżeli liczbę wszystkich celowych dwustronnych w sieci oznaczymy przez l, to różnica ilości boków istniejących i niezbędnych wyniesie: $l-(p-1)$. Liczba warunków figur f wyraża się więc wzorem:

$$f = l - p + 1 \tag{2.2}$$

Dwustronnymi celowymi w czworoboku geodezyjnym są jego boki i przekątne, stąd: l=6, zaś $f = 6 - 4 + 1 = 3$.

Warunki figur zapiszemy dla trzech trójkątów: ABC, ACD, ABD:

$$1 + v_1 + 2 + v_2 + 3 + v_3 + 4 + v_4 = 180°$$
$$5 + v_5 + 6 + v_6 + 7 + v_7 + 8 + v_8 = 180°$$
$$1 + v_1 + 2 + v_2 + 7 + v_7 + 8 + v_8 = 180°$$

Możliwe jest również utworzenie analogicznego, czwartego warunku dla sumy kątów trójkąta BCD, jednak nie jest to warunek niezależny od sformułowanych wcześniej trzech warunków, ponieważ na ich podstawie można go bez trudu wyprowadzić.

Czwartym warunkiem w czworoboku geodezyjnym jest tzw. *warunek boków*. Wynika on stąd, że dla usytuowania p punktów sieci trzeba znać długość przynajmniej jednego boku (bazy) utworzonego przez dwa punkty znane, natomiast do wyznaczenia każdego z pozostałych $p-2$ punktów danej sieci wystarczą po dwie przecinające się proste, których niezbędna liczba równa się: $2(p-2)$. Do określenia długości wszystkich boków sieci, łącznie z bokiem wyjściowym, niezbędnych jest $2(p-2)+1 = 2p-3$ elementów liniowych. Ilość nadliczbowych boków b, czyli liczba warunków boków wyniesie więc:

$$b = l - (2p - 3) = l - 2p + 3 \tag{2.3}$$

Podstawiając do wzoru (2.3) dane dla czworoboku geodezyjnego (l=6; p=4), otrzymamy b =1.

Warunek boków wynika z twierdzenia sinusów w poszczególnych trójkątach i wyraża równość ilorazu sinusów odpowiednich kątów oraz ilorazu odpowiednich boków, który po uproszczeniu stanowi jedność. Przed rozpisaniem warunku boków ustalamy zakres figury zamkniętej wewnątrz danej sieci i obieramy dla niej tzw. *biegun*, tj. punkt połączony bokami ze wszystkimi wierzchołkami tej figury. Dla czworoboku geodezyjnego, który stanowi figurę zamkniętą, biegunem może być dowolny jego wierzchołek, a nawet punkt przecięcia przekątnych, chociaż jak wiemy nie jest on punktem sieci. W tym ostatnim przypadku warunek boków ma postać podobną do warunku boków w omówionym dalej układzie centralnym. Biegun należy dobierać tak, aby do równania warunkowego weszły najbardziej ostre kąty, ponieważ ich sinusy rosną najszybciej. Dla bieguna w punkcie A warunek boków przyjmie następującą formę:

$$\frac{\sin(2+3+v_2+v_3)\cdot\sin(5+v_5)\cdot\sin 7+v_7)}{\sin(4+v_4)\cdot\sin(6+7+v_6+v_7)\cdot\sin(2+v_2)} = \frac{AC\cdot AD\cdot AB}{AB\cdot AC\cdot AD} = 1$$

Ponieważ funkcja wyrażająca warunek boków jest nieliniowa, toteż do przeprowadzenia wyrównania konieczna jest jej zamiana na postać liniową. Sposób zamiany i szczegółowy przebieg wyrównania metodą warunkową jest przedstawiany w podręcznikach rachunku wyrównawczego.

2.2.3. Układ centralny

Układ centralny (rys. 2.4) jest konstrukcją złożoną z kilku trójkątów (zwykle 5–7) o wspólnym wierzchołku, zwanym *punktem centralnym* i podstawach trójkątów, tworzących wielobok zamknięty. Najkorzystniejszy jest układ centralny składający się z sześciu trójkątów równobocznych.

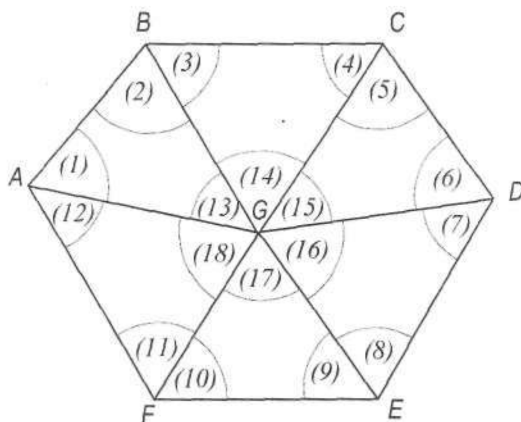
W układzie pokazanym na rysunku 2.4 ilość elementów wynosi: $p = 7$; $k = 18$; $l = 12$. Zgodnie z wzorami: (2.1), (2.2), (2.3), ilości warunków wyniosą: $w = 8$; $f = 6$; $b = 1$. Zapis równań warunkowych figur i boków jest następujący:

Warunki figur:

$$1+v_1+2+v_2+13+v_{13}=180°$$
$$3+v_3+4+v_4+14+v_{14}=180°$$
$$5+v_5+6+v_6+15+v_{15}=180°$$
$$7+v_7+8+v_8+16+v_{16}=180°$$
$$9+v_9+10+v_{10}+17+v_{17}=180°$$
$$11+v_{11}+12+v_{12}+18+v_{18}=180°$$

Warunek boków (dla bieguna w punkcie G):

$$\frac{\sin(2+v_2)\cdot\sin(4+v_4)\cdot\sin(6+v_6)\cdot\sin(8+v_8)\cdot\sin(10+v_{10})\cdot\sin(12+v_{12})}{\sin(1+v_1)\cdot\sin(3+v_3)\cdot\sin(5+v_5)\cdot\sin(7+v_7)\cdot\sin(9+v_9)\cdot\sin(11+v_{11})}=1$$



Rys. 2.4. Układ centralny

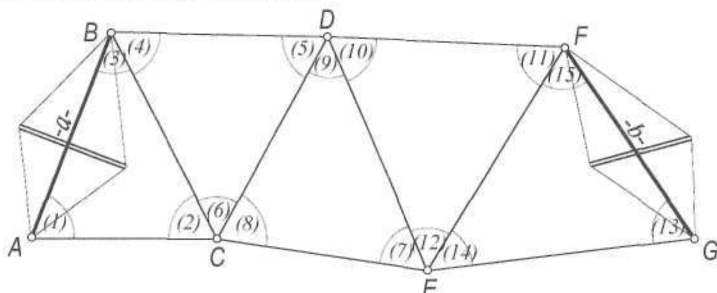
Pozostały, nie uwzględniony dotąd warunek to tzw. *warunek horyzontu*, obecny w sieciach, w których niezależnie od siebie pomierzono kąty zamykające horyzont. Warunek ten nie występuje, jeśli spostrzeżeniami zamiast kątów są kierunki. Dla układu pokazanego na rys. 2.3 warunek ten dotyczy kątów pomierzonych na stanowisku G:

$$13+v_{13}+14+v_{14}+15+v_{15}+16+v_{16}+17+v_{17}+18+v_{18}=360°$$

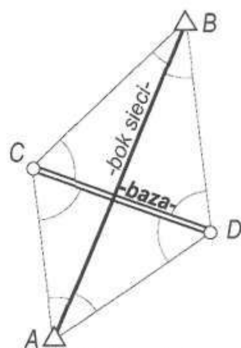
2.2.4. Łańcuch trójkątów

Pojedynczy łańcuch trójkątów (rys. 2.5) powstaje w wyniku połączenia ze sobą w określonym kierunku trójkątów stykających się bokami. Pod względem kształtu łańcuchy można podzielić na otwarte i zamknięte. Długości krańcowych boków łańcucha określane są zwykle za pomocą rozwinięć bazowych (rys. 2.6).

Rozwinięcie (przeniesienie) bazowe lub *sieć bazowa* polega na pośrednim określeniu odległości boku *AB* za pomocą czworoboku geodezyjnego zbliżonego kształtem do rombu, w którym krótszą przekątną stanowi bardzo dokładnie pomierzona baza, zaś dłuższą przekątną jest wyznaczany bok trójkąta sieci triangulacyjnej. Podobnie jak w opisanym wcześniej czworoboku geodezyjnym pomiarowi podlegają również kąty poziome pomiędzy bokami i przekątnymi figury rozwinięcia *ABCD*. Kąty naprzeciwko bazy należy mierzyć teodolitem używanym do pomiaru kątów sieci w dwukrotnie większej ilości serii niż kąty przylegające do bazy. Stosunek długości bazy i boku sieci (*CD* : *AB*) nie powinien być mniejszy od 1:4, zaś kąty: *CAD* i *CBD* położone naprzeciw bazy powinny wynosić ok. 33°. Punkty krańcowe wyznaczające długość bazy należy bardzo starannie zastabilizować znakami o wyraźnie zaznaczonych centrach.



Rys. 2.5. Łańcuch trójkątów



Rys. 2.6. Rozwinięcie bazowe

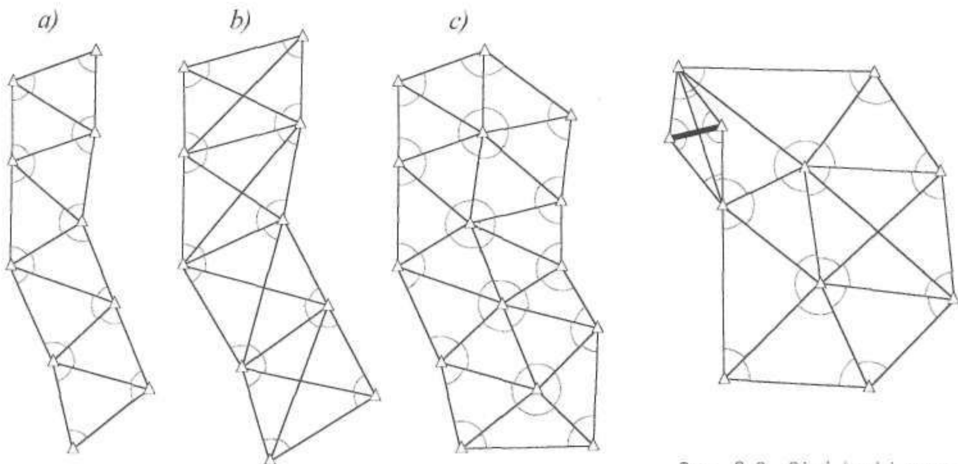
W sieci pokazanej na rysunku 2.5 ilość elementów wynosi: $p=7$; $k=15$; $l=11$. Zgodnie z wzorami: (2.1), (2.2), (2.3) liczba równań warunkowych wyniesie: $w = 5$; $f = 5$; $b = 0$. Wzory te dotyczą jednak tylko obserwacji kątowych, nie uwzględniając dodatkowego tzw. *warunku bazowego* wynikającego z pomiaru w łańcuchu dwóch baz. Liczba tych warunków, o formie podobnej do warunku boków, jest równa liczbie pomierzonych baz pomniejszonej o 1. Bardzo dokładny pomiar długości baz powoduje, że można je w uproszczeniu uznać za bezbłędne. Z tego powodu formułuje się warunek, w myśl którego pomierzona długość bazy *b* i ta sama długość obliczona jako funkcja długości bazy *a* i pomierzonych kątów łańcucha powinny być równe. W sieci kątowej obserwacjami podlegającymi wyrównaniu są wyłącznie kąty. Wprowadzenie warunku bazowego do wyrównania kątów (lub kierunków) jest uzasadnione tylko wówczas, gdy dokładność pomiaru baz jest bardzo wysoka. Przy dokładnym pomiarze zarówno kątów, jak i odległości nie powinno się uważać długości baz za bezbłędne, lecz również poddawać je wyrównaniu, przypisując im poprawki *v*. Mamy wtedy do czynienia z wyrównaniem sieci kątowo-liniowej.

Dla łańcucha trójkątów (rys. 2.5), którego długości skrajnych boków *a*, *b* określono za pomocą rozwinięć bazowych, można na podstawie twierdzenia sinusów napisać następującą zależność:

$$\frac{a\cdot BC\cdot CD\cdot DE\cdot EF}{BC\cdot CD\cdot DE\cdot EF\cdot b}=\frac{a}{b}=\frac{\sin(1+v_1)\cdot\sin(5+v_5)\cdot\sin(7+v_7)\cdot\sin(11+v_{11})\cdot\sin(13+v_{13})}{\sin(2+v_2)\cdot\sin(4+v_4)\cdot\sin(8+v_8)\cdot\sin(10+v_{10})\cdot\sin(14+v_{14})}$$

Podobnie jak w przypadku warunku boków warunek bazowy należy doprowadzić do postaci liniowej metodą różniczkowania lub metodą logarytmiczną.

W sieciach mogą też wystąpić warunki stałego kąta, wynikające z konieczności doprowadzenia do zgodności kąta sektorowego, utworzonego przez trzy punkty o znanych współrzędnych i sumy kątów pomierzonych w jego wnętrzu oraz warunki poligonowe związane z ewentualnymi ciągami poligonowymi występującymi wewnątrz sieci.



Rys. 2.7. Łańcuchy: trójkątów, czworoboków geodezyjnych i układów centralnych

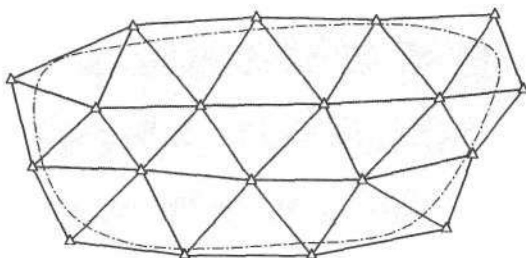
Rys. 2.8. Sieć kombinowana

2.2.5. Sieci powierzchniowe

Sieci triangulacyjne oprócz pojedynczych łańcuchów trójkątów (rys. 2.7 a) mogą być utworzone z łańcuchów czworoboków geodezyjnych (rys. 2.7 b) oraz podwójnych łańcuchów trójkątów, które są zarazem łańcuchami układów centralnych (rys. 2.7 c). Łańcuchy tworzące układy zamknięte (oczka sieci) noszą nazwę *wieńców*, zaś sieć z nich zbudowana nazywa się *siecią wieńcową* (rys. 1.15). Miejsca połączeń łańcuchów biegnących równoleżnikowo z łańcuchami przebiegającymi południkowo stanowią *węzły* sieci wieńcowej. Nie pokrywa ona jednolicie obszaru, na którym występuje, lecz przebiega pasmowo, zaś wnętrza wieńców pozostają na razie puste. W klasycznej triangulacji do ich wypełniania służy dowiązana do sieci wieńcowej *triangulacja wypełniająca*, zbudowana jako sieć powierzchniowa. Możliwe jest także stosowanie sieci stanowiących kombinacje układów wymienionych wcześniej (rys. 2.8).

W przeciwieństwie do sieci wieńcowej *sieć powierzchniowa* (rys. 2.9) składa się z trójkątów, rozłożonych na danym obszarze równomiernie. Długości boków tych trójkątów w klasycznej triangulacji, w której sieć I rzędu powinna mieć charakter powierzch-

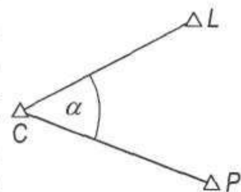
niowy, wynoszą po kilkadziesiąt kilometrów. Założenie takiej sieci jest jednak bardzo pracochłonne i kosztowne, toteż w wielu krajach zastosowano rozwiązanie uproszczone polegające na zastąpieniu sieci powierzchniowej siecią wieńcową I rzędu, która podlega następnie dalszemu zagęszczeniu za pomocą sieci tzw. *triangulacji zagęszczającej* złożonej z trójkątów o krótszych bokach (kilka – kilkanaście kilometrów), stanowiącej sieć II rzędu. Po II Wojnie Światowej podczas zakładania sieci triangulacyjnej w Polsce pominięto etap tworzenia sieci wypełniającej o bokach równorzędnych z bokami sieci wieńcowej. Nasza sieć wypełniająca SW ma zarazem charakter sieci zagęszczającej, ponieważ składa się z mniejszych trójkątów niż trójkąty w wieńcowej sieci astronomiczno-geodezyjnej SAG.



Rys. 2.9. Sieć powierzchniowa

2.2.6. Równania poprawek obserwacji kątowych

Poprzednio pokrótce omówiliśmy najważniejsze zasady układania typowych równań warunkowych w celu wyrównania sieci kątowych metodą spostrzeżeń zawarunkowanych. Wyrównanie sieci kątowej metodą spostrzeżeń pośredniczących wymaga zestawienia równań obserwacyjnych przedstawiających kąty poprawione (wyrównane) jako funkcje niewiadomych, którymi w osnowach poziomych są współrzędne X, Y poszczególnych punktów sieci. Zgodnie z rys. 2.10 pomierzony kąt α można także obliczyć ze współrzędnych punktów C, L, P na podstawie różnicy azymutów boków CL i CP:



Rys. 2.10. Obserwacja kątowa

$$\alpha = A_{CP} - A_{CL}$$

a stąd:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{Y_P - Y_C}{X_P - X_C} - \operatorname{arc\,tg}\frac{Y_L - Y_C}{X_L - X_C} \tag{2.4}$$

Powyższa funkcja, wyrażająca zależność pomiędzy pomierzonym kątem α a współrzędnymi punktów C, L, P, jest funkcją nieliniową, toteż dla doprowadzenia jej do postaci liniowej zastosujemy metodę różniczkowania. Różniczkę zupełną funkcji zapisanej wzorem (2.4) wyraża równanie:

$$d\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial Y_L}\cdot dY_L + \frac{\partial\alpha}{\partial X_L}\cdot dX_L + \frac{\partial\alpha}{\partial Y_C}\cdot dY_C + \frac{\partial\alpha}{\partial X_C}\cdot dX_C + \frac{\partial\alpha}{\partial Y_P}\cdot dY_P + \frac{\partial\alpha}{\partial X_P}\cdot dX_P$$

Określmy teraz pochodne cząstkowe funkcji zapisanej wzorem (2.4):

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y_L} = \frac{(X_L - X_C)}{\left[1+\left(\frac{Y_L - Y_C}{X_L - X_C}\right)^2\right](X_L - X_C)^2} = \frac{-(X_L - X_C)}{(X_L - X_C)^2 + (Y_L - Y_C)^2} = \frac{-\Delta x_{CL}}{d_{CL}^2} = -A_L$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial X_L} = -\frac{-(Y_L - Y_C)}{\left[1+\left(\frac{Y_L - Y_C}{X_L - X_C}\right)^2\right](X_L - X_C)^2} = \frac{(Y_L - Y_C)}{(X_L - X_C)^2 + (Y_L - Y_C)^2} = \frac{\Delta y_{CL}}{d_{CL}^2} = B_L$$

W wyniku analogicznych działań uzyskamy również pochodne:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y_P} = \frac{X_P - X_C}{(X_P - X_C)^2 + (Y_P - Y_C)^2} = \frac{\Delta x_{CP}}{d_{CP}^2} = A_P\,;$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial X_P} = \frac{-(Y_P - Y_C)}{(X_P - X_C)^2 + (Y_P - Y_C)^2} = \frac{\Delta y_{CP}}{d_{CP}^2} = -B_P$$

oraz

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y_C} = (A_L - A_P) \quad ; \quad \frac{\partial\alpha}{\partial X_C} = -(B_L - B_P)$$

Występujące w powyższych równaniach wielkości: A_L, B_L, A_P, B_P noszą nazwę *współczynników kierunkowych*. Jeśli kąty, dla których zapisujemy równania obserwacyjne wyrazimy w mierze stopniowej lub gradowej, a nie w mierze łukowej, wówczas współczynniki kierunkowe należy pomnożyć przez odpowiedni zamiennik miary łukowej obliczony w sekundach lub decymiligradach: ρ'' (206 265″) lub ρ^{cc} (636 620^{cc}). Wzory na współczynniki kierunkowe przyjmą wtedy postać:

$$A = \frac{\Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2}\cdot\rho \quad ; \quad B = \frac{\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}\cdot\rho \tag{2.5}$$

Współczynniki kierunkowe A, B obliczone według wzorów (2.5) podajemy przeważnie w zaokrągleniu do liczb całkowitych lub z dokładnością najwyżej do jednego miejsca po przecinku. Po wprowadzeniu symboli tych współczynników równanie różniczki zupełnej $d\alpha$ obserwacji kątowej uzyska postać:

$$d\alpha = A_P\,dY_P - B_P\,dX_P - A_L\,dY_L + B_L\,dX_L + (A_L - A_P)\,dY_C - (B_L - B_P)\,dX_C$$

Po dokonaniu zapisu powyższego wzoru za pomocą symboli Hausbrandta* otrzymamy:

$$d\alpha = \begin{vmatrix} dX_L & dY_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix}\begin{matrix} dX_P & dY_P \\ -A_P & -B_P \end{matrix}\begin{vmatrix} dX_C & dY_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix}_1 \tag{2.6}$$

Utożsamiając różniczkę zupełną kąta α z jego przyrostem $\Delta\alpha$ uzyskamy najprawdopodobniejszą wartość kąta, dodając przyrost $\Delta\alpha$ do wartości przybliżonej tego kąta α_{prz}, otrzymanej ze współrzędnych przybliżonych punktów C, L, P. Wielkość tę można także wyrazić jako sumę kąta pomierzonego α_{obs} i błędu pozornego (poprawki) v_α. Zachodzi więc równość:

$$\alpha_{prz} + \Delta\alpha = \alpha_{obs} + v_\alpha,$$

stąd:

$$v_\alpha = \Delta\alpha + \alpha_{prz} - \alpha_{obs}$$

* S. Hausbrandt „Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne" t. II; PPWK Warszawa, 1971 r.

Po uwzględnieniu poprzedniej zależności otrzymamy ostateczne, liniowe równanie poprawki obserwacji kątowej do wyrównania sieci kątowej metodą spostrzeżeń pośredniczących w postaci:

$$v_\alpha = \begin{vmatrix} dX_L & dY_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dX_P & dY_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dX_C & dY_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix}_1 + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} \tag{2.7}$$

Jeśli w sieci pomierzono kierunki zamiast kątów, wówczas na każdym stanowisku teodolitu jako dodatkowa niewiadoma występuje azymut kierunku zerowego (kreski zerowej limbusa), czyli tzw. *stała orientacyjna z*, której poprawka dz wystąpi także w równaniu obserwacji kierunkowej v_K wykonanej teodolitem na stanowisku S do punktu celu P_i:

$$v_{K_i} = \begin{vmatrix} dx_S & dy_S \\ A & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_{P_i} & dy_{P_i} \\ -A & -B \end{vmatrix}_1 - dz + K_i^P - K_i^O \tag{2.7 a}$$

gdzie: K_i^P – i-ty kierunek przybliżony (obliczony ze współrzędnych przybliżonych),

K_i^O – i-ty kierunek obserwowany (pomierzony).

Kontrolę obliczenia współczynników kierunkowych można przeprowadzić w oparciu o wzór:

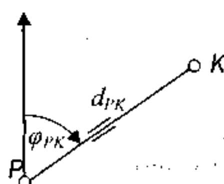
$$\begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y \\ A & B \end{vmatrix}_2 = \rho \tag{2.8}$$

Po zapisaniu równań błędów dla wszystkich pomierzonych kątów lub kierunków następują dalsze etapy wyrównania tj.: zestawienie równań normalnych i ich rozwiązanie, obliczenie niewiadomych (współrzędnych X, Y punktów sieci), poprawek v i kątów wyrównanych, wykonanie oceny dokładności.

2.3. Trilateracja

Trilateracja jest jednocześnie metodą i zarazem technologią wyznaczania położenia punktów geodezyjnych na powierzchni Ziemi za pomocą sieci trójkątów, w których pomierzono wszystkie boki. Jest także siecią *liniową* (odległościową), czyli konstrukcją, w której jako obserwacje nie występują kąty, lecz tylko same długości boków, stanowiące jednorodny typ spostrzeżeń w poszczególnych trójkątach sieci.

Aby zadanie określenia współrzędnych sieci liniowej było rozwiązywalne, ilość n pomierzonych odległości musi być co najmniej równa liczbie niewiadomych, czyli $u=2p$ tj. podwojonej liczbie punktów (każdy z nich dostarcza dwóch niewiadomych X, Y), minus 3 (znane współrzędne jednego punktu i azymut boku). Gdy liczba pomiarów jest większa od ilości niewiadomych ($n > u$), wtedy występują spostrzeżenia nadliczbowe, a tym samym problem wyrównania, które ze względu na trudności ułożenia warunków w sieciach liniowych najwygodniej jest wykonać przy zastosowaniu metody spostrzeżeń pośredniczących.



Rys. 2.11. Obserwacja liniowa

Zestawienie równań obserwacyjnych tej metody wymaga wyrażenia spostrzeżeń (długości) jako funkcji niewiadomych (współrzędnych X, Y) punktów szukanych. Dla długości d_{PK} (rys. 2.11) o azymucie φ_{PK} wyrażonej poprzez współrzędne punktów P, K można napisać wzór i określić na jego podstawie różniczkę zupełną:

$$d_{PK} = \sqrt{(X_K - X_P)^2 + (Y_K - X_P)^2} \qquad (2.9)$$

$$\Delta d = \frac{\partial d}{\partial X_P} dX_P + \frac{\partial d}{\partial Y_P} dY_P + \frac{\partial d}{\partial X_K} dX_K + \frac{\partial d}{\partial Y_K} dY_K$$

gdzie:

$$\frac{\partial d}{\partial X_P} = \frac{-2(X_K - X_P)}{2d} = -\cos\varphi; \quad \frac{\partial d}{\partial Y_P} = \frac{-2(Y_K - Y_P)}{2d} = -\sin\varphi$$

$$\frac{\partial d}{\partial X_K} = \frac{2(X_K - X_P)}{2d} = \cos\varphi; \quad \frac{\partial d}{\partial Y_K} = \frac{2(Y_K - Y_P)}{2d} = \sin\varphi$$

Po zastosowaniu symboli Hausbrandta:

$$\Delta d = \left| \begin{array}{cc|cc} dX_P & dY_P & dX_K & dY_K \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi \end{array} \right|_2$$

Najbardziej prawdopodobną długość danego boku równą długości obserwowanej d_{obs} uzupełnionej poprawką v można zapisać jako równą sumie długości d_{prz} obliczonej ze współrzędnych przybliżonych punktów P, K i przyrostu długości Δd ze względu na zmianę współrzędnych wyrównanych punktów P, K w stosunku do współrzędnych przybliżonych, czyli:

$$d_{obs} + v_d = d_{prz} + \Delta d$$

Ostatecznie r ó w n a n i e p o p r a w k i o b s e r w a c j i l i n i o w e j zostanie określone wzorem:

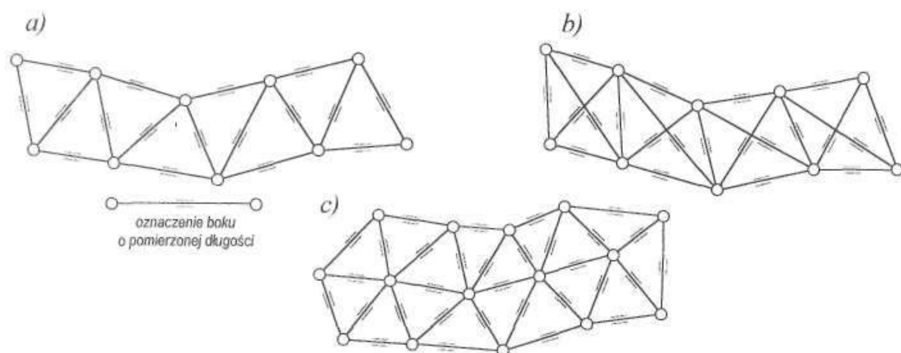
$$v_d = \left| \begin{array}{cc|cc} dX_P & dY_P & dX_K & dY_K \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi \end{array} \right|_2 + d_{prz} - d_{obs} \qquad (2.10)$$

Wielkości: $\cos\varphi$ oraz $\sin\varphi$ w równaniach błędów obserwacji liniowych spełniają podobną rolę jak współczynniki kierunkowe A, B obliczane dla wyrównania sieci kątowych. Współczynniki: $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ wystarczy określać z dokładnością do trzech lub czterech miejsc po przecinku. Po zapisaniu równań błędów dla wszystkich pomierzonych odległości następuje zestawienie równań normalnych i ich rozwiązanie, obliczenie niewiadomych współrzędnych punktów sieci, poprawek i długości wyrównanych, wykonanie oceny dokładności.

Możliwości zakładania sieci trilateracyjnych powstały po szerszym wprowadzeniu do pomiarów odległości dokładnych dalmierzy elektromagnetycznych. Umożliwiło to zastosowanie nowych technologii zakładania osnów poziomych i modernizację istniejących sieci kątowych, które dzięki wzmocnieniu dodatkowymi pomiarami liniowymi mogą być przekształcone w dokładniejsze sieci kątowo-liniowe.

W trilateracji stosuje się analogiczne liniowe układy geometryczne, które wcześniej jako kątowe występowały w triangulacji, takie jak: czworobok liniowy

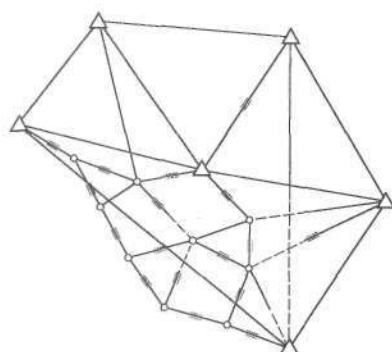
z pomierzonymi bokami i przekątnymi, długościowy układ centralny, łańcuchy trójkątów i układów centralnych (rys. 2.12), sieci powierzchniowe oraz wielokrotne wcięcia liniowe, jak również kombinacje wymienionych konstrukcji. Wadą jednorodnych sieci liniowych w porównaniu do podobnych sieci kątowych jest znacznie mniejsza ilość obserwacji nadliczbowych, co wynika z faktu, że w pojedynczym trójkącie pomiar trzech kątów daje jedno spostrzeżenie nadliczbowe (warunek), zaś pomiar trzech długości boków trójkąta takiej obserwacji nie dostarcza. Z tego względu w czworoboku liniowym z pomierzonymi bokami i przekątnymi oraz w liniowym układzie centralnym występuje zaledwie jedno spostrzeżenie nadliczbowe, natomiast brak ich w ogóle w łańcuchu trójkątów. Efekt wyrównania ścisłego w sieciach trilateracyjnych jest więc mały.



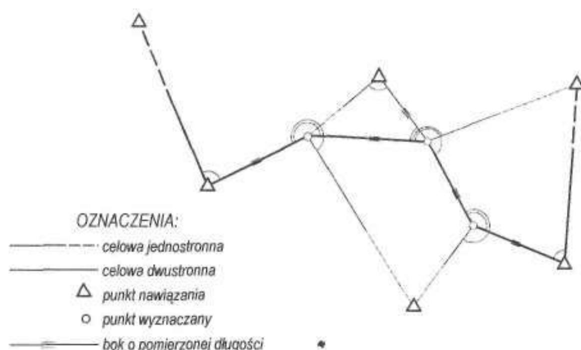
Rys. 2.12. Łańcuchy trilateracyjne

2.4. Sieci kątowo-liniowe

Sieć kątowo-liniowa jest to sieć poziomej osnowy geodezyjnej, w której pomierzono zarówno kąty poziome jak i odległości. Dla zaistnienia problemu wyrównania łączna ilość tych elementów w sieci powinna przekraczać podwojoną liczbę punktów szukanych, których współrzędne mają być wyznaczone.



Rys. 2.13. Nieregularna sieć kątowo-liniowa



Rys. 2.14. Poligonotriangulacja

Kształt, konstrukcja sieci i rozkład w jej obrębie poszczególnych rodzajów obserwacji mogą być zróżnicowane. Osnowa złożona z trójkątów, w których dokonano po-

miaru wszystkich kątów i długości, a więc jednoczesne połączenie triangulacji i trilateracji określana jest mianem *triangulateracji*. Sieci z nieregularnym rozkładem pomierzonych elementów geometrycznych noszą nazwę *nieregularnych sieci kątowo-liniowych*. Sieci te są wykorzystywane podczas dogęszczania i wzmacniania osnowy trygonometrycznej (triangulacyjnej) w warunkach małej przejrzystości terenu i przy braku widoczności pewnych kierunków, dla których zamiast kątów mierzy się pewne odległości (rys. 2.13).

Do osnów kątowo-liniowych zaliczamy także ciągi i sieci poligonowe omówione dalej w ust. 2.5. Ze względu na słabość typowej poligonizacji, wynikającą z małej ilości spostrzeżeń nadliczbowych, można stosować tzw. *poligonotriangulację*, czyli dokonywać wzmocnienia poszczególnych ciągów poprzez powiązanie wewnętrznych punktów ciągów poligonowych z punktami osnowy wyższej klasy za pomocą kątowych i liniowych elementów usztywniających (rys. 2.14). Szczególnie osnowa ta znajduje zastosowanie dla pomiaru obiektów wydłużonych np. tras: kolejowych i drogowych.

Podczas pomiaru sieci poligonotriangulacyjnych z poszczególnych punktów poligonowych mierzy się wszystkie dostępne elementy kątowe i liniowe do punktów osnowy o wyższej dokładności. Najkorzystniejsze są przy tym nawiązania biegnące prostopadle do boków ciągu, ponieważ w znacznym stopniu obniżają składową poprzeczną odchyłki liniowej. Według T. Michalskiego* dla wyznaczenia punktów metodą poligonotriangulacji z błędem nie przekraczającym ±3 cm należy mierzyć kąty w kilku seriach teodolitem o wyższej dokładności odczytu przy zastosowaniu metody trzech statywów, zaś boki z błędem względnym nie większym niż 1:100000. Ciągi poligonotriangulacyjne należy projektować tak, aby: ilość boków wynosiła od 3 do 4, długość pojedynczego ciągu nie przekraczała 4 km, zaś przebieg ciągów był zbliżony do prostoliniowego.

Oprócz ilości i rodzaju nawiązań do punktów wyższej klasy, na dokładność ciągów poligonotriangulacji pozytywnie wpływa pomiar dodatkowych elementów kątowych i liniowych pomiędzy punktami wyznaczanymi.

Wyrównanie sieci kątowo-liniowych metodą spostrzeżeń pośredniczących rozpoczyna się od obliczenia współrzędnych przybliżonych (x_0, y_0) wszystkich punktów wyznaczanych. W dalszym toku wyrównania realizowanego według zasady najmniejszej sumy kwadratów:

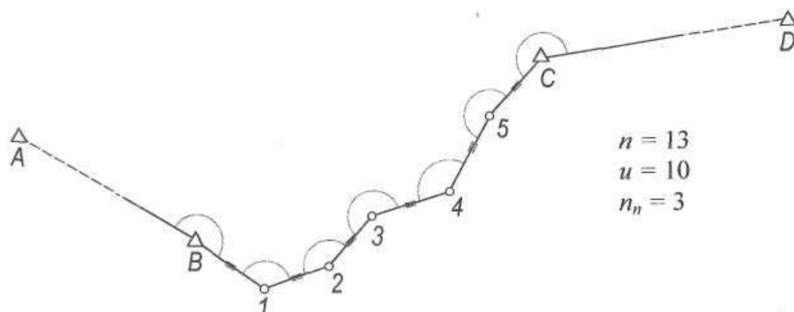
$$\left[\frac{vv}{mm}\right] = \text{minimum} \tag{2.11}$$

Jako niewiadome będą poszukiwane niewielkie poprawki dx, dy tych współrzędnych. Konieczność uwzględnienia w powyższym warunku średnich błędów m spostrzeżeń wynika stąd, że obserwacjami w sieciach kątowo-liniowych są pomierzone z różną dokładnością wielkości niejednorodne: kąty i odległości, wyrażone w odmiennych jednostkach (np. w sekundach i metrach). Z tego względu równania poprawek obserwacji kątowych i liniowych zestawionych wg równań: (2.7) i (2.10) należy zrównoważyć, dokonując podzielenia obu stron każdego równania przez średnie błędy tych obserwacji. Zrównoważone poprawki: $V = v : m$ stają się w ten sposób liczbami niemianowanymi. Po obliczeniu niewiadomych: dx, dy i po ich podstawieniu do równań zrównoważonych uzyskujemy poprawki V, zaś po ich podstawieniu do pierwotnych równań błędów - poprawki obserwacyjne v.

* T. Michalski ; Triangulacja szczegółowa; PPWK Warszawa; 1975.

2.5. Poligonizacja

Poligonizacja jest metodą i technologią wyznaczania położenia punktów, tworzących linie łamane (wieloboki) zamknięte lub otwarte zwane *ciągami poligonowymi*, w których mierzy się kąty wierzchołkowe i długości boków. Poligonizacja, powszechnie stosowana do zagęszczania osnowy poziomej, jest łatwa w realizacji, bardzo elastyczna i ekonomiczna. Jest też jedną z najważniejszych metod zakładania osnowy poziomej szczegółowej klasy III i osnowy pomiarowej. Umożliwia korzystne dostosowanie rozmieszczenia punktów do istniejących warunków terenowych, nie wymagając przy tym dużej ilości punktów nawiązania oraz licznych wizur na inne punkty sieci. Wadą poligonizacji jest natomiast słabość konstrukcji sieci, wynikająca z małej liczby obserwacji nadliczbowych, wynoszącej tylko trzy w pojedynczym ciągu z pełnym nawiązaniem obustronnym (rys. 2.15). Pewność wyznaczenia położenia punktów sieci ulega obniżeniu wraz ze zwiększaniem ich ilości w poszczególnych ciągach, toteż podczas projektowania należy dążyć do zwiększania długości boków ciągów, ograniczając jednocześnie ich liczbę.



Rys. 2.15. Ciąg poligonowy otwarty z pełnym nawiązaniem obustronnym

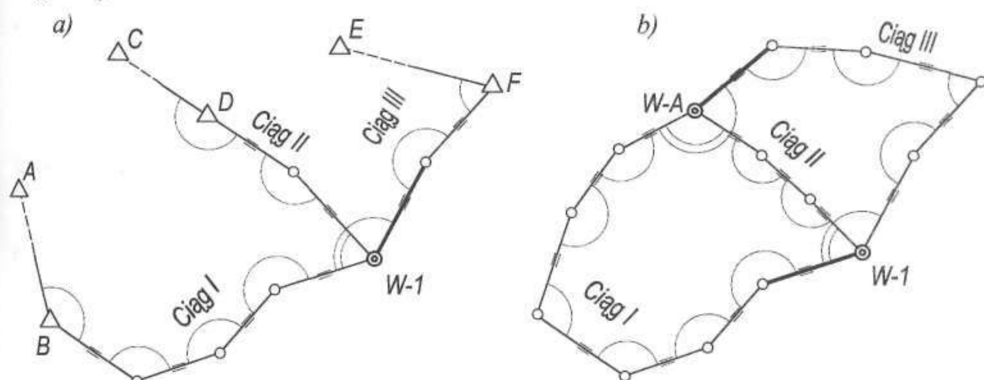
Przy dostatecznym zagęszczeniu punktów nawiązania osnowa pozioma zakładana za pomocą poligonizacji powinna składać się z pojedynczych otwartych ciągów poligonowych, dwustronnie nawiązanych kątowo i liniowo w sposób pełny, czyli poprzez pomiar dwóch kątów i dwóch boków nawiązania (rys. 2.15).

Sieć poligonowa jest poziomą siecią kątowo-liniową złożoną z poszczególnych ciągów poligonowych łączących punkty nawiązania oraz tzw. *punkty węzłowe,* czyli punkty wspólne dla kilku ciągów, w których schodzą się co najmniej trzy równorzędne ciągi poligonowe. Głównymi zadaniami punktów węzłowych są: skracanie zbyt długich ciągów, obniżenie ilości rzędów sieci i ułatwienie jej obliczenia.

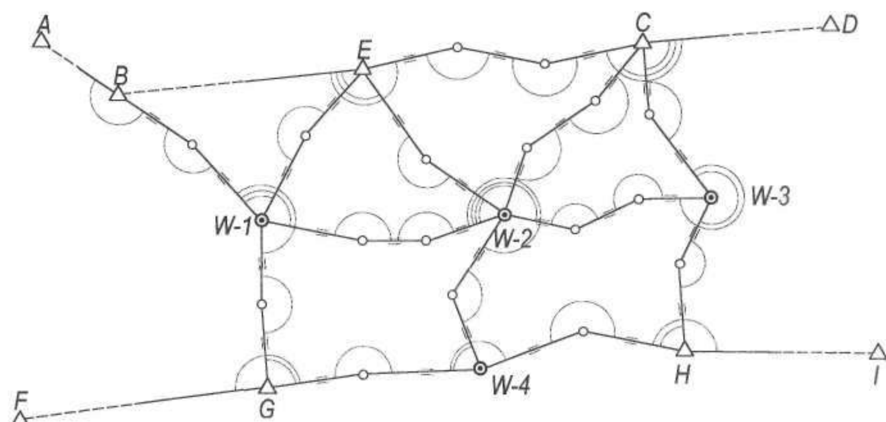
Sieci poligonowe *nawiązane* stanowią osnowę połączoną geometrycznie za pośrednictwem boków i kątów nawiązania z punktami nawiązania należącymi do osnowy poziomej o wyższej dokładności niż zakładana sieć poligonowa. W wyjątkowych przypadkach bywają także zakładane sieci poligonowe *niezależne*, które nie są nawiązane do punktów osnowy wyższej klasy. Kompromis pomiędzy siecią nawiązaną wielopunktowo i niezależną stanowi sieć poligonowa nawiązana jednopunktowo z orientacją. Nawiązanie to polega na przeniesieniu współrzędnych na jeden z punktów oraz nadaniu sieci orientacji poprzez wykonanie nawiązania kątowego dla jednego z jej boków.

Na rysunkach 2.16a i 2.16b pokazano najprostsze typy sieci poligonowych złożonych z trzech ciągów: sieć nawiązaną wielopunktowo i sieć niezależną. Występujący w sieci niezależnej (rys. 2.16b) punkt węzłowy *W-A* jest punktem wyjściowym o znanych

lub przyjętych współrzędnych, natomiast punktem węzłowym o szukanych współrzędnych jest w obu typach sieci węzeł oznaczony symbolem *W-1*. Z kolei rys. 2.17 ilustruje bardziej złożoną, czterowęzłową sieć poligonową nawiązaną wielopunktowo do osnowy wyższej klasy.



Rys. 2.16. Najprostsze sieci poligonowe: a) nawiązana, b) niezależna



Rys. 2.17. Wielowęzłowa, nawiązana sieć poligonowa

Obok przedstawionych wcześniej wad poligonizacji należy również wymienić małą sztywność i pewność konstrukcji pojedynczego ciągu poligonowego, będącego podstawowym elementem każdej sieci poligonowej. Pod względem dokładności wyznaczenia najsłabszym punktem ciągu jest punkt środkowy. Wzmocnienie sieci poligonowych i zwiększenie dokładności wyznaczenia położenia punktów można osiągnąć poprzez następujące zabiegi:

- zwiększenie oraz skoordynowanie dokładności pomiaru kątów i długości boków;
- stosowanie mniejszej ilości dłuższych boków zamiast większej ilości krótkich boków dla ciągów o tej samej długości;
- wzmocnienia ciągów poprzez nawiązania boczne do punktów wyższej klasy;

- usztywnienia konstrukcji polegające na wiązaniu niesąsiednich punktów poligonowych danego ciągu i punktów innych ciągów dodatkowymi elementami kątowymi i liniowymi;
- prostoliniowe prowadzenie ciągów;
- zbliżone długości poszczególnych boków tego samego ciągu (ciągi równoboczne);
- zwiększanie ilości punktów węzłowych w sieci;
- stosowanie wyrównania ścisłego zamiast przybliżonego.

W okresie poprzedzającym wprowadzenie do powszechnego użytku dalmierzy elektrooptycznych i przepisów instrukcji o symbolu „G", obowiązywał nie stosowany już obecnie podział poligonizacji na: *techniczną* i *precyzyjną*.

Zgodnie z dawną instrukcją B-III*, według przepisów której zakładana była osnowa obecnie zaliczana do osnowy szczegółowej klasy III lub osnowy pomiarowej, ...„*poligonizacja techniczna* stanowi poziomą osnowę geodezyjną, na której opierają się pomiary szczegółowe"... .

Poligonizacja ta dzieliła się na cztery klasy przypisywane do poszczególnych kategorii terenu: A, B, C, D. Dokładność tej osnowy była charakteryzowana dokładnością określenia kątów, wyrażoną poprzez średni błąd pomiaru m_0 oraz dokładnością pomiaru boków wyrażaną wartością współczynnika u, przy czym dopuszczalna różnica dwukrotnego pomiaru boku o długości l wynosi: $d_l = u\sqrt{l}$. Nie wchodząc zbytnio w szczegóły obecnie już nieaktualnego podziału, można stwierdzić, że dla osiągnięcia błędu kąta m_0=±6″ i różnicy odległości d_l < 0,02 m (dla boku 100 m) – orientacyjnych parametrów dokładnościowych ówczesnej kl. I poligonizacji technicznej, wystarczyło korzystać z niezbyt dokładnego sprzętu pomiarowego. na który składały się: teodolit o średniej dokładności oraz taśma ze wskaźnikami i dynamometrami. Dla niższych klas poligonizacji technicznej tolerancje błędów były jeszcze większe. Wyrównanie sieci poligonowych było wówczas wykonywane metodami przybliżonymi.

Poligonizacja precyzyjna odróżniała się od poligonizacji technicznej wyższą dokładnością pomiaru, większymi długościami ciągów i boków i wyrównaniem metodami ścisłymi. Poligonizacja ta, podzielona na dwie klasy: I i II, zastępowała triangulację zagęszczającą w terenach zakrytych (miasta, obszary leśne). Długości ciągów poligonizacji precyzyjnej I klasy wynosiły do 12 km, zaś długości boków 500 – 1800 m. Błąd względny boków mierzonych przeważnie drutami inwarowymi lub metodą paralaktyczną nie mógł przekraczać 1:20000, zaś błąd pomiaru kątów – ±2,5″. Punkty uzyskane dawniej przy użyciu technologii poligonizacji precyzyjnej przeważnie spełniają współcześnie kryteria dokładnościowe osnowy szczegółowej II klasy.

Obecnie w odniesieniu do sieci kl. III zakładanej metodą poligonizacji stosuje się wymagania podane w instrukcji G-2 i wytycznych G-2.5, zacytowane w ust. 3.2. Do pomiaru kątów wykonywanego w przynajmniej 2 seriach stosuje się teodolity o średniej dokładności odczytu (≤20^{cc}), zaś do pomiaru długości boków poligonowych – dalmierze elektrooptyczne o błędzie standardowym: m_d ≤10 mm +10 ppm. Sygnałami celowniczymi centrowanymi za pomocą pionu optycznego z dokładnością do 5 mm mają być tarcze celownicze.

* Instrukcja B-III „Poligonizacja techniczna"; GUGiK; 1968.

2.6. Globalny System Pozycyjny (GPS)

2.6.1. Informacje wstępne

Globalny System Pozycyjny – GPS (*Global Positioning System*) służy do wyznaczenia przestrzennego położenia (lokalizacji) punktów, na których ustawiona jest aparatura służąca do odbioru sygnałów radiowych wysyłanych przez systemowe sztuczne satelity Ziemi. System ten został opracowany i zrealizowany przez Departament Obrony USA, początkowo tylko dla celów wojskowych, później zaś w ustalonym zakresie został udostępniony dla ogólnoświatowych potrzeb cywilnych, głównie dla nawigacji morskiej i lotniczej, zaś po opracowaniu technologii zapewniającej wysoką dokładność określania położenia – także dla potrzeb geodezji.

Satelity te w liczbie 27 (24 czynne i 3 rezerwowe), wchodzące w skład systemu o nazwie NAVSTAR (***N**avigation **S**ystem with **T**ime **a**nd **R**anging*) poruszają się z dużą prędkością (ok. 4 km/s) w odległości ok. 20 200 km od powierzchni Ziemi po sześciu prawie kołowych orbitach, równomiernie rozmieszczonych w przestrzeni i nachylonych w stosunku do równika pod kątem 55° (rys. 2.18). Wynika stąd, że na wybranej orbicie znajdują się przynajmniej cztery satelity, z których każdy obiega Ziemię w ciągu 12 godzin i z dowolnego punktu widoczny jest nad horyzontem przez ok. 5 godzin. Dzięki temu w każdym momencie można jednocześnie odbierać sygnały od czterech do dziesięciu satelitów. Konstelacja satelitów dzieli się na zespoły zwane blokami generacji o oznaczeniach: I, II, IIa, III. Satelity z poszczególnych bloków różnią się wieloma cechami np. masą, wielkością, wzorcem częstotliwości i in. W systemie tym określenie położenia danego punktu naziemnego uzyskuje się poprzez pomiar odległości do 4 – 10 satelitów, których położenie w chwili pomiaru jest dokładnie znane, czyli tym sposobem realizowana jest konstrukcja *przestrzennego wcięcia liniowego*.



Rys. 2.18. Orbity satelitów GPS

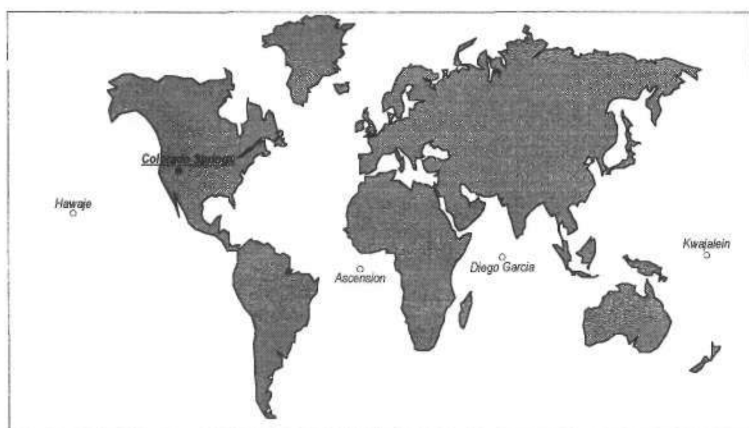
2.6.2. Składniki systemu

Podstawowe części systemu lokalizacyjnego GPS, nazywane są *segmentami* lub członami, przy czym na całość systemu składają się trzy segmenty:

1. *Segment kosmiczny* (satelitarny) składa się z 27 satelitów (wg stanu z r. 2002), spośród których trzy pełnią rolę satelitów zapasowych, mogących zastępować satelity aktywne, które doznały awarii. Liczba satelitów będzie zwiększana w celu polepszenia warunków obserwacji systemu GPS. Zwykle z zespołu satelitów wyłączonych jest 5 lub 6, gdyż ich tory, orbity i zegary podlegają korekcji. Zespół satelitów pełni funkcję przestrzennego, ruchomego układu odniesienia dla całego globu ziemskiego. Czas obiegu orbity wynosi połowę doby gwiazdowej, czyli ok. 12 godzin, co sprawia, że obserwator na Ziemi obserwuje tą samą konstelację satelitów codziennie, prawie o tej samej porze (a ściślej o 4 min. wcześniej). Rozmieszczenie satelitów na orbitach umożliwia obserwowanie co najmniej czterech z nich z każ-

dego miejsca na powierzchni naszego globu. Każdy z satelitów emituje sygnały radiowe o ściśle określonej, stabilnej częstotliwości oraz wskazania czasu z własnego bardzo dokładnego zegara atomowego. Informacje te są niezbędne do identyfikacji satelity oraz ustalenia jego położenia na orbicie.

2. *Segment kontrolny* jest utworzony przez obserwacyjne stacje naziemne, których zadaniem jest bezustanne śledzenie ruchów satelitów i sprawdzanie prawidłowości ich funkcjonowania, a szczególnie obliczanie elementów orbit i synchronizacja zegarów atomowych każdego z satelitów do czasu systemu GPS. Aktualne informacje o parametrach orbit są przekazywane co godzinę do komputerów na pokładach satelitów. Na segment ten składają się jedna główna stacja nadzoru w Colorado Springs (MCS - *Master Control Station*) w Bazie Sił Powietrznych Falcon, trzy stacje z antenami telemetrycznymi, przekazujące dane do satelitów, pięć stacji śledzących możliwie równomiernie rozmieszczonych na globie ziemskim. Aktualne informacje orbitalne są na bieżąco przekazywane do pamięci komputerów pokładowych satelitów. Lokalizacja stacji śledzących (rys. 2.19) położonych w pobliżu równika to oprócz stacji głównej: Ascension na Wyspie Wniebowstąpienia (południowy Atlantyk), Hawaje, wyspa Diego Garcia (Ocean Indyjski), atol Kwajalein (południowo-zachodni Pacyfik). Wszystkie stacje monitorujące wyposażone są w anteny do łączności dwustronnej z satelitami. Stacje monitorujące biernie śledzą wszystkie widoczne satelity, zaś ich dane przesyłane są do MCS, gdzie wyznacza się efemerydy satelitów i parametry ich zegarów. MCS okresowo przesyła satelitom efemerydy i poprawki zegara w celu ich retransmisji w depeszy nawigacyjnej. Położenie stacji naziemnych wyrażone we współrzędnych układu geocentrycznego WGS-84 zostało bardzo dokładnie określone za pomocą precyzyjnych technik pomiarowych.



Rys. 2.19. Położenie stacji kontrolnych systemu GPS

3. *Segment użytkowników GPS* obejmuje zarówno instytucje lub osoby korzystające z systemu jak i posiadaną przez nie aparaturę odbiorczą wyposażoną w anteny do odbioru sygnałów satelitarnych i przetwarzających je komputerów. Segment użytkowników składa się z różnorodnych wojskowych i cywilnych odbiorników GPS zaprojektowanych tak, by odbierać, dekodować i przetwarzać sygnały GPS. Są to odbiorniki funkcjonujące samodzielnie lub wbudowane w inne systemy. Zastoso-

wania obejmują nawigację (powietrzną, morską, lądową), wyznaczanie pozycji, transfer czasu, pomiary geodezyjne i wiele innych. Ze względu na wielorakie zastosowania odbiorniki różnią się funkcjami i konstrukcją. Użytkownicy nie mają wpływu na pracę systemu, ponieważ przesyłanie danych nawigacyjnych odbywa się tylko w jednym kierunku tj. do użytkownika. W geodezji wykorzystywane są tzw. *stacje permanentne* GPS zastępujące punkty nawiązania sieci geodezyjnych, składające się z pracujących w sposób ciągły dwuczęstotliwościowych stacji GPS dostarczających wyniki obserwacji o najwyższej precyzji. Przykładami takich sieci wykorzystywanych do nawiązań osnów GPS i opartych na zasadach komercyjnych są: SAPOS (na terenie Niemiec) i SWEPOS (w Szwecji).

2.6.3. Emisja sygnałów

Satelity systemu GPS są nadawczo-odbiorczymi stacjami radiowymi, wyposażonymi w anteny do wysyłania i przyjmowania fal radiowych oraz umieszczone na dwóch charakterystycznych skrzydłach baterie słoneczne wytwarzające energię elektryczną. Podstawą działania systemu GPS jest niezwykle dokładny pomiar czasu, toteż najważniejszym urządzeniem satelity GPS jest rubinowo-cezowy zegar atomowy, który dzięki wytwarzaniu przez generator pokładowy satelity stabilnej częstotliwości podstawowej f_0 = 10,23 MHz bardzo precyzyjnie określa czas (błąd ±1 s na 3 000 000 lat). Wysyłane przez satelitę sygnały radiowe są wielokrotnościami częstotliwości podstawowej zarówno w zakresie fal nośnych jak i modulowanych. Zapewnia to wzajemną spójność sygnałów radiowych działających w systemie. Depesza satelitarna polega na generowaniu specyficznego kodu wysyłanego przez każdego satelitę GPS w formie sygnału radiowego. Oprócz identyfikacyjnej depeszy własnej satelita emituje sygnały na dwóch nośnych częstotliwościach wzorcowych: L_1=1575,42 MHz (f_0×154) i L_2=1227,60 MHz (f_0×120), będących wielokrotnościami częstotliwości podstawowej 10,23 MHz. Fale te, mające długość 19,05 cm i 24,45 cm, należą do zakresu mikrofal (fal ultrakrótkich),w najmniejszym stopniu ulegających zakłóceniom w atmosferze ziemskiej.

Poprzez odpowiednią modulację fal na jednej częstotliwości przesyłanych jest jednocześnie szereg zakodowanych informacji, które następnie są rozdzielane w odbiornikach GPS. Fala o częstotliwości wzorcowej L_1 jest modulowana dla przekazania użytkownikom kodów binarnych (dwójkowych), w tym dostępnego *kodu zgrubnego* o symbolu *C/A** i częstotliwości 1,023 MHz. Na częstotliwości L_2 transmitowany jest precyzyjny kod *P* i kod *Y*, zastrzeżony dla celów wojskowych Stanów Zjednoczonych. Kod *Y* stanowi zabezpieczenie systemu przed próbami zakłócania pracy urządzeń GPS. W chwili ewentualnego zagrożenia kod *P* zostaje przekształcony w kod *Y*. W stosunku do fali nośnej fala zmodulowana, stanowiąca tzw. *depeszę nawigacyjną (satelitarną)*, ma znacznie większą długość. Długość fali zmodulowanej dla ogólnodostępnego kodu *C/A* wynosi 300 m, zaś dla przeznaczonego dla uprawnionych użytkowników kodu *P* – 30 m.

Kod *C/A* składa się z 1023 bitów transmitowanych z szybkością 1,023 MHz, zaś cała sekwencja powtarza się co 1 milisekundę. Każdemu z satelitów przypisany jest inny kod. Kod *P* jest sekwencją trwającą 267 dni, a każdy z satelitów ma przypisany jednotygodniowy segment tego kodu.

---

* C/A jest skrótem od *coarse acquisition* = dosł. akwizycja zgrubna, kod powszechnie dostępny, zaś oznaczenie kodu P jest skrótem słowa *precise*.

Depesza nawigacyjna, (50 bitów/s) jest przekazywana na obu częstotliwościach i zawiera informacje identyfikujące satelitę i jego położenie na orbicie: parametry poprawki zegara, dane orbitalne i dotyczące położenia satelity w przestrzeni, współczynniki potrzebne do obliczania poprawki jonosferycznej i inne informacje systemowe. Treść sygnału informacyjnego zawiera między innymi:

- *almanach* – dane dotyczące aktualnego stanu systemu, w tym przybliżone elementy orbitalne wszystkich satelitów, których znajomość przyśpiesza proces akwizycji;
- *efemerydę* – dokładne elementy orbitalne satelity nadającego depeszę, niezbędne do wyznaczania czasu i pozycji.

Depesza nawigacyjna nałożona na oba kody *P* i *C/A* jest utworzona z 25 tzw. ramek, z których każda składa się 1500 bitów. Pojedyncza ramka podzielona jest na 5 podramek, po 300 bitów każda. Odebranie jednej ramki danych zajmuje więc 30 sekund, a odebranie wszystkich 25 ramek zajmuje 12,5 minuty. Podramki 1, 2 i 3 powtarzają te same 900 bitów danych we wszystkich 25 ramkach, co umożliwia odbiornikowi odebranie krytycznych danych w ciągu 30 sekund. Dane depeszy nawigacyjnej są uaktualniane co cztery godziny. Depesza zawiera informację o momencie transmisji, umożliwiającą przejście od śledzenia kodu *C/A* do śledzenia kodu *P(Y)*, dane efemerydalne i dane o zegarze oraz almanach. Dodatkowo transmitowane są dane o prawidłowości działania satelitów, współczynniki do modelu opóźnienia jonosferycznego, współczynniki umożliwiające obliczenie czasu UTC. Sporadycznie na terenie Polski mogą wystąpić zakłócenia odbioru sygnałów GPS uniemożliwiające poprawną pracę odbiorników. Sytuacja taka wystąpiła dwukrotnie na terenie Obserwatorium Astrogeodynamicznego CBK PAN w Borowcu. Zakłócenia podzielić możemy na dwa rodzaje: występujące w paśmie GPS 1575,42 ±10 MHz i występujące poza nim. Na zakłócenia występujące poza pasmem czułe są starsze odbiorniki, których anteny nie są wyposażone w odpowiednie filtry. Odbierają one często sygnały w paśmie od 800 MHz do 2,5 GHz. Źródeł tych zakłóceń jest wiele. Wywołują je np. instalacje telefonii komórkowej lub stacje radiolokacyjne. Jeśli antena starszego typu stanowi odrębny element, to może być wymieniona na nowocześniejszą. Zakłócenia występujące w paśmie GPS są bardzo trudne do wyeliminowania.

2.6.4. Zasada wyznaczenia położenia

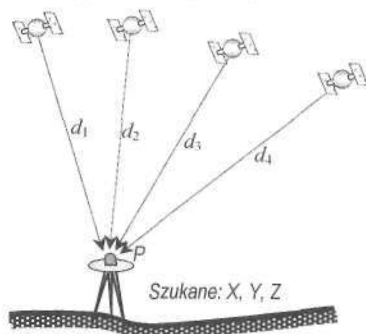
Wyznaczenie współrzędnych *X,Y,Z* stanowiska odbiornika GPS w układzie geocentrycznym wymaga dokonania obserwacji do przynajmniej czterech satelitów, ponieważ do określenia pozycji trzeba ustalić wartości czterech niewiadomych, którymi są trzy współrzędne stanowiska odbiornika i poprawka jego zegara. Obliczenie odległości *d* odbiornika od satelity opiera się na zależności drogi *d*, prędkości fali elektromagnetycznej *v* i czasu *t*. Wyznaczenie poprawki kwarcowego zegara odbiornika jest konieczne, ponieważ zegar ten jest znacznie mniej dokładny w porównaniu z atomowym zegarem satelity, zaś moment odbioru sygnału jest opóźniony względem czasu emisji sygnału.

Dla określenia położenia punktów naziemnych stosowane są dwie metody pomiaru: bezwzględna (pseudoodległościowa) i względna (różnicowa).

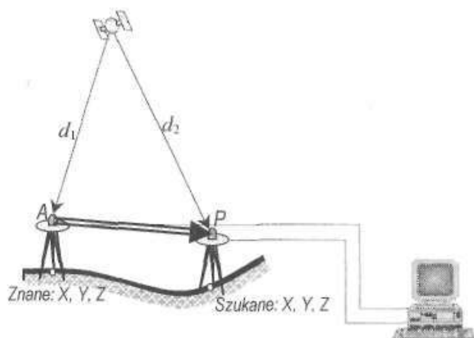
Metoda bezwzględna (metoda pojedynczego punktu) polega na ustaleniu położenia punktu naziemnego, na którym umieszczono pojedynczy odbiornik GPS, na podstawie przestrzennego wcięcia liniowego, realizowanego przez pomiar odległości pomiędzy odbiornikiem a widocznymi z punktu obserwacji satelitami o znanym położeniu, (rys.

2.20). Dla wyznaczenia niewiadomych: poprawki zegara i trzech współrzędnych *X, Y, Z* w globalnym układzie geocentrycznym potrzebna jest znajomość odległości do co najmniej czterech satelitów. Metoda ta umożliwia ustalenie pozycji odbiornika z błędem rzędu kilku metrów. Ze względu na negatywny wpływ środowiska (refrakcje: jonosferyczna i troposferyczna oraz odbicia od przeszkód) na bieg sygnałów pomiarowych metoda bezwzględna nie daje zatem dokładności pomiaru odpowiedniej dla potrzeb geodezji, natomiast zapewnia wystarczającą dokładność dla celów nawigacyjnych.

Metodę względną, czyli różnicową (DGPS – *Differential Global Positioning System*), stosuje się dla osiągnięcia dokładności wyznaczenia położenia punktów wymaganej w geodezji. Istota metody różnicowej polega na wykorzystaniu co najmniej dwóch odbiorników ustawionych w różnych punktach terenowych, na których wykonuje się jednoczesne obserwacje do tych samych satelitów i na podstawie opóźnienia sygnałów kodowych lub różnic faz fal nośnych pochodzących od tego samego satelity i odebranych w obydwu odbiornikach wyznacza się różnice odległości do obydwu punktów, a następnie położenie jednego odbiornika względem drugiego (rys. 2.21). Do metody tej dostosowane są takie elementy jak: sprzęt pomiarowy i komputerowy, jego oprogramowanie, procedury obserwacyjne oraz sposoby obliczania wyników.



Rys. 2.20. Metoda bezwzględna wyznaczenia położenia anteny odbiornika GPS



Rys. 2.21. Metoda różnicowa wyznaczenia położenia punktu

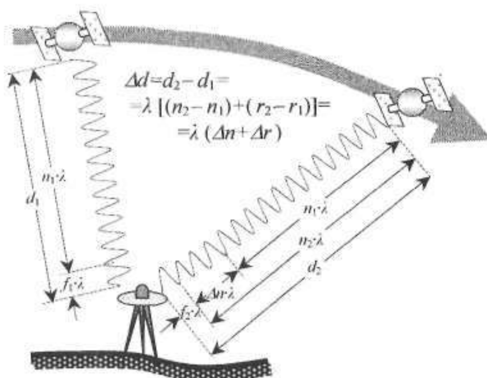
W oparciu o zaobserwowane różnice odległości pochodzące od przynajmniej trzech satelitów określa się przestrzenne wektory pomiędzy punktami na których znajdują się odbiorniki. Wektory te stanowią obserwacje i poddawane są procesowi wyrównawczemu. Każdy wektor ma określone przyrosty trzech współrzędnych (ΔX, ΔY, ΔZ) w kartezjańskim geocentrycznym układzie współrzędnych. Jeśli mamy dwa odbiorniki, zaś jedna z dwóch stacji ma znane położenie, to mamy możliwość obliczenia współrzędnych stanowiska drugiej stacji. Oba zbiory obserwacji są obarczone niemal identycznymi błędami systematycznymi, takimi jak: błędy wyznaczenia parametrów orbit, błędy zegarów satelitów i odbiorników, błędy wynikające z nieznanych wpływów jonosfery i troposfery (refrakcja). Zaletą metody względnej jest to, że w wyniku tworzenia różnic pomierzonych wielkości błędy te ulegają redukcji, podobnie jak w przypadku niwelacji geometrycznej ze środka podczas obliczenia różnic wysokości ($t-p$) eliminowany jest jednakowy wpływ na obydwa odczyty błędu nierównoległości osi libeli do osi celowej.

Określenie odległości pomiędzy pojedynczym odbiornikiem naziemnym *O* a satelitą *S* może być wykonane dwoma sposobami: fazowym i kodowym.

W ramach *sposobu fazowego* pomiar odbywa się na zasadzie stosowanej w dalmierzach elektromagnetycznych. Odległość oblicza się w oparciu o czas przebiegu fali od satelity do odbiornika ustawionego na szukanym punkcie, zaś czas – na podstawie przesunięcia fazowego fal elektromagnetycznych emitowanych przez przyrząd naziemny i odbieranych z satelity. Podany sposób wyznaczenia odległości jest wtedy słuszny, gdy obydwa źródła sygnałów generują je dokładnie w tych samych momentach czasu. Jednak wskutek nieuniknionych błędów, zegary na pokładzie satelity i w odbiorniku nie wskazują idealnie jednakowego czasu, toteż emisja identycznych kodów sygnałów nie nastąpi dokładnie w tej samej chwili, co spowoduje błąd wyznaczonej odległości, zwanej *pseudoodległością*.

Ponieważ czas określany przez satelity jest dokładnie mierzony i synchronizowany przez segment kontrolny, toteż można przyjąć, że wszystkie odległości wyznaczane przez odbiornik obarczone są tym samym błędem zegarowym, a więc obok szukanych współrzędnych stanowi on czwartą niewiadomą, co powoduje, że do wyznaczenia wszystkich niewiadomych potrzebny jest pomiar pseudoodległości do czterech satelitów. Pomierzone odległości są obarczone błędami, wynikającymi z niedokładności: pomiaru czasu, określenia orbity satelity i jego położenia w momencie pomiaru, wpływu jonosfery i troposfery na bieg fali elektromagnetycznej. Wyznaczenie pozycji za pomocą kodu *C/A* zapewnia dokładność rzędu ok. ±30 m, lecz wcześniej była ona zmniejszana poprzez celowe działanie, nazywane *intencjonalnym pogorszeniem jakości sygnału* i oznaczane symbolem S/A. Zakłócanie S/A polegało na wprowadzaniu błędów do: odczytu zegara i danych orbitalnych, przez co dokładność pozycji została obniżona do ±100 m. Zainteresowanie techniką GPS wśród użytkowników cywilnych spowodowało wyłączenie szumu S/A od 1 maja 2000 r.

Użycie kodu *P* do wyznaczania odległości pozwala na uzyskanie znacznie wyższej dokładności położenia punktu rzędu kilku metrów. Na dokładność wyznaczenia wpływa także geometryczna konstrukcja samego wcięcia liniowego, wynikająca z aktualnej ilości i konfiguracji satelitów na sferze niebieskiej w momencie pomiaru. Dokładność opisanej wyżej metody bezwzględnej zadawalająca dla większości użytkowników GPS do celów nawigacyjnych jest niewystarczająca dla potrzeb geodezji. Podobnie jak podczas pomiaru długości dalmierzami elektromagnetycznymi długość fali radiowej emitowanej przez satelitę pełni rolę „przymiaru elektronicznego”, a zatem mierzona odległość *d* pomiędzy satelitą a odbiornikiem wyraża się wzorem:



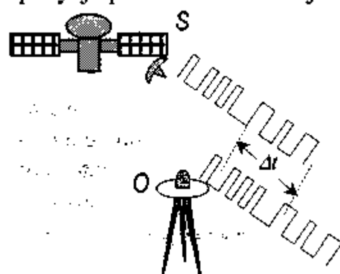
Rys. 2.22. Wyznaczenie przesunięcia fazowego

$$d = \lambda (n + r) \tag{2.12}$$

gdzie: λ – długość fali pomiarowej,
r – niecałkowita część długości fali (faza),
n – ilość pełnych długości fali pomiarowej zawartych w mierzonym odcinku.

Końcówkę można stosunkowo łatwo wyznaczyć na podstawie pomiaru reszty fazy r tj. *przesunięcia fazowego* fali nośnej wysyłanej i odbieranej, natomiast trudniejsze jest określenie całkowitej liczby n pełnych długości fal. Ponieważ obserwowany satelita porusza się po orbicie, a zatem zmienia się jego odległość d od punktu naziemnego, co z kolei powoduje zmianę Δn ilości pełnych cykli długości fali (rys. 2.22): $\Delta n = n_2 - n_1$. Zmiana ta zostaje zarejestrowana przez odbiornik GPS, dzięki czemu dysponując danymi zapisanymi przez drugi odbiornik można dokładnie określać pozycje punktów obserwacji.

Sposób kodowy pomiaru pseudoodległości polega na jej określeniu na podstawie przesunięcia kodów fal zmodulowanych nałożonych na fale nośne (rys. 2.23). W odbiorniku emitowana jest i sterowana przez własny zegar kwarcowy replika kodu wysyłanego z satelity, zaś jednocześnie odbierany jest kod satelitarny. Jego porównanie z kodem odbiornika umożliwia wyznaczenie przesunięcia obu kodów, a następnie obliczenie różnicy czasowej Δt pomiędzy momentami wysłania sygnału z satelity i odbioru tego sygnału w odbiorniku. Znając prędkość v rozchodzenia się sygnału, obliczymy pseudoodległość d jako:



Rys. 2.23. Zasada pomiaru odległości GPS sposobem kodowym

$$d = v \cdot \Delta t.$$

2.6.5. Odbiorniki GPS

Dla wyznaczenia pozycji odbiornik GPS musi odbierać i śledzić sygnały satelitarne, aby mierzyć pseudoodległości i przyrosty pseudoodległości oraz kolekcjonować depeszę nawigacyjną. Dobre odbiorniki geodezyjne powinny umożliwiać stosowanie różnych metod pomiaru pseudoodległości poprzez pracę na dwóch częstotliwościach (L_1, L_2) i odbieranie różnych kodów (*C/A*, *P* lub *Y*), działanie w systemie RTK, zapewniać rejestrację danych i posiadać odpowiednie oprogramowanie. W zależności od konstrukcji odbiornika, dostosowanej do określonego sposobu pomiaru odległości rozróżniamy odbiorniki:

- kodowe (nawigacyjne),
- kodowo-fazowe.

Odbiorniki kodowe oparte na pomiarze opóźnienia kodów rejestrują i wykorzystują informacje zawarte w kodach *C/A* oraz *P*. Odznaczają się szybkim działaniem i dokładnością wyznaczenia pozycji rzędu kilku metrów. Znajdują więc zastosowanie w nawigacji i w dziedzinach, gdzie nie jest wymagana wysoka precyzja określenia położenia, a pożądany jest krótki czas rejestracji np. w marynarce, lotnictwie, do monitoringu transportu, jako zabezpieczenie pojazdu przed kradzieżą itp.

Odbiorniki kodowo-fazowe wyróżniają się tym, że oprócz opóźnienia kodowego rejestrują także przesunięcia fazowe fal nośnych, co dzięki zastosowaniu metody różnicowej pozwala na uzyskiwanie dokładności wymaganej w geodezji.

Drugim kryterium podziału odbiorników GPS jest rozróżnianie odbiorników *jednoczęstotliwościowych* i *dwuczęstotliwościowych*. Odbiorniki jednoczęstotliwościowe umożliwiają odbiór sygnałów przenoszonych przez częstotliwość L_1. Znajdują zastosowanie do pomiaru metodą statyczną, przy odległościach pomiędzy punktami nie przekraczających 20 km. Charakteryzują się prostą budową, lecz w porównaniu z odbiornikami dwuczęstotliwościowymi, są mniej dokładne.

W geodezji przy zastosowaniu metody różnicowej z reguły wykorzystywane są droższe odbiorniki dwuczęstotliwościowe, odbierające sygnały przekazywane za pomocą obu rodzajów fal nośnych o częstotliwościach: L_1, L_2. Zaletą tych odbiorników jest eliminowania wpływu jonosferycznych zakłóceń sygnału, co przy długotrwałych sesjach obserwacyjnych umożliwia korelację danych pomiarowych na punktach oddalonych od siebie o tysiące kilometrów.

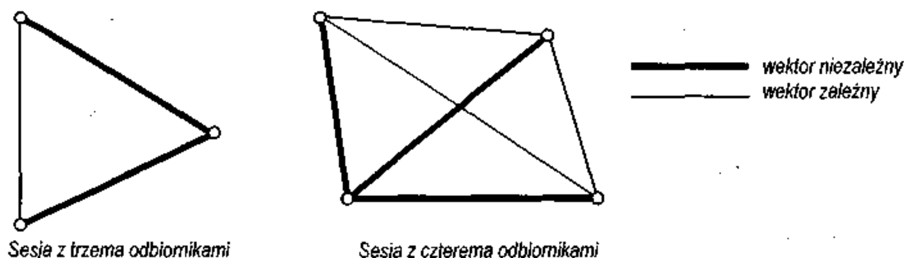
Odbiorniki GPS używane do pomiarów geodezyjnych są urządzeniami automatycznymi, sterowanymi za pomocą mikrokomputerów, wyposażonych w odpowiednie oprogramowanie. Praca operatora tego sprzętu sprowadza się do ustawienia instrumentu na wybranym stanowisku, pomierzenia wysokości anteny odbiornika, wpisaniu danych pomiarowych i numeru stanowiska do pamięci przyrządu. Dalsze czynności związane z wyznaczeniem położenia anteny odbiornika przez cały czas trwania sesji obserwacyjnej wykonywane są automatycznie. Mikrokomputer kieruje pracą odbiornika według ustawionych wcześniej parametrów, dokonuje kontroli jakości obserwacji oraz ocenia ich dokładność. Operator może sprawdzać efekty pracy odbiornika poprzez informacje dotyczące: przebiegu sesji, jakości sygnałów i dokładności wyznaczenia położenia anteny. Odpowiednie komunikaty są sukcesywnie wyświetlane na ekranie urządzenia, co pozwala na ustalenie czasu zakończenia pracy. Rezultaty pomiarowe z całej sesji są rejestrowane w pamięci odbiornika, której pojemność umożliwia zapisanie danych z kilkudziesięciu godzin pracy odbiornika. W pomiarach tego typu wykorzystuje się fakt, iż przemieszczenia anteny odbiornika GPS, nie tracącej kontaktu z sygnałami satelitarnymi mogą być natychmiast wyznaczone z dużą dokładnością. Rozpoczynając pomiar od punktu o znanych współrzędnych, możemy wyznaczać pozycje kolejnych punktów z dokładnością centymetrową, z czasem pobytu na punkcie rzędu sekund. Zasadniczą różnicą, istotną dla użytkownika przy wyborze odpowiedniego typu urządzenia, jest sposób inicjalizacji pomiarów kinematycznych. Odbiorniki dwuczęstotliwościowe mogą być inicjalizowane w ruchu, co w praktyce oznacza, że odbiornik może rozpoczynać i kontynuować pracę w trybie kinematycznym bez potrzeby umieszczania anteny na punkcie o znanych współrzędnych. Dla inicjalizacji odbiornika jednoczęstotliwościowego niezbędne jest umieszczenie anteny na punkcie o znanych współrzędnych. W braku takiego punktu konieczne jest wykonanie pomiaru opisanymi dalej metodami: *Static* lub *Fast Static*. Różnice pomiędzy odbiornikami jedno- i dwuczęstotliwościowymi stają się bardziej widoczne przy pomiarach wykonywanych na średnich i dużych odległościach. Błąd odbiornika jednoczęstotliwościowego wzrasta znacznie szybciej wraz ze wzrostem odległości od bazy niż błąd odbiornika dwuczęstotliwościowego

2.6.6. Geodezyjne metody pomiaru przy użyciu technologii GPS

Uzyskanie dokładności pomiarów GPS na poziomie zgodnym z geodezyjnymi standardami technicznymi wymaga użycia specjalnych technik obserwacyjnych, bardzo dobrych odbiorników i zaawansowanych algorytmów obliczeniowych. Jak wiadomo z ust. 2.6.4. wyznaczenie pozycji odbiornika może się odbywać dwoma sposobami tj. poprzez pomiary *bezwzględne* i *względne*. Pierwszy mało dokładny sposób opiera się na wyznaczeniu położenia stanowiska odbiornika za pomocą pseudoodległości, które są obarczone licznymi błędami. Sposób drugi jest dokładny, przez co wykorzystuje się go dla potrzeb geodezji i polega na pomiarach względnych różnic współrzędnych (wektorów), łączących stacje referencyjne. Dla potrzeb geodezyjnych wyznacza się wektory o długościach do kilkuset kilometrów, przy dokładności pomiaru długości wektora rzędu kilku milimetrów.

Pomiar taki wykonuje się przy użyciu pary odbiorników, czas wykonania pomiaru wynosi, zależnie od odległości pomiędzy odbiornikami i warunków widoczności satelitów, do kilkudziesięciu minut. Pomiary wykonywane techniką GPS stanowią istotną konkurencję dla pomiarów geodezyjnych wykonywanych metodami tradycyjnymi a przy tworzeniu sieci wyższego rzędu są regułą ze względu na dokładność i niskie koszty.

Metoda różnicowa GPS (*DGPS*) polega na kodowych pomiarach różnicowych na podstawie wyznaczenia pseudoodległości. Pozwala ona na korygowanie niektórych błędów systemu przy wykorzystaniu błędów zaobserwowanych w miejscu o znanej lokalizacji, które następnie są używane do skorygowania odczytów nieznanej pozycji drugiego odbiornika. Podstawą korekcji jest to, że dla odbiornika stacji referencyjnej pozycja własna jest znana, zaś określona zostaje różnica pomiędzy zadanym położeniem a położeniem wyznaczonym przez odbiornik GPS. Uzyskana w ten sposób różnica jest następnie przesyłana do drugiego odbiornika, który może poprawić obliczone przez siebie pozycje. Stacja referencyjna o znanej pozycji oblicza błędy w pomiarze pseudoodległości oddzielnie dla każdego satelity, będącego w jej polu widzenia i nadaje informację o błędach oraz informację o statusie systemu. Odbiornik radiowy drugiego przyrządu odbiera i dekoduje tę informację, a następnie wysyła ją do swego odbiornika GPS, który łączy odebraną informację z własnymi pomiarami pseudoodległości, po czym uwzględniając odpowiednie poprawki oblicza swoją pozycję.



Rys. 2.24. Wektory sieci GPS

Wszelkie pomiary geodezyjne są pomiarami różnicowymi (względnymi) – DGPS, do czego konieczne jest posiadanie przynajmniej dwóch odbiorników, równocześnie odbierających i gromadzących sygnały wysyłane przez satelity systemu. W tym przypadku istnieje możliwość określenia pojedynczego przestrzennego wektora. Zwiększenie liczby odbiorników do trzech daje również 3 wektory, zaś przy czterech odbiornikach liczba wektorów wzrasta do 6 (rys. 2.24).

Łączna liczba w wektorów między punktami sieci GPS przy zastosowaniu n odbiorników wyraża się wzorem:

$$w = \frac{n(n-1)}{2} \tag{2.13}$$

w tym liczba wektorów niezależnych wynosi: $w_n = n - 1$.

Odebrane i zgromadzone w pamięci odbiornika sygnały wysłane przez satelity należy następnie poddać procesowi obliczeniowemu, określanemu jako *postprocessing*.

Do pomiaru technologią GPS są w geodezji stosowane następujące metody:

Metoda statyczna (*Static*) jest powszechnie stosowana w geodezji do pomiaru osnów, zapewniając dokładność położenia punktu rzędu ok. 1 cm. Dla pomiarów osnowy

szczegółowej stosuje się przynajmniej cztery odbiorniki obserwujące w tym samym czasie minimum cztery satelity w czasie od 30 do 90 minut.

Metoda pseudostatyczna jest metodą nie wymagającą długiego czasu obserwacji i dużej liczby odbiorników. Metoda ta opiera się na założeniu, że określona w pierwszych dziesięciu minutach nieoznaczoność liczby cykli fazowych nie ulega istotnym zmianom. Na wybranym punkcie referencyjnym umieszcza się stały odbiornik, zaś jeden lub więcej odbiorników przemieszcza się pomiędzy punktami wyznaczanymi, zatrzymując się na każdym z nich przez 5–10 minut. Po przejściu wszystkich punktów pomiar na tych samych stanowiskach powtarza się jeszcze raz lub dwa razy, przy czym ponowny powrót na ten sam punkt powinien nastąpić w czasie nie przekraczającym jednej godziny. W trakcie przemieszczania się odbiorniki są włączone, lecz wyniki pomiarów podczas ruchu nie są włączane do obliczeń. Błędy położenia uzyskiwane w wyniku zastosowana metody pseudostatycznej są rzędu 3-4 cm.

Metoda szybka, statyczna (*Fast Static*) jest metodą podobną do poprzedniej, tzn. jeden z odbiorników tzw. odbiornik bazowy jest stały i gromadzi obserwacje podczas całej sesji, natomiast pozostałe odbiorniki przemieszczają się między punktami, dokonując na nich krótkotrwałych obserwacji (w czasie od kilku do kilkudziesięciu minut). Odbiorniki ruchome są ustawiane na określonym punkcie wyznaczanym tylko jeden raz. Z tego powodu osiągane wyniki są nieco mniej dokładne niż w metodzie pseudostatycznej. Wspólną cechą metod statycznych jest to, że odbiorniki w trakcie ich przemieszczania pomiędzy punktami są wyłączane lub obserwacje dokonane w ruchu nie są uwzględniane.

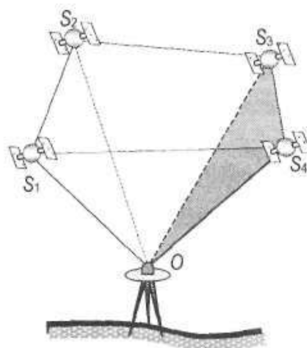
Oprócz pomiarów statycznych, podczas których wszystkie odbiorniki biorące udział w sesji pomiarowej pozostają przez dłuższy czas na swych stanowiskach, wykonywane są również *pomiary kinematyczne* (dynamiczne), kiedy jeden odbiornik stacjonarny ustawiony na punkcie znanym pełni rolę stacji bazowej, zaś inne odbiorniki, pozostając przez cały czas w łączności radiowej ze stacją bazową, są przemieszczane w celu zdjęcia zmieniających się punktów wyznaczanych. Jej zasięg ograniczony jest do promienia kilkunastu kilometrów od stacji bazowej. Stacje ruchome odbierają zarówno sygnały z satelitów jak i ze stacji bazowej, zaś ta otrzymując sygnały z satelitów i stacji ruchomych oblicza ich pozycje we własnym układzie współrzędnych. Na bieżąco realizowany jest algorytm transformacji współrzędnych geocentrycznych na dowolny układ np. układ „2000". Mamy tutaj do czynienia z techniką GPS określaną skrótem RTK (*Real Time Kinematics*), czyli metodą pomiaru zapewniającą wyniki w czasie rzeczywistym. Stanowi ona odpowiednik pomiaru tachimetrycznego, ponieważ położenie punktu ruchomego otrzymuje się niemal natychmiast. Metoda RTK nie jest zalecana do pomiaru osnów geodezyjnych, lecz może być wykorzystywana do pomiarów sytuacyjnych, drogowych i realizacyjnych, polegających na wynoszeniu w teren projektów inżynierskich.

Nowy punkt osnowy geodezyjnej wyznaczany za pomocą technologii GPS powinien zapewniać odkryte niebo wokół stanowiska pomiarowego powyżej 10 – 15° nad horyzontem, ponieważ przy zbyt niskim położeniu obserwacje są obarczone błędami wynikającymi z refrakcji jonosferycznej i troposferycznej, a ponadto przeszkody zasłaniające niebo tamują dostęp do odbiornika sygnałów satelitarnych. Możliwe jest wykonywanie obserwacji z częściowo zakrytym horyzontem, lecz zapewniającym luki między przeszkodami (tzw. okna obserwacyjne), w których na określony czas pojawią się satelity, stwarzając w ten sposób możliwość odebrania wysyłanego przez nie sygnału. Zachodzi wtedy konieczność wydłużenia czasu trwania sesji pomiarowej.

Dokładność wcięcia liniowego realizowanego w technologii GPS zależy od rozmieszczenia w przestrzeni satelitów od których pochodzą odbierane sygnały. Do oceny odmiennych parametrów wpływających na dokładność wyznaczenia pozycji odbiornika stosowane są różnorodne współczynniki charakteryzujące tę dokładność:

*GDOP**	pozycja trójwymiarowa i poprawka zegara
PDOP	pozycja trójwymiarowa
HDOP	pozycja horyzontalna
VDOP	pozycja pionowa
TDOP	poprawka zegara
HTDOP	pozycja horyzontalna i czas.

Prawidłowość konfiguracji satelitów podczas wykonywania obserwacji ocenia się za pomocą *parametru PDOP*, którego wartość liczbowa jest odwrotnie proporcjonalna do objętości bryły utworzonej przez cztery satelity: S_1, S_2, S_3, S_4 i odbiornik O (rys. 2.25).



Rys. 2.25. Bryła określająca wartość parametru *PDOP*

Konfiguracja satelitów względem odbiornika jest tym lepsza im mniejsza jest wartość parametru *PDOP* (najczęściej poniżej 5).

$$PDOP \approx \frac{1}{V_{S1-S2-S3-S4-O}} \tag{2.14}$$

Ze względu na odbicia fal stanowiska odbiorników GPS należy projektować z dala od budynków, anten parabolicznych, ogrodzeń z blachy falistej, a szczególnie w odległości ponad 1 km od źródeł fal radiowych np. przekaźników TV. Sieć punktów wyznaczanych musi być geodezyjnie dowiązana do punktów osnowy poziomej i wysokościowej.

Zgodnie z instrukcją G-2 (wydanie V z r. 2000) do pomiaru sieci techniką GPS podczas trwania sesji obserwacyjnej używa się odbiorników dwuczęstotliwościowych z certyfikatem oraz jednakowych anten o określonej wysokości środka fazowego. Sesja powinna zapewnić otrzymanie rozwiązania całkowitej liczby cykli fazowych oraz dokładności obliczenia wektora z błędem średnim nie przekraczającym 10 mm. Według tejże instrukcji do pomiaru sieci techniką GPS należy używać:

1) odbiorników GPS jedno- lub dwuczęstotliwościowych, mających certyfikat zgodności, krajowy lub zagraniczny, uznawany w trybie obowiązujących przepisów;
2) anten o określonej wysokości środka fazowego anteny, przy zaleceniu korzystania w sesjach obserwacyjnych z anten tego samego typu.

W pomiarach osnowy szczegółowej obserwacje wykonuje się pomiędzy najbliższymi punktami sieci. Okres czasu obserwacji powinien zapewniać otrzymanie rozwiązania całkowitej liczby zaobserwowanych cykli fazowych i błędu średniego obliczenia wektora w danej sesji obserwacyjnej nie przekraczającego wartości ±10 mm. Wyznaczenie jednego przestrzennego wektora odpowiada pomiarowi dwóch elementów konstrukcji geometrycznej punktu: azymutu i długości boku.

---

* *GDOP* – ang. *geometric dilution of precision*.

Antena nad punktem powinna być ustawiona z dokładnością:

- dla punktów II klasy: w płaszczyźnie poziomej 2 mm i w wysokości 2 mm,
- dla punktów III klasy: w płaszczyźnie poziomej 5 mm i w wysokości 5 mm.

Szczegółowe informacje na temat technologii GPS zostaną podane na wykładach z geodezji satelitarnej i wyższej.

Tadeusz Gargula

2.7. Zastosowanie sieci modularnych do zakładania osnów pomiarowych

We współczesnych pomiarach sytuacyjno-wysokościowych coraz rzadziej stosowane są wielorzędowe układy linii pomiarowych i ciągów sytuacyjnych, natomiast nowoczesna metoda RTK GPS znajduje zastosowanie jeszcze wciąż w zbyt małym zakresie. Pojawia się luka, którą wypełnić może metoda sieci modularnych, dostosowana do możliwości technicznych powszechnie dostępnych instrumentów typu *total-station*.

2.7.1. Informacje wstępne

Na obecnym etapie rozwoju technologicznego w zakresie sprzętu oraz metod pomiarów geodezyjnych, a także metod opracowania wyników, coraz mniej atrakcyjne (oraz mało praktyczne) są metody klasyczne np. metoda ortogonalna, przedłużeń itp. Dodatkowo, od co najmniej kilkunastu lat obowiązują nas mocno nieaktualne instrukcje i wytyczne techniczne, zaś prace związane z aktualizacją przepisów geodezyjnych postępują w wolnym tempie i z wielkim trudem.

Abstrahując jednak od przyczyn takiej sytuacji, warto zwrócić uwagę na pewien naturalny kierunek zauważalny w praktyce geodezyjnej, polegający na dostosowywaniu się technik pomiaru do aktualnych możliwości sprzętowych. Powszechnie stosowany jest np. pomiar sytuacyjno-wysokościowy szczegółów terenowych z równoczesnym pomiarem osnowy, bez wcześniejszego etapu projektowego. Instrument ustawiany jest w miejscu najdogodniejszym, a nie nad założonym punktem osnowy. Takie postępowanie jest jak najbardziej racjonalne i uzasadnione, bowiem stosowane instrumenty *total station* zapewniają uzyskanie odpowiednich wskaźników dokładności wyznaczeń.

W konstrukcjach pomiarowych tego typu można się dopatrywać pewnych elementów tzw. **sieci modularnych**, którym poświęcone były wytyczne techniczne G-4.1 (z r. 1986). Sieci te określane są przez wspomniane wytyczne jako „zbiór wzajemnie powiązanych konstrukcji zwanych modułami". Pojedynczy moduł jest natomiast zbiorem obserwacji niezbędnych do wyznaczenia punktów pomierzonych na danym stanowisku.

Sieci modularne posiadają wiele praktycznych zalet, dających im przewagę nad klasycznymi technologiami zakładania osnowy pomiarowej. Jedną z nich jest szeroko pojęta elastyczność konstrukcji, rozumiana między innymi jako podatność na dostosowywanie do charakteru mierzonego obszaru, stosowanego sprzętu, sposobu opracowania wyników itp. Oprócz osnów pomiarowych pewne elementy sieci modularnych mogą również znaleźć efektywne zastosowanie jako prosty sposób polepszenia wartości technicznej sieci specjalnych (w pomiarach przemieszczeń i odkształceń obiektów). Mogą być one także wykorzystane w tworzeniu osnów miejskich, gdzie istnieje podstawowy problem związany z niską trwałością znaków stabilizowanych naziemnie. Korzystnym rozwiązaniem byłyby w tej sytuacji punkty ścienne (jako tzw. punkty wiążące), służące do zakładania tarcz celowniczych.

2.7.2. Geneza zagadnienia

Pojęcie „sieci modularnej" po raz pierwszy pojawiło się w polskim nazewnictwie geodezyjnym po opublikowaniu prac prof. J. Gaździckiego w latach osiemdziesiątych. Był to okres, kiedy do pomiarów masowych stosowano jeszcze autoredukcyjne tachimetry

optyczne. W początkowym zamyśle sieci modularne miały być metodą unifikującą szybkie tworzenie osnowy pomiarowej z równoczesnym pomiarem tachimetrycznym szczegółów sytuacyjno-wysokościowych. Opracowana metoda pomiarów została ujęta w wytycznych technicznych G-4.1 (GUGiK 1986). Pomimo przeprowadzenia w niektórych ówczesnych przedsiębiorstwach geodezyjnych specjalnych prób wdrożeniowych na wybranych obiektach, metoda ta nie znalazła później szerszego zastosowania praktycznego. Jedną z istotnych barier był wtedy ograniczony dostęp do techniki komputerowej jako istotnego składnika kosztu realizacji przedsięwzięcia. Tymczasem w opracowaniach pomiarów sytuacyjno-wysokościowych stosowano jeszcze wtedy dość powszechnie obliczenia manualne, wspomagane kalkulatorami. Ten system dotyczył również opracowania osnów pomiarowych, zakładanych typowo w postaci ciągów sytuacyjnych i wielorzędowych układów linii pomiarowych. Drugą przyczynę braku zainteresowania sieciami modularnymi można widzieć w samej merytorycznej części wytycznych G-4.1. Od wykonawcy wymagały one bowiem projektowania konstrukcji sieci (rozmieszczenie stanowisk i punktów wiążących, zachowania specjalnych wymogów geometrycznych) przy nieco trudniejszych (szerszych) uwarunkowaniach niż w przypadku dobrze znanych technologii klasycznych. Można więc powiedzieć, że wykonawca „dla świętego spokoju" wolał nie komplikować sobie tradycyjnego wyobrażenia o pomiarach geodezyjnych.

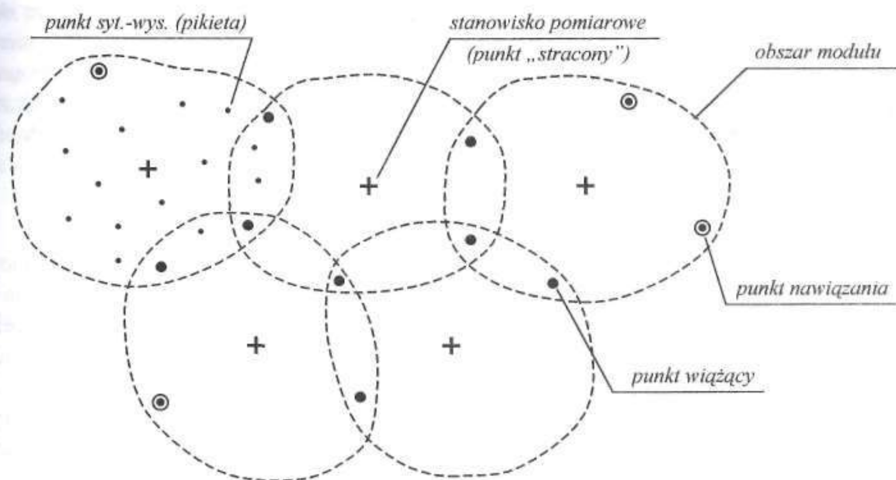
Idea geometryczna sieci modularnych ma podobieństwo do zadań fotogrametrii analitycznej, gdzie wyrównanie aerotriangulacji blokowej odbywa się poprzez jednoczesną transformację zdjęć lub modeli. Niektóre własności sieci modularnych wykorzystał R. Kadaj do opracowania geodezyjnego systemu obliczeniowego GEONET (zob. ust. 10.6).

2.7.3. Struktura geometryczna i własności topologiczne sieci modularnych

Z pojęciem sieci modularnej wiążą się cztery typy punktów geodezyjnych. Punkty nawiązania, podobnie jak w innych typach sieci, definiują powiązanie sieci z układem współrzędnych. Z założenia mogą być one niedostępne jako stanowiska instrumentu. Mogą pełnić również funkcję *punktów wiążących*, których zadaniem jest powiązanie (połączenie) sąsiadujących ze sobą modułów. Punkty wiążące pełnią zwykle rolę punktów celowania, gdyż oznaczają one miejsce ustawienia sygnału dla pomiaru kierunku lub (i) odległości. Ze względów praktycznych, zwłaszcza w miastach, punkty te mogą być umieszczane na ścianach budynków lub też stabilizowane jako znaki gruntowe. Funkcję punktów wiążących mogą też pełnić punkty sytuacyjne obiektów I grupy dokładnościowej o wyraźnych konturach, np. niektóre naziemne elementy uzbrojenia terenu. Dodatkowo, można też wykorzystać dowolne terenowe punkty orientacji (maszty, wieże).

Stanowiska pomiaru biegunowego mogą być traktowane jako punkty tymczasowe („stracone"), tzn. nie muszą być stabilizowane lub też mogą być oznaczane prowizorycznie w terenie jedynie na czas pomiaru. Zaletą praktyczną jest tutaj oszczędność czasu, gdyż nie ma potrzeby oznaczania punktu, a następnie centrowania nad nim instrumentu. W tym sensie, stanowiska pomiaru biegunowego w sieciach modularnych upodabniają się funkcjonalnie do stanowisk niwelatora w ciągu niwelacyjnym.

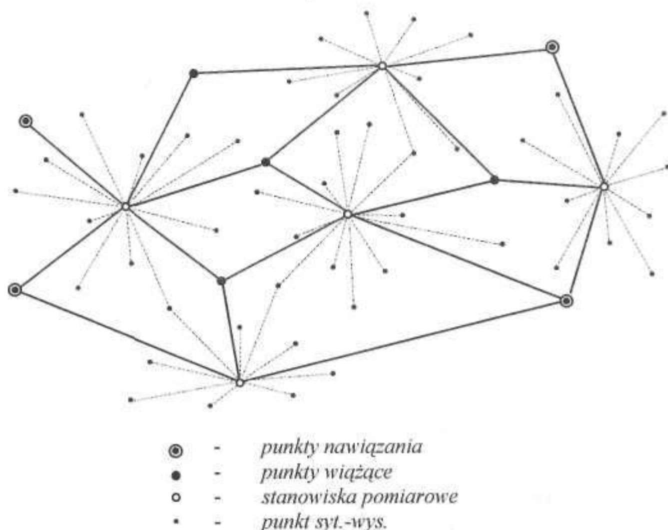
Punkty sytuacyjne, czyli punkty charakteryzujące położenie obiektu pomiaru, są również związane z samą strukturą sieci modularnej. Zgodnie z ideą sieci modularnych pomiar tych punktów odbywa się bowiem nierozłącznie z pomiarem osnowy.



Rys. 2.26. Ogólna struktura sieci modularnej

Na rys. 2.26 przedstawiono w sposób symboliczny ogólną strukturę sieci modularnej, jako konstrukcji złożonej z powiązanych wzajemnie ze sobą pojedynczych modułów. Pary sąsiednich modułów zawierają punkty wiążące (wspólne). W sieciach powierzchniowych, jeden punkt wiążący jest zwykle punktem wspólnym dla większej liczby modułów, np. trzech.

Obszar modułu wyznacza zbiór punktów wiążących oraz punktów sytuacyjnych podlegających pomiarowi na danym stanowisku. Moduły powiązane szeregowo ze sobą za pomocą par punktów wiążących tworzą tzw. *ciąg modularny*, który może być podstawą dla pomiaru obiektów o charakterze liniowym.

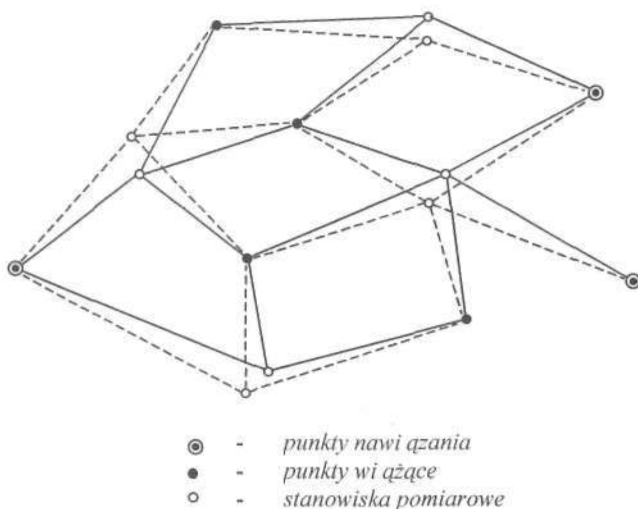


Rys. 2.27. Przykład powierzchniowej sieci modularnej

Zbiór pojedynczych, powiązanych ze sobą modułów tworzy powierzchniową *sieć modularną* (rys. 2.27). W praktyce zakładana sieć modularna posiada zwykle kształt nieregularny, zależny od rozmieszczenia punktów wiążących i stanowisk względem siebie oraz względem szczegółów sytuacyjnych. Konstrukcja geometryczna nie może być jednak zupełnie przypadkowa; powinna ona odpowiadać podstawowym wymogom wyznaczalności oraz niezawodności realizowanej sieci.

2.7.4. Elementy sieci modularnych

Pojedyncze moduły, obejmujące pełny zestaw obserwacji biegunowych, mogą być traktowane jako pewnego rodzaju *quasi-obserwacje*. Pojedyncza quasi-obserwacja to w istocie zbiór obserwacji odległościowo-kątowych, który wiąże wszystkie punkty celowania na danym stanowisku. Podobnie, jak w klasycznej sieci (np. poligonowej) dokonuje się kilkukrotnego pomiaru długości lub kąta, tak w sieci modularnej nic nie stoi na przeszkodzie, aby każdą quasi-obserwację powtórzyć z zupełnie odmiennych stanowisk (rys. 2.28), przy czym za każdym razem, stanowiska mogłyby być traktowane jako punkty stracone (bez stabilizacji). Taki sposób postępowania zapewnia zwiększenie dokładności wyznaczenia punktów wiążących. Stanowiska pełnią w tym procesie rolę pośrednią.

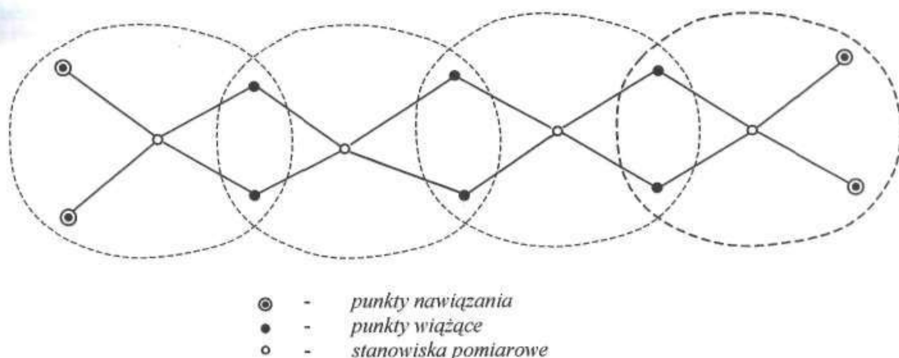


Rys. 2.28. Powtórzenie quasi-obserwacji w sieci modularnej.

Sieć modularna zdefiniowana przez autorów wytycznych G-4.1 jest siecią powierzchniową o jednorodnej konstrukcji. W praktyce mogą być zakładane sieci innych typów, związane z konstrukcją modularną, lecz niekoniecznie o charakterze powierzchniowym czy o jednorodnej strukturze. Typ stosowanej sieci może być podyktowany wieloma czynnikami, m.in. charakterem mierzonego obiektu, stopniem zainwestowania, wymaganych dokładności itp. Na rys. 2.29 przedstawiono przykładową postać tzw. *ciągu modularnego*, który należy traktować jako szczególny przypadek sieci modularnej.

Określenie „ciąg modularny" jest propozycją nazwania konstrukcji złożonej z szeregu pojedynczych modułów, powiązanych ze sobą za pomocą par punktów wiążących. Standardowo w skład modułu w ciągu modularnym wchodzą więc dwie pary punk-

tów wiążących oraz stanowisko biegunowe. Nawiązanie ciągu modularnego następuje poprzez powiązanie modułu początkowego i modułu końcowego z punktami osnowy wyższego rzędu. Punkty nawiązania zastępują w każdym z tych modułów jedną parę punktów wiążących. Ciąg modularny może być stosowany jako osnowa do pomiaru wąskiego wydłużonego pasa terenu lub obiektów o charakterze liniowym, np. drogi, linie kolejowe, cieki itp.



◉ - *punkty nawiązania*
● - *punkty wiążące*
○ - *stanowiska pomiarowe*

Rys. 2.29. Ciąg modularny

2.7.5. Zagadnienia obliczeniowe

Opracowanie numeryczne sieci modularnych (według wytycznych G-4.1) polega na przeprowadzeniu wyrównania transformacyjnego i analizie dokładności wyznaczanych punktów. Zaprezentowany tam algorytm pozwala na przybliżone wyrównanie sieci. Obecnie natomiast, przy istniejących możliwościach programów obliczeniowych i sprzętu komputerowego, nie ma żadnych przeszkód, aby stosować wyrównanie ścisłe. Do tego celu potrzebne są jednak współrzędne przybliżone dla wszystkich punktów wyznaczanych. W przeszłości istotną barierą dla tego problemu była pracochłonność obliczeń i z tego względu zakładano relatywnie wysoką dokładność współrzędnych przybliżonych (do ±0,2 m), tak aby wyrównanie sieci mogło się odbyć w jednym cyklu obliczeniowym. Wielokrotne przeprowadzanie całego procesu wyrównawczego przy każdorazowej aktualizacji współrzędnych przybliżonych nie wiąże się obecnie ze wzrostem kosztów obliczeń. Przy takim podejściu do zagadnienia uzyskujemy pewność, że wpływ błędu systematycznego obserwacji będzie znacznie ograniczony. Początkowe współrzędne przybliżone mogą mieć niewielką dokładność, nawet rzędu 30% długości boku (co można osiągnąć nawet przy wyznaczeniu graficznym). Chodzi bowiem tylko o to, aby układ punktów określonych przez te współrzędne przybliżone odzwierciedlał ogólną strukturę geometryczną sieci.

Tak więc opracowanie numeryczne sieci modularnych (koncepcja alternatywna wobec propozycji wytycznych G-4.1) będzie się składało z dwóch etapów. Pierwszy etap obejmuje obliczenie współrzędnych przybliżonych, drugi zaś, wyrównanie ścisłe metodą najmniejszych kwadratów. Konstrukcja układu równań poprawek będzie zależna od wymiaru sieci. W przypadku sieci modularnych możemy mieć do czynienia z wyrównaniem sieci płaskich (dwuwymiarowych) lub przestrzennych (trójwymiarowych). Sieci przestrzenne możemy z kolei wyrównywać w dwóch niezależnych procesach: wyrównanie współrzędnych prostokątnych, płaskich X, Y oraz wyrównanie różnic wysokości

(jako sieci jednowymiarowych). Inną możliwością jest jednoczesne wyrównanie całego układu obserwacyjnego sieci przestrzennej.

Rozwiązanie przybliżone

W konstrukcji algorytmu obliczeń współrzędnych przybliżonych w sieciach modularnych pojawia się problem niewyznaczalności *modułów elementarnych*. Moduły elementarne są to podzbiory 2, 3 lub większej liczby punktów sieci, wyznaczanych przez poszczególne obserwacje (długość, kąt, azymut) lub quasiobserwacje (pęk kierunków lub obserwacji biegunowych na danym stanowisku). Wyrażony numerycznie moduł elementarny to wykaz współrzędnych dla punktów modułu, określonych w dowolnym, lokalnym układzie współrzędnych. *Moduły wyznaczalne wewnętrznie* to takie, w których lokalne współrzędne punktów możliwe są do określenia na podstawie posiadanych miar. W *module niewyznaczalnym wewnętrznie* brakuje jakiejś miary do pełnego zdefiniowania wzajemnego położenia punktów. Przykładem modułu niewyznaczalnego jest kąt, którego jedno ramię nie ma określonej długości. Innym przykładem może być pęk kierunków bez określonych długości celowych. W procesie obliczania współrzędnych przybliżonych biorą jednak udział zarówno moduły wyznaczalne jak i niewyznaczalne.

Rozwiązaniem problemu niewyznaczalności wewnętrznej modułów jest zastosowanie algorytmu działającego na zasadzie powtórzeń (iteracji): elementy brakujące (kąty, długości) obliczane są w oparciu o wielkości (współrzędne punktów) wyznaczone już w poprzednim powtórzeniu. Na takiej zasadzie funkcjonuje np. jeden z podprogramów systemu obliczeniowego GEONET.

Problematyka wyrównania ścisłego

Klasyczne sieci modularne z założenia dotyczą osnów pomiarowych. Ze względów praktycznych i dokładnościowych (dobór stanowiska w dowolnym miejscu, eliminacja błędu centrowania), można je jednak stosować również jako sieci specjalne (np. do obsługi budów) lub jako precyzyjne sieci realizacyjne. Kryteria wyrównania ścisłego będą więc zróżnicowane w zależności od przeznaczenia sieci. W świetle przepisów technicznych powinniśmy przyjąć średni błąd wyznaczenia punktu osnowy pomiarowej poziomej poniżej 0,20 m oraz wysokościowej poniżej 0,05 m. Otrzymane błędy po wyrównaniu nie mogą przekraczać tych wartości, niezależnie od metody opracowania wyników. Wyrównanie obserwacji metodą transformacyjną według algorytmu przedstawionego w istniejących wytycznych G-4.1, pozwala uzyskać powyższe dokładności przy zachowaniu parametrów pomiarowych wymaganych przez instrukcję G-4. Jednak przy obsłudze geodezyjnej obiektów, dla których istnieją wyższe wymagania dokładnościowe, odpowiednią metodą opracowania wyników będzie wyrównanie ścisłe według procedury najmniejszych kwadratów. Obecnie, gdy prace obliczeniowe wykonujemy przy użyciu komputerów coraz nowszych generacji, nic nie stoi na przeszkodzie, by wyrównanie ścisłe stosować w każdym przypadku, a więc także dla każdej sieci przeznaczonej do oparcia klasycznych pomiarów sytuacyjno-wysokościowych. Nie wiąże się to bowiem ze znaczącym wzrostem kosztów czy czasu wykonania prac z tym związanych.

Modyfikacja koncepcji wyrównania transformacyjnego

Obok tradycyjnie stosowanej metody pośredniczącej innym sposobem wyrównania ścisłego punktów sieci modularnej jest *wyrównanie transformacji wielogrupowej* według metody najmniejszych kwadratów. Wiąże się to z koniecznością modyfikacji kla-

sycznej metody opracowania sieci modularnych. Zadanie związane z wyznaczeniem parametrów transformacji modułów (2 parametry translacji i 1 parametr obrotu dla każdego modułu) oraz poprawek do bezpośrednich obserwacji kierunków i długości, sprowadza się do ogólnego problemu nieliniowego wyrównania obserwacji zawarunkowanych z niewiadomymi metodą najmniejszych kwadratów.

Sposób obliczania sieci modularnych przyjęty w wytycznych G-4.1 ma bardzo istotne znaczenie, gdyż pozwala wyznaczyć przybliżone wartości niewiadomych współrzędnych punktów sieci w prostym liniowym zadaniu metody najmniejszych kwadratów. Nie jest to jednak sposób ścisły ze względu na brak pełnej informacji dokładnościowej (stochastycznej) o procesie pomiarowym. Dlatego samo wyrównanie transformacyjne nie może stanowić ostatecznego produktu opracowania sieci modularnej, lecz jedynie produkt przybliżony. Zaletą metody klasycznej jest również możliwość wyznaczenia błędów średnich wektora translacji oraz błędu średniego orientacji modułu. Te wielkości mogą z kolei posłużyć do obliczenia błędów położeń punktów sytuacyjnych (pikiet) z prawa przenoszenia się błędów średnich.

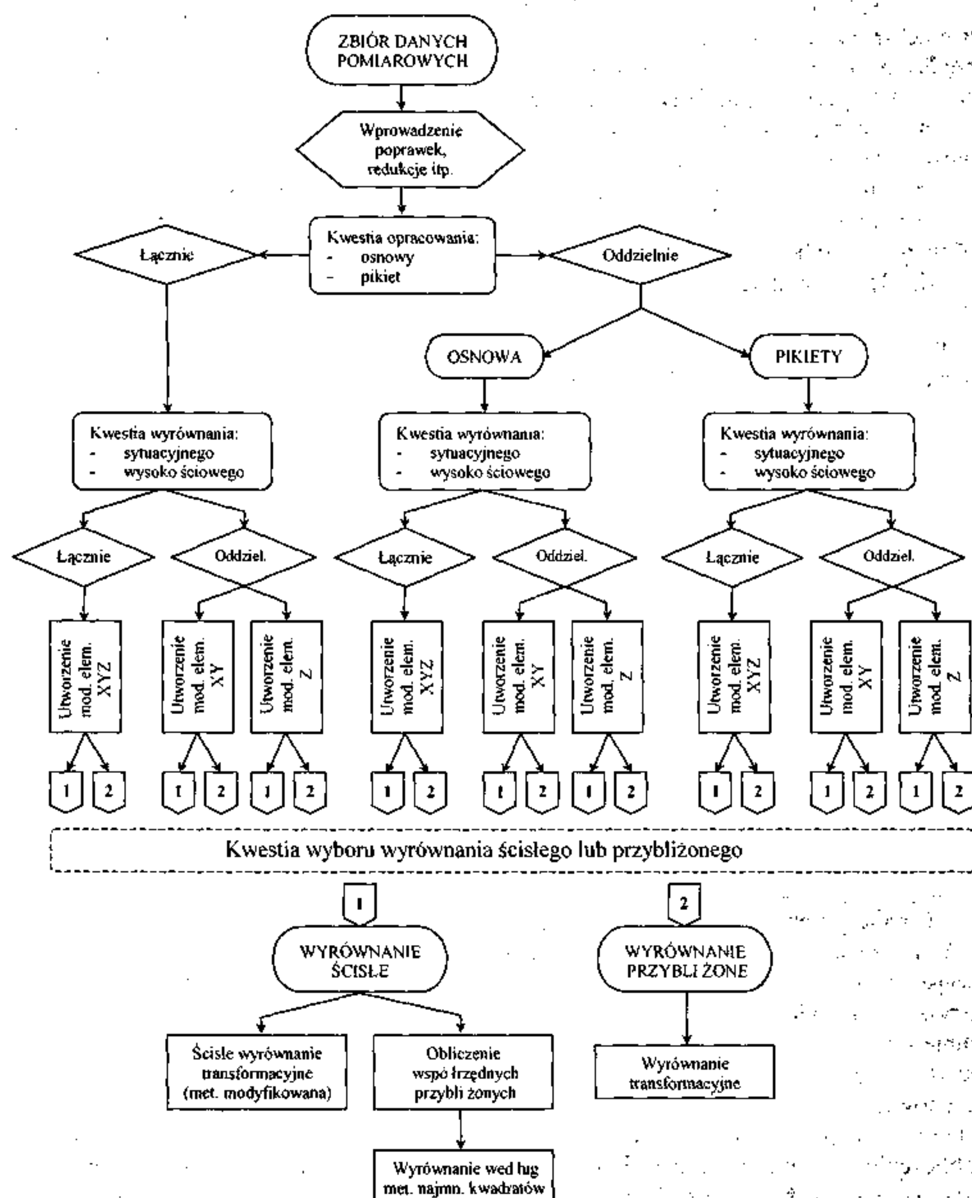
Idea wyrównania transformacyjnego sieci modularnych została przejęta z aerotriangulacji analitycznej, gdzie opracowanie zdjęć odbywa się na zasadzie transformacji wielogrupowej modeli (wytyczne techniczne G-1.8). Metoda klasyczna opracowania sieci modularnych bazuje na znanych wzorach transformacji liniowej. Problematyka opracowania sieci modularnych wiąże się z transformacją wielogrupową, polegającą na jednoczesnym przetworzeniu współrzędnych wielu grup punktów (pojedynczych modułów) do układu wspólnego. Każdy moduł ma określone współrzędne w swoim układzie lokalnym, a układem docelowym jest układ globalny określony przez punkty stałe sieci.

Dla dowolnej sieci modularnej możemy określić model funkcjonalny prowadzący do układu równań warunkowych z niewiadomymi. Wielkości niewiadome w tym układzie to parametry transformacji (różne dla każdego modułu). Przy założeniu pełnej wyznaczalności wewnętrznej modułu (znane wszystkie długości celowych) wyszczególnić można dwa rodzaje warunków: na punkty wiążące oraz warunki na punkty nawiązania.

Zasada konstrukcji algorytmu obliczeniowego

Metodologia obliczeniowa dla sieci modularnych będzie się różniła nieco od przypadków tradycyjnych sieci pomiarowych, przede wszystkim ze względu na zastosowanie przekształceń transformacyjnych. Wynika to z faktu odmienności konstrukcji tego typu sieci. O ile w skład sieci pomiarowej, złożonej np. z ciągów sytuacyjnych, wchodzą punkty będące zazwyczaj stanowiskami instrumentu i punktami celu, to w sieci modularnej istnieje grupa punktów wiążących, pełniących tylko funkcję punktów celowania. Stąd też inaczej wygląda struktura obserwacji łączących z sobą poszczególne punkty. Etapem wyjściowym w każdym procesie obliczeniowym jest przygotowanie zbioru obserwacji uzyskanych podczas prac pomiarowych. Dla sieci modularnej będziemy tworzyć wiele mniejszych podzbiorów obserwacji, stanowiących tzw. *moduły elementarne*. Następnym krokiem będzie połączenie tych modułów w jedną całość na zasadzie transformacji wielogrupowej. Uzyskane w ten sposób współrzędne przybliżone umożliwiają wyrównanie ścisłe obserwacji, co daje możliwość precyzyjnego wyznaczenia punktów sieci. Metodologia obliczeniowa to nie tylko kwestia wyrównania ścisłego lub przybliżonego. Istotne znaczenie ma tutaj wiele innych czynników, np. podział sieci na płaskie i przestrzenne, zagadnienie obliczenia pikiet (łącznie z siecią lub oddzielnie), typy tworzonych modułów elementarnych dla sieci sytuacyjno-wysokościowych (moduły przestrzenne lub płaskie

i wysokościowe) itp. Wybór zmodyfikowanej metody klasycznej jako sposobu opracowania ścisłego, oprócz współrzędnych przybliżonych, pozwala uzyskać ścisłe wyrównanie sieci, a także daje możliwość oceny dokładności (na podstawie odpowiednich podmacierzy kowariancji). Schemat konstrukcji algorytmu opracowania sieci modularnej pokazano na rys. 2.30.



Rys. 2.30. Schemat konstrukcji algorytmu opracowania sieci modularnej

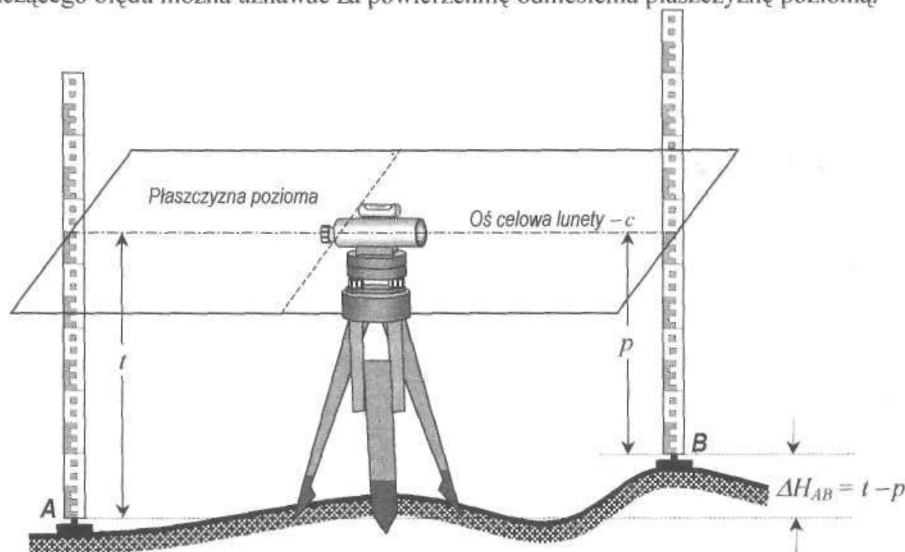
B. TECHNOLOGIE ZAKŁADANIA OSNÓW WYSOKOŚCIOWYCH

2.8. Niwelacja geometryczna

Zasada niwelacji geometrycznej technicznej oraz jej zastosowania zostały szczegółowo omówione w podręczniku „*Geodezja I*", przypomnijmy jednak, że niwelacja geometryczna polega na zbudowaniu nad powierzchnią terenu płaszczyzny poziomej zwanej poziomem geometrycznym oraz określeniu przy użyciu niwelatora i łat niwelacyjnych odległości pionowych: t, p (odczytów) pomiędzy tą płaszczyzną a punktami terenowymi A, B, dla których określamy różnicę wysokości (rys. 2.31):

$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A = t - p \tag{2.15}$$

Zaletą niwelacji geometrycznej, której podstawową zasadę wyraża powyższy wzór oraz ilustruje rys. 2.31, jest jej prostota pojęciowa i rachunkowa, a jednocześnie możliwa do osiągnięcia wysoka dokładność pomiaru różnicy wysokości. Dotyczy to szczególnie niwelacji technicznej wykonywanej na małym obszarze, dla którego bez popełnienia znaczącego błędu można uznawać za powierzchnię odniesienia płaszczyznę poziomą.



Rys. 2.31. Ogólna zasada niwelacji geometrycznej

Niwelacja precyzyjna stosowana do pomiaru wysokościowej osnowy podstawowej wykonywana jest o wiele dokładniej (dokładność odczytu 0,1 mm lub wyższa), a ponadto zasięg tej osnowy obejmuje bardzo duży obszar, którym dla sieci kl. I jest terytorium całego kraju. Z tych względów przy opracowaniu pomiarów wysokościowych osnowy podstawowej zachodzi konieczność uwzględniania krzywizny Ziemi oraz zmian potencjału siły ciężkości (nierównoległości powierzchni ekwipotencjalnych) występujących w różnych punktach na powierzchni Ziemi. Wymienione wpływy są małe, gdy rozpatruje się pojedyncze stanowisko niwelatora, lecz mają charakter systematyczny, a więc przy wielu stanowiskach sumują się i dla długich ciągów niwelacyjnych ich suma przekracza wartość błędu dopuszczalnego dla I oraz II klasy niwelacji.

Przebieg procesu pomiarowego w ramach niwelacji precyzyjnej jest porównywalny do toku czynności wykonywanych podczas niwelacji technicznej (patrz rozdz. 6). Stosujemy przy tym podobny, ale jednak znacznie dokładniejszy sprzęt. Niwelatory precyzyjne różnią się od technicznych większą masą i rozmiarami, solidniejszą konstrukcją, ulepszonymi parametrami decydującymi o dokładności, a w szczególności dużą średnicą czynną obiektywu lunety (ok. 40 mm), bardzo dużym powiększeniem lunety (minimum 40×), niezwykle czułymi libelami ($\omega \leq 10''$) lub kompensatorami. W precyzyjnych niwelatorach optycznych odczytu nie szacuje się na oko, lecz do oceny części ułamkowej działki łaty korzysta z mikrometru optycznego, którego skala dzięki wprowadzeniu obrazu tej działki na środek rozwidlenia poprzecznej kreski siatki celowniczej (rys. 6.1) umożliwia dokładne określenie końcówki odczytu. Ostatnio do powszechnego użytku weszły techniczne i precyzyjne niwelatory cyfrowe, automatycznie wykonujące i rejestrujące odczyty z łat po naciśnięciu odpowiedniego przycisku klawiatury. Łaty do niwelacji cyfrowej zamiast lub obok zwykłej podziałki posiadają podział z kodem kreskowym.

Łaty precyzyjne są sztywne (nieskładane), z podwójnym podziałem przeważnie półcentymetrowym, naniesionym na taśmie inwarowej naciągniętej ze stałą siłą za pomocą sprężyny znajdującej się wewnątrz obudowy łaty. Przy niwelacji precyzyjnej żabki stosuje się tylko w kl. II, zaś przy pomiarach sieci kl. I wykorzystuje się kliny niwelacyjne wbijane w ziemię.

Sprzęt niwelacyjny przed pomiarem osnowy musi być dokładnie sprawdzony i zrektyfikowany. Jego krótka charakterystyka została zamieszczona w rozdziale 6. Sprzęt i technologia niwelacji precyzyjnej zapewniają wysoką dokładność podstawowej osnów wysokościowej charakteryzującej się średnim błędem po wyrównaniu sieci nie przekraczającym na ogół ±1mm/km. W układzie tej osnowy występują niezwykle stabilne punkty fundamentalne i wiekowe, zaś w państwach mających dostęp do morza także punkty mareograficzne.

Pełniejsze i bardziej szczegółowe wiadomości na temat niwelacji precyzyjnej oraz projektowania, pomiaru i obliczania podstawowej osnowy wysokościowej zostaną podane podczas zajęć z geodezji wyższej.

2.9. Niwelacja trygonometryczna

Niwelacja trygonometryczna jest metodą pomiaru wysokościowego, polegającą na wyznaczaniu różnic wysokości wybranych punktów na podstawie obserwacji: kąta pionowego i odległości poziomej lub skośnej. W przypadku wykorzystania odległości skośnej do obliczenia przewyższenia w literaturze geodezyjnej funkcjonuje także pojęcie niwelacji tachimetrycznej.

Na podstawie pomierzonych w trójkącie prostokątnym *HCP'* (rys. 2.32) wielkości: kąta pionowego pochylenia – α i odległości poziomej – d można określić tzw. *przewyższenie* – h, czyli różnicę wysokości pomiędzy płaszczyzną horyzontu instrumentu (płaszczyzną poziomą przechodzącą przez oś obrotu lunety) a punktem celu *C*. Przewyższenie wyraża wzór (2.16), zawierający funkcję trygonometryczną tangens kąta α, od której pochodzi nazwa niwelacji.

$$h = d \cdot \mathrm{tg}\, \alpha \tag{2.16}$$

Analogiczny wzór oparty na pomiarze odległości skośnej d' przyjmie postać:

$$h = d' \cdot \sin \alpha \tag{2.16a}$$

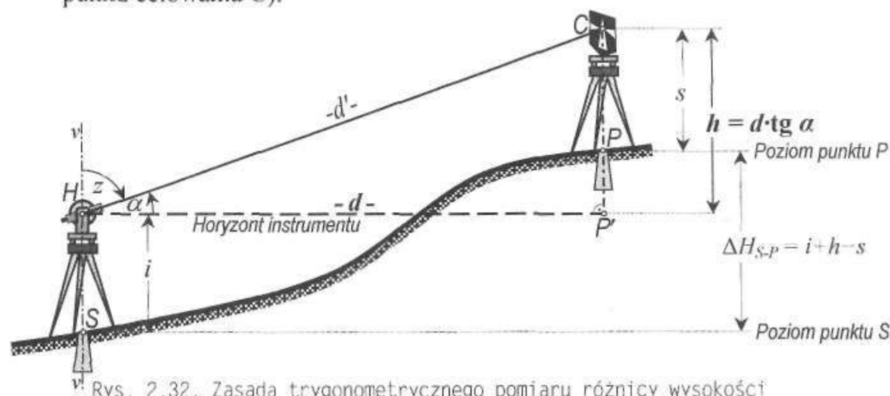
Ponieważ oba rodzaje kątów pionowych: kąt pochylenia – α i kąt zenitalny – z są związane z sobą zależnością: $\alpha = 90° - z$, toteż dla kątów z wzór (2.15) zmieni się na:

$$h = d \cdot \text{ctg}\, z \qquad (2.16\text{b}) \qquad \text{lub} \qquad h = \frac{d}{\text{tg}\, z} \qquad (2.16\text{c})$$

Różnica wysokości $\Delta H_{S\text{-}P}$ pomiędzy stanowiskiem instrumentu S a punktem wyznaczanym P wynosi:

$$\Delta H_{S\text{-}P} = i + h - s \qquad (2.17)$$

gdzie: i – wysokość instrumentu (odległość pionowa od górnej powierzchni znaku do osi obrotu lunety),
s – wysokość sygnału (odległość pionowa od punktu P do zaznaczonego na sygnale punku celowania C).



Rys. 2.32. Zasada trygonometrycznego pomiaru różnicy wysokości

Kąty pionowe mierzy się z reguły w dwóch położeniach lunety, co umożliwia obliczenie kąta pionowego nie obarczonego błędem miejsca zera μ oraz samego błędu μ na podstawie podanych niżej wzorów słusznych dla podziału zenitalnego, ciągłego, prawego kręgu pionowego:

$$z = \frac{O_I - O_{II} + 400^g}{2} \qquad (2.18) \qquad \mu = \frac{O_I + O_{II} - 400^g}{2} \qquad (2.19)$$

Kontrola: $z = O_I - \mu$

Poszukiwaną wysokość punktu P obliczymy na podstawie wzoru:

$$H_P = H_S + i + h - s \qquad (2.20)$$

Występująca w powyższym wzorze suma $H_S + i$ nosi nazwę *wysokości horyzontu instrumentu* lub *wysokości osi obrotu lunety* ($H_c = H_S + i$). Wysokość H_c określimy dokładnie, jeśli przy poziomej osi celowej wykonamy odczyt t na łacie ustawionej na pobliskim reperze (rys. 2.33): $H_c = H_{Rp} + t$. Odczyt t stanowi średnią arytmetyczną z odczytów: t_1, t_2 wykonanych na łacie w I oraz II położeniu lunety (KL, KP) przy jednoczesnym, dokładnym ustawieniu odczytu na kole pionowym na wartości: 100^g i 300^g.

Podczas trygonometrycznego wyznaczania wysokości punktów dla długich celowych należy uwzględniać wpływ krzywizny Ziemi i refrakcji atmosferycznej. Wzór (2.20) przyjmie wtedy postać:

$$H_P = H_S + i + h - s + (1-k)\cdot\frac{d^2}{2R} \qquad (2.21)$$

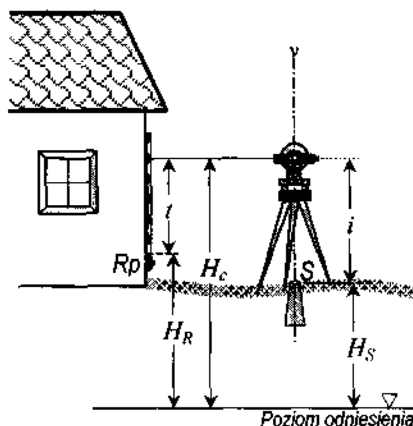
gdzie: R – średni promień Ziemi ok. 6370 km,
k – współczynnik refrakcji ($k_{śr} = 0,13$).

Ponieważ niekorzystny wpływ refrakcji na pomiar kąta pionowego jest największy przy samej powierzchni gruntu, stąd stanowiska i punkty celowania należy dobierać możliwie wysoko. Dokładność wyznaczenia przewyższenia h określa wzór przybliżony, w którym nie uwzględniono wpływów: krzywizny Ziemi i refrakcji oraz błędów pomiaru wielkości i, s:

$$m_h = \sqrt{\frac{d^2}{\sin^4 z}\cdot m_z + \mathrm{ctg}^2\, z \cdot m_d^2} \qquad (2.22)$$

Wynika z niego, że wpływ błędu pomiaru kąta zenitalnego m_z rośnie proporcjonalnie do odległości d, zaś wpływ błędu pomiaru tej długości m_d zwiększa się wraz ze wzrostem nachylenia osi celowej do poziomu.

Najważniejszymi zastosowaniami niwelacji trygonometrycznej są: określanie wysokości punktów osnowy poziomej i ich zabudowy np. elementów wież i sygnałów triangulacyjnych, wyznaczanie wysokości punktów wysokościowej osnowy pomiarowej, pomiar rzeźby terenu, zadania inżynierskie z zakresu obsługi budowli i badań przemieszczeń.



Rys. 2.33. Nawiązanie wysokościowe niwelacji trygonometrycznej

2.10. Niwelacja hydrostatyczna

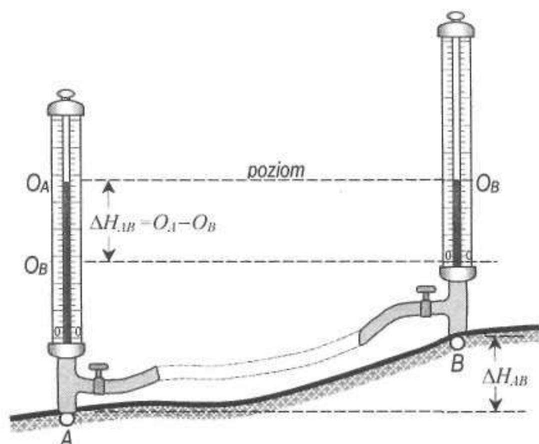
W geodezji technologia niwelacji hydrostatycznej jest wykorzystywana do okresowych obserwacji osnowy wysokościowej przeznaczonej do wyznaczania przemieszczeń pionowych i wychyleń budowli inżynierskich. Pomiar różnicy wysokości metodą niwelacji hydrostatycznej opiera się na znanej z fizyki zasadzie naczyń połączonych, w myśl której poziom powierzchni jednorodnej cieczy w naczyniach połączonych jest jednakowy.

W budownictwie do sprawdzenia poziomowania kondygnacji, podłóg, posadzek, ław fundamentowych itp. używa się prostego niwelatora hydrostatycznego zwanego wagą wodną (rys. 2.34). Przyrząd ten składa się z identycznych dwóch oprawionych rurek szklanych z podziałkami i metalowymi podstawkami, w których umieszczone są wyloty przewodów wodnych z kurkami. Obie rurki są połączone ze sobą elastycznym wężem. Po napełnieniu przyrządu wodą można wyznaczać różnice wysokości stanowisk na podstawie różnic odczytów O_A, O_B wskazywanych przez poziom wody na podziałkach rurek.

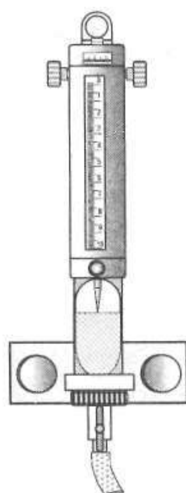
Pomiar przy użyciu tak skonstruowanego przyrządu nie jest zbyt dokładny (błąd rzędu kilku mm), co wynika z wielu czynników, spośród których szczególnie istotne zna-

czenie mają: obecność powietrza w cieczy zarówno w postaci rozpuszczonej jak i pęcherzyków, różnice temperatur rurek i niedokładność odczytów.

W pomiarach specjalnych, podczas dokładnego wyznaczania przemieszczeń pionowych budowli np. zapór wodnych, stosowane są precyzyjne niwelatory hydrostatyczne, które w korzystnych warunkach mogą zapewnić bardzo wysoką dokładność wyznaczenia różnic wysokości rzędu ±0,01 mm. Oprócz nieseryjnych konstrukcji przyrządów tego typu do r. 1985 niemiecka firma VEB Freiberger Präcisionsmechanik (Freiburg) produkowała niwelator pokazany na rys. 2.35. Niwelator ten składa się z dwóch przenośnych, cylindrycznych przyrządów w postaci oprawionych naczyń szklanych połączonych wężem. Pojedynczy przyrząd posiada urządzenie pomiarowe złożone z ruchomego, stożkowatego ostrza i śruby mikroruchu do jego podnoszenia lub opuszczania, wyskalowanej podziałki i bębenka pomiarowego. Naczynia za pośrednictwem metalowych bolców umieszcza się na reperach zabetonowanych na budowli. Następnie poprzez otwór u góry naczynia i lejek napełnia się wodą układ hydrauliczny niwelatora. Czynność ta jest kłopotliwa i pracochłonna, ponieważ z układu utworzonego przez wąż i naczynia należy całkowicie usunąć powietrze. Poziom cieczy w naczyniu odczytuje się na podziałce skali (milimetry) i bębenku (setne części mm) po zetknięciu ruchomego ostrza z powierzchnią cieczy. Różnicę wysokości określa się na podstawie różnic odczytów w przyrządach zamontowanych na monitorowanej budowli.



Rys. 2.34. Niwelator hydrostatyczny „waga wodna" stosowany w budownictwie



Rys. 2.35. Precyzyjny niwelator hydrostatyczny

ROZDZIAŁ 3:
Projektowanie osnów szczegółowych

3.1. Zasady ogólne projektowania szczegółowej osnowy poziomej

Projektowanie osnowy stanowi pierwszy etap jej realizacji, po którym następują: stabilizacja punktów, pomiar sieci, obliczenie i opracowanie wyników pomiaru, skompletowanie operatu i przekazanie go zleceniodawcy. Celem projektowania i zakładania sieci geodezyjnych na zadanym obszarze jest zapewnienie wymaganego pokrycia terenu osnową odpowiedniej klasy w określonej ilości i zagęszczeniu punktów. Projektowanie wykonuje się w ramach poszczególnych sieci, będących zbiorami punktów geodezyjnych stanowiących pewną odrębną całość i zarazem jednostkę projektowania. Proces ten musi być poprzedzony rozeznaniem zasięgu obszarowego nowoprojektowanej osnowy, warunków terenowych, ogólnej koncepcji osnowy państwowej i aktualnych oraz przewidywanych lokalnych potrzeb w zakresie uzbrojenia wybranego terenu w osnowę geodezyjną. Opracowanie projektu powinno także uwzględniać wykorzystanie osnowy już istniejącej na danym terenie, polegające na użyciu jej punktów do nawiązania, włączenia lub adaptacji w nowej sieci. Do wymienionych kryteriów należy dostosować wybór najbardziej odpowiedniej konstrukcji sieci oraz technologii zapewniającej uzyskanie dla zakładanej osnowy odpowiedniej przydatności i dokładności wymaganej przez odpowiednie przepisy zawarte w standardach technicznych, przy jednoczesnym obniżeniu do niezbędnego minimum nakładów finansowych związanych z realizacją projektu. Należy również ustalić sposób analitycznego opracowania wyników pomiaru. Podczas czynności projektowych oraz przy ustalaniu lokalizacji poszczególnych punktów sieci osnowy szczegółowej trzeba uwzględniać spełnienie podstawowych zadań tej osnowy, do których zalicza się:

- dogodność nawiązania osnowy niższych klas,
- korzystne oparcie dla pomiarów sytuacyjnych i rzeźby terenu,
- przydatność do wynoszenia w teren projektów wynikających z planu zagospodarowania przestrzennego danego obszaru.

Osnowy są projektowane, zakładane i modernizowane w ramach poszczególnych s i e c i, stanowiących zbiory punktów połączonych elementami wyznaczającymi tj. zaobserwowanymi kątami poziomymi lub kierunkami i długościami w konstrukcję geodezyjną o ustalonej dokładności (klasie), budowie geometrycznej, sposobie pomiaru i obliczeń dokonanych w celu uzyskania współrzędnych prostokątnych *X, Y* punktów sieci.

W ramach opracowania projektu i jego dalszej realizacji należy ze względów ekonomicznych wykorzystywać stabilizację istniejących punktów i wyniki wcześniejszych pomiarów osnów założonych na danym obszarze, o ile odpowiadają one kryteriom dokładności i stabilizacji przewidzianym w instrukcji G-2 dla klasy nowoprojektowanej osnowy. Każda zakładana sieć lub grupa nowych punktów powinna być nawiązana do założonych wcześniej punktów sieci wyższej klasy dokładnościowej w sposób umożliwiający prawidłowe określenie położenia zaprojektowanych punktów w państwowym układzie współrzędnych. Sieci osnowy szczegółowej należy projektować jako powierzchniowe sieci j e d n o r z ę d o w e, nawiązane wielopunktowo do osnowy wyższych klas.

Podczas projektowania sieci osnów poziomych i wysokościowych oprócz typowych nawiązań do osnowy wyższej klasy należy dla wzmocnienia sieci i w celach kontrolnych dokonywać wzajemnych nawiązań nowej osnowy do istniejących p u n k t ó w b l i-

skich wyższej klasy oraz punktów tej samej klasy, lecz należących do różnych sieci. W takim przypadku nawiązania poziome i wysokościowe powinny być zrealizowane wtedy, gdy punkty bliskie znajdują się w odległości do 50 m w terenie zabudowanym lub zalesionym oraz w odległości do 300 m – w terenie odkrytym. Nawiązanie geodezyjne punktu bliskiego powinno zapewnić wyznaczenie jego współrzędnych lub wysokości oraz kontrolę pomiaru i obliczeń.

Czynności projektowe dla szczegółowej osnowy geodezyjnej II klasy z reguły obejmują trzy etapy:

1) opracowanie założeń projektowych nowej sieci dostosowanej do aktualnie istniejącej osnowy;
2) wywiad terenowy;
3) opracowanie ostatecznego projektu technicznego.

Podczas projektowania osnowy III klasy z reguły łączy się etapy 1 i 3. Po zatwierdzeniu projektu technicznego osnowy przez właściwy organ państwowej lub samorządowej służby geodezyjnej proces realizacji projektu osnowy obejmuje następujące czynności:

1) stabilizacja znaków;
2) przygotowanie sprzętu pomiarowego i pomiar osnowy zgodny z zaprojektowaną technologią;
3) obliczenie współrzędnych lub (i) wysokości punktów;
4) ocena dokładności;
5) skompletowanie operatu związanego z założeniem osnowy i przekazanie go zleceniodawcy oraz do właściwego Ośrodka Dokumentacji Geodezyjno-Kartograficznej (ODGK).

3.2. Zebranie i analiza istniejących materiałów geodezyjno-kartograficznych oraz opracowanie założeń projektu technicznego osnowy poziomej

Podjęcie czynności projektowych wiąże się z koniecznością ustalenia celu zakładania osnowy i sposobów jego realizacji. Projekt jest dokumentem, na zawartość którego składają się następujące dane:

- rodzaj i klasa (dokładność) osnowy,
- bieżące i perspektywiczne zapotrzebowanie lokalne na osnowę geodezyjną,
- zasięg obszarowy i wymagana gęstość punktów i kształt sieci,
- technologia pomiaru i obliczeń,
- lokalizacja punktów osnowy, sposoby ich utrwalenia i zabudowy,
- optymalizacja ekonomiczna kosztów realizacji zaprojektowanej osnowy,
- zgodność projektu z wymogami zawartymi w geodezyjnych standardach technicznych.

Dokumentacja związana z opracowaniem założeń projektu osnowy składa się z dwóch podstawowych części: opisowej i graficznej. Celem tego etapu prac projektowych jest *ustalenie na danym obszarze zapotrzebowania i wymagań w zakresie osnowy* geodezyjnej określonej klasy, jej zasięgu, stopnia zagęszczenia punktami uwzględniającego charakter terenu, technologii realizacji osnowy o określonej dokładności oraz przybliżonej lokalizacji poszczególnych punktów pod kątem obecnego i przyszłego lokalnego zapotrzebowania na osnowę. Po określeniu technologii zakładania sieci i rozmieszczenia punktów jej nawiązania należy opracować jej konstrukcję, czyli rozmieszczenie, wzajemne usy-

tuowanie i wartości elementów sieci: punktów, kątów, długości boków. Dla punktów szukanych trzeba ustalić minimalną ilość elementów wyznaczających, dla boków – wartości maksymalne minimalne i średnie oraz relacje z elementami sąsiadującymi np. stosunek sąsiednich boków, dla kątów – dopuszczalne wielkości w figurach geometrycznych. Współrzędne prawidłowo zaprojektowanego punktu dają się niezależnie określić przynajmniej dwukrotnie za pośrednictwem dwóch par linii obrazujących ich miejsca geometryczne (patrz ust. 9.11). Kąt Ψ przecięcia tych linii w sieciach II klasy powinien zawierać się w przedziale od 50^g do 150^g, zaś stosunek długości odcinków wyznaczających nie może być większy niż 3:1. Poprawność konstrukcji sieci należy skontrolować za pomocą sprawdzenia ilości i rozmieszczenia spostrzeżeń nadliczbowych oraz wstępnej oceny dokładności przy użyciu metod analitycznych (rachunkowych) lub graficznych np. w przypadku wcięć poprzez wykreślenie wstęg wahań i figur błędów. Nowe punkty II kl. powinny być wyznaczone przez odpowiednią liczbę elementów wyznaczających. Wskaźnik wyznaczalności (niezawodności) z, czyli stosunek liczby elementów nadliczbowych $n - u$ do liczby n wszystkich elementów wyznaczających punkt nie powinien być mniejszy niż 0,6. Dla całej sieci II klasy wskaźnik z (patrz ust. 3.5) nie powinien być mniejszy niż 0,5.

Zagęszczenie terenu punktami sieci ustala się poprzez dokonanie analizy charakteru terenu, potrzeb lokalnych i stopnia zainwestowania danego obszaru. Największa gęstość punktów powinna wystąpić na obszarach wielkomiejskich i uprzemysłowionych, mniejsza – na zabudowanych terenach wsi, zaś najmniejsza – w obrębie dużych kompleksów leśnych. Na stopień zagęszczenia wpływają także założenia technologiczne i warunki terenowe wpływające na: dopuszczalne długości celowych i usytuowanie punktów, które powinno zapewniać dogodne warunki do obserwacji punktów sąsiednich (naturalne wzniesienia, i stanowiska obserwacyjne na budowlach) oraz przewidywany sposób zabudowy punktów (np. wieże, stanowiska podwyższone).

Sieć osnowy poziomej projektuje się w taki sposób, aby stopień zagęszczenia punktami wynosił:

1. Dla osnowy poziomej II klasy (łącznie z punktami I klasy):
   a) 1 punkt na około 0,8 km^2 na terenach intensywnie zainwestowanych,
   b) 1 punkt na 1 – 2 km^2 na terenach rolnych, w zależności od potrzeb zagospodarowania terenu.
   c) 1 punkt na około 12 km^2 na terenach zwartych kompleksów leśnych.
2. Dla osnowy poziomej III klasy (łącznie z punktami klas wyższych):
   a) 1 punkt na 10 – 20 ha na terenach intensywnie zainwestowanych,
   b) 1 punkt na 20 – 50 ha na terenach rolnych, w zależności od potrzeb zagospodarowania terenu,
   c) 1 punkt na 50 – 120 ha na terenach zwartych kompleksów leśnych.

Duży wpływ na konstrukcję projektowanej sieci ma ilość i położenie punktów nawiązania, należących do klasy wyższej niż projektowana sieć, które powinny być równomiernie rozłożone na obszarze objętym projektowaną siecią, zaś ich ilość ma zapewnić stosunek liczby punktów nawiązania do liczby punktów wyznaczanych wynoszący 1:10 lub więcej. Skrajne punkty nawiązania powinny utworzyć wielobok, wewnątrz którego znajdą się wszystkie punkty wyznaczane.

Sieci niezależne (nie nawiązane) zakłada się wyjątkowo i na stosunkowo małych obszarach dla obiektów lub zadań specjalnych np. zakładów przemysłowych, zapór wodnych, sieci realizacyjne, do pomiaru przemieszczeń itp., szczególnie zaś wtedy, gdy po-

trzebne jest korzystniejsze rozmieszczenie punków osnowy i wyższa dokładność od tej, którą może zapewnić pobliska osnowa państwowa.

Dla prawidłowego opracowania założeń projektowych konieczne jest zebranie istniejących materiałów geodezyjnych i kartograficznych z ośrodków dokumentacyjnych i geodezyjno-kartograficznych. Do przydatnych materiałów projektowych dotyczących danego terenu i znajdującej się na nim osnowy geodezyjnej można zaliczyć:

- mapy: topograficzne w skalach średnich (1:10 000, 1:25 000), wielkoskalowe, w tym mapę zasadniczą, mapy przeglądowe osnowy poziomej i wysokościowej,
- operaty pomiaru istniejącej osnowy podstawowej i szczegółowej (dawniejsze projekty, sprawozdania techniczne, wyniki wywiadów terenowych, protokoły osadzenia znaków, opisy topograficzne punktów, dane pomiarowe, wykazy miar, szkice osnów, dokumentacja obliczenia współrzędnych i wysokości, analizy dokładności, katalogi współrzędnych i wysokości punktów).

Po zgromadzeniu powyższej dokumentacji należy dokonać szczegółowej analizy zebranych materiałów pod kątem przydatności i dokładności istniejących osnów oraz możliwości i sposobu wykorzystania poszczególnych ich fragmentów. Analizę i ocenę zakresu wykorzystania istniejących osnów należy prowadzić w oparciu o odpowiednie metody, wzory i programy komputerowe, z których na szczególną uwagę zasługuje program „Geonet" prof. R. Kadaja (zob. ust. 3.5, 10.6).

Analiza wymienionych materiałów ma wskazać jedną z poniższych możliwości:

- zastosowanie istniejących punktów wewnątrz sieci i na jej obrzeżach jako punktów nawiązania, charakteryzujących się przynależnością do wyższej klasy dokładnościowej niż klasa projektowanej sieci,
- wykorzystanie istniejących fragmentów osnowy i ich punktów z dawnych sieci jako punktów zaadaptowanych o dokładności równorzędnej lub wyższej w stosunku do sieci projektowanej, dzięki czemu zostanie wykorzystany zarówno archiwalny materiał obserwacyjny, jak i stabilizacja tych punktów,
- użycie obecnej stabilizacji punktów, na których zostaną wykonane nowe obserwacje, ze względu na niekompletność lub za niską dokładność dawniejszych pomiarów,
- nieprzydatność istniejących punktów, które nie będą przewidziane do wykorzystania, z uwagi na niewłaściwą lokalizację, utrwalenie lub zbyt niską dokładność położenia.

Kolejnym etapem opracowania założeń projektowych nowej sieci jest wykonanie mapy roboczej, zwanej mapą założeń projektu technicznego, na podkładzie mapy topograficznej w skali 1:10000 lub 1:25000, na którą za pomocą znormalizowanych znaków umownych nanosi się:

- zasięg sieci i dane z analizy materiałów, dotyczące istniejącej osnowy,
- linie podziału na arkusze mapy 1:10000 (gdy mapa robocza jest w skali mniejszej) lub mapy zasadniczej,
- punkty nawiązania nowoprojektowanej sieci i ich numery,
- układ linii konstrukcyjnych, punktów węzłowych i elementów wyznaczających (obserwacji kątowych i liniowych) nowoprojektowanej osnowy,
- numery ciągów, punktów węzłowych i pozostałych punktów,
- wymiary elementów geometrycznych sieci (np. długości ciągów w km).

Numeracja punktów osnowy poziomej w układzie współrzędnych „1965" jest dwuczłonowa. Pierwszy człon stanowi godło arkusza mapy w skali 1:50 000 dla punktu I i II klasy lub godło sekcji w skali 1:10 000 dla punktu III klasy. Drugi człon jest właściwym numerem punktu w zakresie: 1 – 99 dla kl. I, 100 – 999 dla kl. II, 1000 – 1999 – dla kl. III oraz 2000 – 2999 dla osnowy pomiarowej. Podobnie w układzie „1965" ustalono numerację punktów wysokościowej osnowy szczegółowej, której punktom przypisuje się również oznaczenia dwuczłonowe, przy czym I człon to godło sekcji 1:10 000, na której występuje dany punkt, zaś drugi człon stanowią numery w zakresie: 1000 – 1999 dla kl. III oraz 2000 – 9999 dla klasy IV.

W wprowadzonych niedawno układach współrzędnych „1992" i „2000" system numeracji punktów zgodnie z nową instrukcją G–2 jest związany z położeniem punktu, określonym za pomocą współrzędnych geodezyjnych *B*, *L*. Identyfikatorem punktu jest trzynastoznakowy ciąg znaków alfanumerycznych. Oznaczając pozycję każdego znaku kolejnymi literami alfabetu od „*a*" do „*m*", czyli:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*

otrzymamy dla punktu o współrzędnych: $B = 53°12'56,4879''$; $L = 16°48'15,6789''$ przykładowy identyfikator:

5	3	1	6	1	2	5	4	8	1	*k*	*l*	*m*

W poszczególnych pozycjach znajdują się następujące elementy:

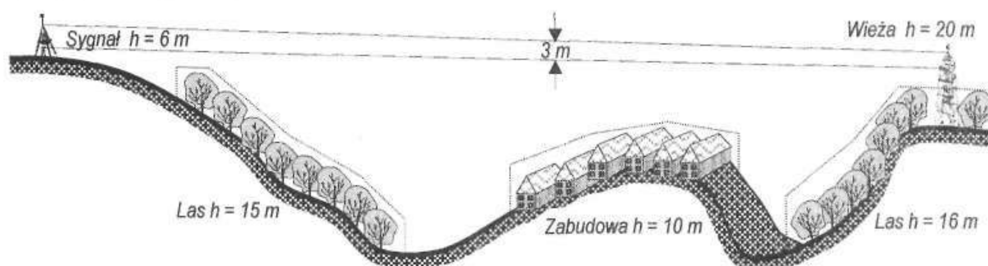
- na pozycji ***a*, *b*** umieszcza się szerokość geodezyjną w pełnych stopniach,
- na pozycji ***c*, *d*** umieszcza się długość geodezyjną w pełnych stopniach,
- na pozycji ***e*, *f*, *g*** umieszcza się cyfry odpowiadające kolejno: dziesiątkom minut, jednostkom minut i dziesiątkom sekund współrzędnej *B*,
- na pozycji ***h*, *i*, *j*** umieszcza się cyfry odpowiadające kolejno: dziesiątkom minut, jednostkom minut i dziesiątkom sekund współrzędnej *L*,
- na pozycji ***k*** umieszcza się numer kolejny punktu na obszarze $10''\times10''$ szerokości i długości geodezyjnej,
- na pozycji ***l*** występuje cyfra z zakresu: 1, 2, 3, ...9, 0 zależna od klasy osnowy, przy czym dla poszczególnych klas wstawia się następujące cyfry:
- „1" dla osnowy poziomej klasy I_S,
- „2" dla osnowy poziomej klasy I,
- „3" dla osnowy poziomej klasy II_S,
- „4" dla osnowy poziomej klasy II,
- „5" dla osnowy poziomej klasy III_S,
- „6" dla osnowy poziomej klasy III,
- cyfry „7" i „8" oznaczają ekscentry punktu ***k***, a wtedy na pozycji ***m*** umieszcza się kolejny numer ekscentru tego punktu,
- „9" oznacza punkt kierunkowy punktu ***k***, a wtedy na pozycji ***m*** umieszcza się kolejny numer punktu kierunkowego,
- „0"oznacza punkt niesklasyfikowany, a więc nie zaliczany do podstawowej lub szczegółowej osnowy geodezyjnej
- W przypadku osnowy wysokościowej, gdy na pozycji ***l*** znajdują się cyfry od 1 do 6, wówczas na pozycji ***m*** umieszczone są cyfry zależne od klasy punktu wysokościowego, a w szczególności:

- cyfra „0" oznacza punkt wysokościowy niesklasyfikowany, którego nie zalicza się do osnowy podstawowej, szczegółowej lub pomiarowej,
- cyfra „1" oznacza punkt osnowy wysokościowej klasy 1,
- cyfra „2" oznacza punkt osnowy wysokościowej klasy 2,
- cyfra „3" oznacza punkt osnowy wysokościowej klasy 3,
- cyfra „4" oznacza punkt osnowy wysokościowej klasy 4,
- cyfra „5" oznacza punkt osnowy wysokościowej pomiarowej,

Podczas wykreślania na mapie elementów geometrycznych projektowanej osnowy należy dbać o prawidłową budowę sieci i jej poprawne nawiązanie oraz o zachowanie wskaźników dotyczących: długości ciągów i poszczególnych boków, zagęszczenia punktów, a ponadto lokalizowanie punktów osnowy przede wszystkim tam, gdzie jest ona najbardziej potrzebna, czyli w rejonach o większym stopniu zainwestowania. Wartości niektórych wymagań dla osnowy poziomej kl. II i III, zgodnie z instrukcją techniczną G-2 zostały zestawione w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Wymogi dotyczące projektowania osnowy poziomej

Treść wymogu	Pozioma osnowa szczegółowa	
	Klasa II	Klasa III
Zagęszczenie osnowy: *a) na terenach intensywnie zainwestowanych* *b) na terenach rolnych* *c) na terenach kompleksów leśnych*	 *1 punkt/1-2 km²* *1 punkt/2-8 km²* *1 punkt/12 km²*	 *1 punkt/10-20 ha* *1 punkt/20-50 ha* *1 punkt/50-120 ha*
Średni błąd położenia punktu (po wyrównaniu sieci)	$m_P \leq \pm 0,05$ m	$m_P \leq \pm 0,10$ m
Numeracja punktów (dwuczłonowa) *I człon: godło arkusza mapy w skali* *II człon: nr w zakresie od-do*	 *1:50 000* *100-899 (wyjątkowo do 999)*	 *1:10 000* *1000-1999*
Najważniejsze technologie zakładania nowych punktów	*Powierzchniowe sieci kątowo-liniowe i poligonotriangulacyjne, sieci wektorowe GPS, sieci mieszane (zintegrowane)*	*Poligonizacja, aerotriangulacja analityczna, wcięcia, sieci kątowo-liniowe i poligonotriangulacyjne, GPS*



Rys. 3.1. Profil podłużny wzdłuż celowej

Sąsiednie punkty sieci zaprojektowane na mapie, tworzące poszczególne boki osnowy, muszą mieć zapewnioną wzajemną widoczność umożliwiającą obserwacje kątowe i liniowe, toteż analizując na podstawie mapy pokrycie terenu i profil rzeźby trzeba wykluczyć lokalizacje punktów bez zapewnionych wizur, czyli przestrzeni pomiędzy punktami wolnych od przeszkód uniemożliwiających celowanie. W przypadkach wątpliwych trzeba wykreślić na podstawie mapy profil podłużny wzdłuż celowej (rys. 3.1). Szczegółowe sprawdzenie wizur następuje później podczas wywiadu terenowego.

Zgodnie z wytycznymi G-2.5 dla sieci klasy III zakładanej metodą poligonizacji powinny być spełnione następujące warunki:

1. Każdy ciąg poligonowy powinien być nawiązany obustronnie kątowo i liniowo do punktów nawiązania lub punktów węzłowych.
2. Ciągi powinny być zbliżone do równobocznych i prostoliniowych.
3. Długości pojedynczych ciągów nie powinny przekraczać 4,5 km, a ciągów wyznaczających punkty węzłowe – 3,0 km.
4. Długości boków w ciągach powinny się mieścić w granicach od 150 m do 600 m i wynosić przeciętnie nie mniej niż 300 m, a stosunek długości boków sąsiednich nie powinien być mniejszy niż 1:2.
5. W szczególnych przypadkach dopuszcza się skrócenie długości boku poniżej 150 m oraz skrócenie przeciętnej długości boku do 200 m, pod warunkami:
   - ograniczenia długości ciągu do 2 km,
   - zmniejszenia średniego błędu pomiaru kąta do $m_{\alpha} \leq 20^{cc}$,
   - szczególnie starannego centrowania instrumentów i przyrządów pomocniczych nad centrami punktów.
6. W celu wzmocnienia konstrukcji sieci należy z ciągów poligonowych tworzyć układy wielowęzłowe oraz stosować nawiązania boczne, mierząc z wielu punktów ciągów kierunki do punktów na wysokich budowlach.

3.3. Wywiad terenowy

Wywiad terenowy jest to zespół czynności terenowych wykonywanych dla określenia *lokalizacji punktów sieci geodezyjnej i warunków pomiaru*. Celem wywiadu jest też weryfikacja, uściślenie i wprowadzenie ewentualnych zmian do założeń projektowych w oparciu o informacje zdobyte w terenie, nieznane na etapie projektowania kameralnego. W ramach wywiadu należy dokonać następujących czynności i ustaleń:

1. Na podstawie map przeglądowych i opisów topograficznych odszukać i zidentyfikować punkty przewidziane w założeniach projektowych jako punkty nawiązania, ocenić ich przydatność, biorąc pod uwagę lokalizację, stałość położenia i stabilizację oraz ustalić sposoby nawiązania projektowanej sieci w postaci kątowych i liniowych elementów nawiązania bezpośredniego lub pośredniego oraz skorygować lub wykonać od nowa opisy topograficzne tych punktów.
2. Dokonać kontroli istniejących punktów przewidzianych do adaptacji.
3. Zlokalizować w terenie ostateczne położenie i sposób utrwalenia projektowanych punktów, sprawdzić wizury pomiędzy wszystkimi punktami sieci, określając dla nich niezbędne wysokości stanowisk i sposoby sygnalizacji celów.
4. Określić sposoby powiązania projektowanej sieci z sieciami sąsiednimi wyższych klas i tej samej klasy.
5. Zaprojektować położenie punktów przeniesienia i konstrukcję siatek przeniesienia dla niedostępnych punktów projektowanej sieci.

Podczas wywiadu ustala się ostateczną l o k a l i z a c j ę p u n k t ó w sieci, toteż na stanowiskach przewidzianych do zabudowy punktów wieżami, sygnałami lub stanowiskami podwyższonymi ustawia się słupy wywiadowcze umożliwiające wgląd w teren z różnych wysokości, a tym samym ustalenie niezbędnej do wykonania pomiarów wysokości stanowiska i wiechy wywiadowcze pozwalające na ocenę potrzebnej wysokości

przyszłego sygnału celowniczego. Podczas ustalania wysokości stanowisk i celów trzeba przewidzieć przebiegi celowych na wysokości przynajmniej 3 m nad przeszkodami. Lokalizacja punktów osnowy powinna zapewniać im: łatwą dostępność, nienaruszalność, stałość położenia, długoletnie przetrwanie, możliwość obserwacji ze stanowiska naziemnego i sygnalizacji punktu do nalotów fotogrametrycznych, prawidłowe nawiązanie projektowanej sieci oraz wykorzystanie punktów do pomiarów szczegółowych i do dogodnego dowiązywania osnowy pomiarowej. Przy zakładaniu nowych punktów można wykorzystywać trwałe budowle nadające się na stanowiska obserwacyjne, jednak większość obserwacji wykonuje się ze stanowisk naziemnych, toteż znaki gruntowe trzeba lokalizować na terenach zapewniających ich stabilność. Z tego względu nie należy projektować punktów na budowlach ziemnych (nasypach, skarpach wałach itp.), terenach osuwiskowych i bagiennych, pośrodku użytków rolnych, blisko wyrobisk eksploatacji odkrywkowych. Podczas lokalizowania punktów w pobliżu dróg, urządzeń wodnych i terenów kolejowych należy zachowywać następujące odległości minimalne:

- 100 m od budowli piętrzących wodę przy wysokości piętrzenia do 10 m oraz 500 m przy większych wysokościach piętrzenia,
- 20 – 50 m od osi drogi (w zależności od klasy), lub stopy wału ochronnego,
- 15 m od granicy obszaru kolejowego.

W przypadku, gdy z konieczności odległość punktu od wyżej wymienionych obiektów jest mniejsza, wówczas należy ustalić położenie punktu przeprowadzając konsultacje z organem administrującym danym terenem. Zachodzi też konieczność uzgodnienia lokalizacji każdego punktu z właścicielami lub użytkownikami danej nieruchomości. Podczas określania usytuowania punktów osnowy należy również rozeznać położenie i przebieg poszczególnych elementów sieci uzbrojenia terenu.

Informacje zdobyte podczas wywiadu nanosi się na szkic przedstawiający położenie punktów nawiązania, punktów adaptowanych i nowoprojektowanych i przebiegu celowych (wizur) z każdego punktu oraz boków, których długości mają być pomierzone z podaniem wysokości stanowisk i celów niezbędnych do wykonania obserwacji wzdłuż danej celowej. Na szkicu zaznacza się też możliwe do osiągnięcia wizury przy różnych wysokościach stanowisk i sygnałów. Drugi załącznik stanowią dane opisowe dotyczące zmian w założeniach projektowych dokonanych w wyniku wywiadu oraz nie wymienione w nich dodatkowe informacje dotyczące sieci zdobyte podczas wywiadu.

Trzecim załącznikiem są sporządzone podczas wywiadu terenowego nowe opisy topograficzne istniejących punktów przewidzianych do nawiązania i adaptowanych do sieci oraz szkice lokalizacji (tymczasowe opisy) punktów nowoprojektowanych zamarkowanych w terenie palikami zastępowanych później trwałymi znakami podczas ostatecznej stabilizacji.

3.4. Projekt techniczny sieci

Projekt ten, ustalający ostatecznie konstrukcję sieci, nawiązanie, technologię jej pomiaru i lokalizację oraz utrwalenie poszczególnych jej punktów, sporządza się na podstawie założeń projektowych i wyników wywiadu terenowego. W pierwszej kolejności należy w oparciu o szkic z wywiadu terenowego wybrać najbardziej odpowiednie wizury do wykonania obserwacji kątowych i liniowych oraz na poszczególnych punktach dokonać sprawdzenia prawidłowości konstrukcji sieci. Do badania konstrukcji sieci wykorzystuje się sposoby opisane dalej w ust. 3.5.

W skład dokumentacji projektu technicznego wchodzą:

- opis techniczny projektu z uzasadnieniem ewentualnych zmian w stosunku do założeń projektowych,
- mapa projektu,
- szkic projektowanej sieci (po wywiadzie) z projektowanymi obserwacjami,
- polowe opisy topograficzne punktów objętych projektem, w oparciu o rezultaty wywiadu terenowego,
- materiały dodatkowe (opisy topograficzne punktów nawiązania, mapy i szkice robocze lokalizacji punktów oraz siatek przeniesienia współrzędnych jak również nawiązań punktów bliskich),
- opis metody pomiaru sieci.

Na mapie projektu należy nanieść:

- podział na arkusze mapy zasadniczej,
- wszystkie istniejące punkty osnowy poziomej i wysokościowej znajdujące się na danym terenie rozszerzonym o pas 0,8 km,
- przebieg projektowanych ciągów poligonowych, położenie punktów wciętych oraz punktów wyznaczonych innymi technologiami.

Opis projektu ma zawierać:

- klasę projektowanej sieci i metody jej realizacji,
- przepisy techniczne, w oparciu o które będzie wykonywana sieć oraz motywację ewentualnych odstępstw od obowiązujących przepisów,
- zasięg projektowanej sieci,
- uzasadnienie potrzeby pomiarów wysokościowych i metoda ich wykonania,
- dane dotyczące punktów nawiązania i punktów węzłowych sieci,
- zakres wykorzystania istniejących punktów i sieci oraz możliwości ewentualnego przywrócenia im wartości użytkowej,
- typy znaków zalecane do stabilizacji nowych punktów,
- metody, dokładności pomiarów kątów i długości oraz instrumenty wykorzystywane do tych pomiarów,
- stopień zagęszczenia punktów sieci,
- metodę i program wyrównania obserwacji.

3.5. Sposoby wstępnego badania konstrukcji sieci

Przed przystąpieniem do badania konstrukcji sieci należy dokonać zestawienia: ogólnej liczby obserwacji n, ilości niewiadomych u, czyli obserwacji niezbędnych do określenia współrzędnych wszystkich punktów wyznaczanych p oraz różnicy tych wielkości, stanowiącej ilość spostrzeżeń nadliczbowych (warunków) n_n:

$$n_n = n - u \tag{3.1}$$

Badanie konstrukcji sieci jest wykonywane w celu ustalenia związku pomiędzy kształtem sieci, technologią jej realizacji, sposobem nawiązania, ilością, rodzajem i rozkładem obserwacji a dokładnością określenia punktów sieci. Z uwagi na dużą ilość czynników wpływających na ostateczną dokładność konstrukcji wstępna analiza dokładności musi z konieczności opierać się na znacznych uproszczeniach. Pełną ocenę dokładności polegającą na obliczeniu średnich błędów: niewiadomych, spostrzeżeń, położenia punktów

wraz z ilustracją graficzną za pomocą elips błędów można uzyskać po wykonaniu pomiaru i przeprowadzeniu ścisłego wyrównania sieci. Podczas prac projektowych można jednak dokonać wstępnego badania konstrukcji sieci sposobami pozwalającymi na wybór najbardziej odpowiedniego wariantu projektu. Sposobami tymi są między innymi:

- przybliżona ocena dokładności,
- numeryczna analiza dokładności,
- analityczno-graficzne wyznaczenie figur błędów dla pojedynczych punktów wyznaczanych.

Zgodnie z Wytycznymi Technicznymi G-2.5 pt. „Szczegółowa pozioma i wysokościowa osnowa geodezyjna. Projektowanie, pomiar i opracowanie wyników" ocena jakości i poprawności zaprojektowanej sieci oraz całej osnowy danej klasy powinna być przeprowadzana pod kątem spełnienia trzech kryteriów: niezawodności, funkcjonalności i dokładności. Kryteria te należy ustalić dla każdego rodzaju i klasy sieci zarówno w postaci parametrów liczbowych jak i formuł opisowych.

Niezawodność osnowy, zależna od liczby pomierzonych elementów kontrolnych i nadliczbowych, jest cechą określającą możliwość wykrycia ewentualnych błędów grubych występujących w układzie obserwacyjnym, wyznaczającym daną sieć. W zależności od zakresu badania niezawodności w wytycznych G-2.5 wyróżniono:

- *niezawodność globalną* rozpatrywaną jako przeciętną własność całej sieci,
- *niezawodność lokalną* odnoszącą się do pewnych grup punktów lub pojedynczych punktów.

Oprócz powyższego podziału wyodrębnia się także:

- *niezawodność wewnętrzną* wynikającą z nadliczbowości układu obserwacji,
- *niezawodność zewnętrzną* związaną z warunkami nawiązania danej sieci do punktów wyższych klas.

Niezawodność globalna z określana jako nadliczbowość względna jest parametrem liczbowym obliczanym za pomocą wzoru:

$$z = \frac{n_n}{n} \quad * \tag{3.2}$$

Po pomnożeniu ilorazu $n_n : n$ przez 100% niezawodność z można wyrazić w procentach.

Niezawodność lokalna, wyrażająca nadliczbowość pojedynczego punktu jest wyznaczana przy założeniu, że wszystkie pozostałe punkty są chwilowo uważane za punkty stałe. W ramach określania tej niezawodności należy wyróżnić punkt lub grupę punktów najsłabszych o najmniejszej niezawodności.

Niezawodność zewnętrzna sieci z_z związana z warunkami nawiązania określamy wzorem (3.3), analogicznym do wzoru (3.2), czyli jako stosunek ponadwymiarowej liczby elementów nawiązania n_{z_n} do liczby wszystkich elementów nawiązania n_z.

$$z_z = \frac{n_z - u_z}{n_z} = \frac{n_{zn}}{n_z} \tag{3.3}$$

gdzie: u_z – ilość elementów nawiązania niezbędnych do obliczenia danej sieci.

W stosunku do opisanego wyżej parametru niezawodności podobne zastosowanie ma podawany w literaturze geodezyjnej *wskaźnik pewności sieci* f, obliczany ze wzoru:

* Oznaczenia we wzorze (3.2) oraz wykorzystane w dalszym opisie są odmienne niż oznaczenia w wytycznych G-2.5 i zostały dostosowane do symboliki wprowadzonej w niniejszym podręczniku.

$$f = \frac{n}{u} \tag{3.4}$$

W przypadku, gdy w ramach wyznaczania kątów poziomych sieci zamiast obserwacji kątowych wykonano pomiar kierunków, wtedy dla każdego stanowiska należy uwzględnić jedną dodatkową niewiadomą, tzw. *niewiadomą orientującą z*, czyli nieznany na etapie pomiaru kąt jaki z półosią $+x$ tworzy kierunek zera limbusa teodolitu. W tej sytuacji łączna liczba niewiadomych u sieci wyniesie: $u = 2p + s$,
przy czym: s – ilość stanowisk pomiaru kierunkowego.

Z wzoru (3.4) wynika, że dla zadań jednoznacznie wyznaczalnych ($n = u$), dla których nie występuje problem wyrównania, współczynnik f jest równy 1. Im więcej w sieci występuje spostrzeżeń nadliczbowych, tym bardziej wzrasta powyżej 1 współczynnik f, zaś sieć ta jest pewniejsza. W poprawnie skonstruowanej sieci: $f \geqslant 1{,}6$. Dla typowych układów geometrycznych stosowanych w triangulacji otrzymujemy następujące wartości tego współczynnika:

- czworobok geodezyjny (rys. 2.3) $f = 1{,}67$,
- układ centralny (rys. 2.4) $f = 1{,}67$,
- pojedynczy łańcuch trójkątów (rys. 2.5) $f = 1{,}42$,
- podwójny łańcuch trójkątów (rys. 2.7 c) $f = 1{,}89$.

Przewidywanie średnich błędów spostrzeżeń wyrównanych dla badanej wstępnie sieci ułatwia wykorzystanie twierdzenia A. Otrębskiego* o następującej treści:

Przeciętna wartość stosunku „F" kwadratu błędu średniego obserwacji po wyrównaniu do kwadratu błędu średniego tejże obserwacji przed wyrównaniem jest równa stosunkowi liczby obserwacji niezbędnych „u" do liczby wszystkich obserwacji „n".

Oznacza to, że współczynnik F wyrażający zmniejszenie kwadratu średniego błędu obserwacji dzięki wyrównaniu wyniesie:

$$F = \frac{M_i^2}{m_i^2} = \frac{u}{n} = \frac{1}{f} \tag{3.5}$$

gdzie: M_i – średni błąd i-tego spostrzeżenia po wyrównaniu,
m_i – średni błąd i-tego spostrzeżenia przed wyrównaniem.

Porównując wzory: (3.4) i (3.5) bez trudu stwierdzimy, że współczynnik F stanowi odwrotność współczynnika pewności sieci f ($F = 1 : f$). Zaletą współczynnika zmniejszenia F jest ustalenie *a priori* efektu wyrównania, który zwiększa się wraz ze wzrostem ilości spostrzeżeń nadliczbowych. Wartość współczynnika F bliska jedności świadczy o znikomym rezultacie ewentualnego wyrównania. Fakt ten można wyraźnie zauważyć dla wielobocznego ciągu poligonowego nawiązanego obustronnie. W takim ciągu z pełnym nawiązaniem $n_n = 3$, niezależnie od ilości boków ciągu. Na przykład:

- dla ciągu o trzech bokach: $n=7$; $u=4$; $F = 0{,}57$,
- dla ciągu o sześciu bokach: $n=13$; $u=10$; $F = 0{,}77$,
- dla ciągu o dziewięciu bokach: $n=19$; $u=16$; $F = 0{,}84$.

Z powyższego zestawienia wynika, że wraz ze wzrostem liczby boków ciągu współczynnik zmniejszenia kwadratów błędów średnich w ciągach poligonowych szybko

---

* Dowód twierdzenia Otrębskiego został zamieszczony w podręczniku S. Hausbrandta „Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne" t. II PPWK Warszawa 1971.

zbliża się do jedności. W ostatnim przypadku dla F=0,84 wartość błędu średniego po wyrównaniu jest równa 0,92 ($\sqrt{0,84}$) wartości błędu średniego przed wyrównaniem, a więc efekt wyrównania wielobocznego ciągu jest praktycznie zerowy.

W ramach wymienionego wcześniej sposobu przybliżonego badania konstrukcji sieci można określić poprawność wyznaczenia poszczególnych jej punktów za pomocą wskaźnika wyznaczalności– w_i** (i-tego punktu) i porównaniu go ze wskaźnikiem założonym w projekcie. W tym celu wprowadzimy następujące oznaczenia elementów dochodzących do badanego i-tego punktu:

d_{ij} –element obserwacyjny długości pomierzonej pomiędzy badanym i-tym punktem a sąsiednim j-tym punktem,

k_{ij} – element obserwacyjny kierunku pomierzonego w serii kierunków o liczbie – r na punkcie badanym – i lub sąsiednim – j,

K_{ijk} – element obserwacyjny kąta pomierzonego w trójkącie wyznaczonym przez punkty: i, j, k.

Wskaźnik wyznaczalności i-tego punktu oblicza się jako sumę wyżej wymienionych wskaźników obserwacyjnych z pomiarów wykonanych na punkcie badanym i jego punktach sąsiednich, z którymi jest powiązany za pomocą bezpośrednich obserwacji. Na podstawie badań empirycznych ustalono następujące wartości wskaźników obserwacyjnych elementów dochodzących do badanego i-tego punktu sieci:

d_{ij}=1,0 –gdy jeden z punktów i lub j jest punktem nawiązania,

d_{ij}=0,5 – gdy obydwa punkty i, j są punktami wyznaczanymi,

$k_{i,j} = \frac{r-1}{r}$ – gdy jeden z punktów i lub j jest punktem nawiązania,

$k_{i,j} = \frac{r-1}{2r}$ – gdy obydwa punkty i, j są punktami wyznaczanymi,

K_{ijk}=1 – gdy punkty j oraz k są punktami nawiązania,

$K_{ijk}=\frac{1}{2}$ – gdy jeden z punktów i lub j jest punktem nawiązania,

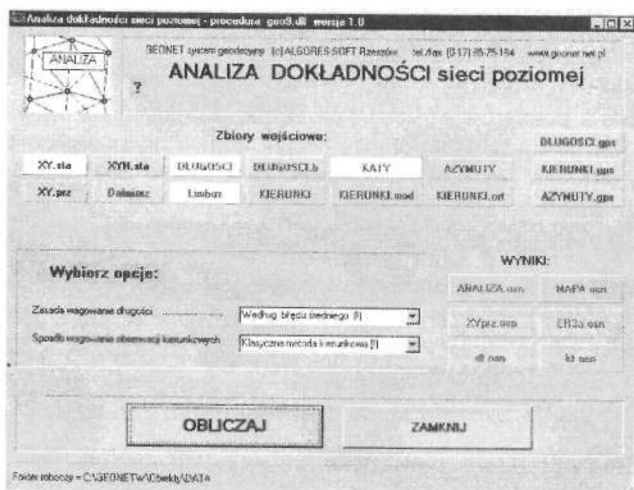
$K_{ijk}=\frac{1}{2}$ – gdy punkty i oraz j są punktami wyznaczanymi.

Do badania konstrukcji sieci wykorzystuje się szkic roboczy uzyskany po wywiadzie terenowym. Sposób przybliżony badania konstrukcji jest zalecany dla poprawnego zaprojektowania najsłabszych fragmentów sieci II klasy. Wskaźnik wyznaczalności w dla większości punktów sieci II klasy nie powinien być mniejszy od 3 ($w \geqslant 3$), natomiast dla punktów wyznaczonych metodą poligonizacji wskaźnik ten nie może być mniejszy od 2. Gdy badanie wykaże znaczne przekroczenie wartości współczynnika pewności sieci f powyżej 1,6 oraz większości wskaźników w ponad 4, wtedy można na wybranych punktach zredukować liczbę obserwacji, eliminując w szczególności te z nich, które wymagają stanowisk podwyższonych. W przypadku odwrotnym, gdy $f \leqslant 1,6$ zwiększa się ilość pomiarów na punktach o małej wartości wskaźnika w.

** Szczegółowe opisy sposobu przybliżonego badania konstrukcji sieci znajdują się w: podręczniku: T. Lazzarini i współautorzy „Geodezja; Geodezyjna osnowa szczegółowa" PPWK Warszawa-Wrocław 1990 oraz w wytycznych technicznych „G-1.5; Szczegółowa osnowa pozioma; projektowanie, pomiar i opracowanie wyników" GUGiK Warszawa 1984.

Numeryczna analiza dokładności polega na obliczeniu średnich błędów projektowanych punktów sieci na podstawie współczynników wagowych Q uzyskanych z wstępnego wyrównania. Niezbędne dane uzyskuje się z mapy projektu, na której w dowolnym układzie odczytuje się graficznie przybliżone wartości wielkości takich jak: współrzędne przybliżone, długości i kąty. Równania błędów i równania normalne metody pośredniczącej zestawia się bez wyrazów wolnych. Po rozwiązaniu równań wag uzyskujemy szukane współczynniki Q. Zakładając, że średni błąd typowego spostrzeżenia m_0=1 można określić błędy: współrzędnych wyznaczanych punktów oraz elementów sieci przewidzianych do pomiaru. Umożliwia to określenie zbyt słabych fragmentów sieci i zaprojektowanie pomiaru dodatkowych obserwacji wzmacniających.

Sposoby analityczno-graficznego wyznaczania elementów figur błędów dla punktów wyznaczanych zostały szczegółowo omówione w rozdz. 9, poświęconym wcięciom.



Rys. 3.2. Okno modułu „Analiza dokładności sieci poziomej"

Analizę wstępną dokładności sieci za pomocą programu GEONET przeprowadza się po uruchomieniu w głównym oknie programu polecenia Geo-spec/ Wstępne analizy sieci poziomej lub Geo-spec/ Wstępne analizy sieci niwelacyjnej. Następuje wtedy otwarcie jednego z okien dla osnów: poziomej (rys. 3.2) lub wysokościowej. Zgodnie z instrukcją programu analizy wstępne wykonuje się na etapie projektowania sieci, zaś jej wyniki analizy dają podstawę do oceny poprawności projektu sieci, jego ewentualnych modyfikacji pod względem struktury geometrycznej lub dokładności pomiaru. W szczególności ocenie może podlegać postulat wzmocnienia sieci obserwacjami GPS.

Niezależnie od procesu wyrównawczego, analizie może być poddana sieć pomierzona, zawierająca błędy grube obserwacji. Wstępna analiza, która nie wykorzystuje miar obserwacji, lecz jedynie ich plany oraz współrzędne przybliżone, pozwala ocenić docelowy model dokładnościowy sieci, do którego powinny zmierzać wyniki wyrównania. Program posługuje się zbiorami o identycznych nazwach i strukturach jak program wyrównania ścisłego. W tym przypadku jednak wszelkie miary obserwacji mogą być dowolnymi liczbami nieujemnymi (przykładowo w miejsce miar długości, kątów, kierunków, azymutów mogą być wpisane zera). Struktury rekordów muszą być identyczne jak w przypadku zbiorów przygotowywanych do wyrównania sieci (nie można zamiast miary obserwacji pozostawić pola pustego). Przy powyższych założeniach, sieć przygotowywana do wyrównania lub już wyrównana może być poddana wstępnej analizie dokładnościowej w tym samym katalogu, w oparciu o te same zbiory danych.

Program wstępnej analizy dokładności projektu sieci niwelacyjnej ma na celu wyznaczenie prognozowanych błędów średnich wysokości reperów przy założonych planach obserwacji, reperach nawiązania i zadanych parametrach dokładności pomiaru. Dodatko-

wymi wynikami są prognozowane błędy średnie obserwacji wyrównanych i poprawek obserwacyjnych. Zakłada się, że wejściowe zbiory danych mają nazwy i struktury analogiczne do zbiorów wejściowych dla wyrównania sieci niwelacyjnej ale miary obserwacji (różnice wysokości) są w tym przypadku pomijane. Program może mieć zastosowanie w szczególności do projektowania sieci do pomiarów przemieszczeń, realizacyjnych, a także sieci niwelacji państwowej różnych klas

3.6. Projektowanie osnowy wysokościowej

3.6.1. Zebranie, analiza i sposoby wykorzystania istniejących materiałów geodezyjno-kartograficznych

Ustalając zasięg nowoprojektowanej sieci należy uwzględnić perspektywiczny rozwój miast, osiedli i wsi, korzystając przy tym z planu zagospodarowania przestrzennego danego terenu i opinii organów tego planowania. Etapem poprzedzającym właściwe projektowanie jest zebranie w składnicach geodezyjnych i ośrodkach dokumentacji wszystkich dostępnych materiałów dotyczących sieci wysokościowych istniejących na wyznaczonym obszarze. Do materiałów tych należą: mapy przeglądowe osnów wysokościowych, katalogi wysokości punktów i ich opisy topograficzne, operaty pomiarowe, zestawienia wyników niwelacji, sprawozdania z okresowych przeglądów i konserwacji sieci wysokościowej. Zebrane materiały należy przeanalizować pod kątem ich wykorzystania w ramach zakładanej sieci niwelacyjnej. Możliwości wykorzystania istniejących punktów są następujące:

- jako punkty nawiązania punkty położone wewnątrz sieci i na jej obrzeżach, charakteryzujące się przynależnością do klasy wyższej niż kl. III, a tym samym błędem niwelacji na 1 km poniżej ±4 mm.
- jako punkty adaptowane z dawnych sieci i zakwalifikowane do odpowiedniej klasy III lub IV (błąd m_0 nie większy niż ±4mm dla kl. III ±10 mm dla klasy IV), dzięki czemu zostanie wykorzystany zarówno materiał obserwacyjny, jak i stabilizacja tych punktów,
- jako punkty stabilizowane, na których zostaną wykonane nowe obserwacje, ze względu na niekompletność lub za niską dokładność dawniejszych pomiarów.

Należy także wyłączyć z adaptacji punkty nieprzydatne z uwagi na nieprawidłową lokalizację, utrwalenie lub zbyt niską dokładność określenia wysokości. Wyniki i wnioski z analizy materiałów geodezyjnych dotyczących istniejącej osnowy wysokościowej stanowią jedną z części składowych opisu założeń wykonana w formie stabelaryzowanej.

3.6.2. Założenia projektu technicznego

Opis założeń projektu technicznego

Opis założeń projektu technicznego zawiera następujące informacje:

1) podstawa wykonania prac (numer zlecenia),
2) wykonawca,
3) zasięg sieci i lokalizacja obszaru określona poprzez godła arkuszy map w skali 1:10 000 oraz numer poligonu niwelacyjnego kl. II,
4) metoda pomiaru osnowy i obliczenia sieci,

5) przepisy techniczne, na których oparto zasady zakładania osnowy (instrukcje O-1/O-2, G-2 i wytyczne G-2.5),
6) charakterystyka, ocena i wnioski dotyczące istniejących sieci na podstawie analizy zebranych materiałów,
7) wykaz istniejących materiałów źródłowych oraz punktów nawiązania sieci,
8) charakterystyka terenu (obszar, sposób zagospodarowania, ukształtowanie, przebieg ciągów niwelacyjnych),
9) uzasadnienie potrzeb założenia osnowy i stopnia jej zagęszczenia, wynikających z aktualnego stanu istniejącej osnowy wysokościowej (wraz z propozycjami jej wykorzystania w nowej sieci) oraz planowanego zagospodarowania terenu.

Mapa założeń projektu technicznego

Mapa założeń projektu jest wykonywana na podkładzie mapy topograficznej przeważnie w skali 1:25 000 z naniesionym podziałem na arkusze mapy w skali 1:10 000. Na mapie tej zaznacza się ponadto:

- zasięg nowoprojektowanej sieci obejmujący obszar objęty projektem poszerzony o pas szerokości 3 km,
- punkty nawiązania sieci i ich oznaczenia,
- istniejące fragmenty sieci i punkty przewidziane do włączenia oraz ich numery zaznaczone kolorem czarnym,
- odcinki kontrolne sprawdzające stabilność punktów nawiązania,
- dodatkowe nawiązania sieci poprzez pojedyncze stanowiska boczne do osnowy grawimetrycznej i magnetycznej oraz punktów klas I i II położonych w odległości do 100 m od projektowanych linii niwelacyjnych,
- przebiegi linii niwelacyjnych nowoprojektowanej sieci zaznaczone kolorem czerwonym.

Do wykreślenia powyższych elementów na mapie założeń projektu stosuje się odpowiednie znaki umowne. Gdy obszar objęty projektem nie przekracza 10 km^2, wówczas dokumentacja założeń może ulec uproszczeniu.

3.6.3. Wywiad terenowy

Wywiad terenowy przeprowadza się w oparciu o dokumentację sporządzoną na etapie założeń projektowych. Jego zasadniczym celem jest sprawdzenie poprawności założeń, ich uściślenie i dokonanie ewentualnych zmian wcześniejszych propozycji przebiegu linii niwelacyjnych w oparciu o informacje zdobyte w terenie oraz zebranie danych potrzebnych do opracowania ostatecznego projektu. Dokumentami pomocniczymi są podczas wywiadu opisy topograficzne istniejących punktów niwelacyjnych oraz aktualna mapa zasadnicza i topograficzna danego obszaru. Do szczegółowych zadań wywiadu zalicza się:

- sprawdzenie stanu istniejących znaków stabilizujących punkty nawiązania oraz znaków na projektowanych liniach przewidzianych do adaptacji,
- ustaleniu ostatecznego przebiegu linii, miejsc stabilizacji poszczególnych punktów wysokościowych oraz liczby znaków naziemnych i ściennych poszczególnych typów.

Podczas doboru usytuowania punktów szczegółowej osnowy wysokościowej trzeba zwracać uwagę na konieczność zapewnienia posadowionym i zaniwelowanym

znakom warunków trwałości znaku i niezmienności raz określonej wysokości punktu. Z tego względu należy unikać takich lokalizacji jak:

- grunty nasypowe,
- grunty pochodzenia organicznego (ziemie próchnicowe i torfy),
- grunty silnie pęczniejące np. gliny,
- tereny położone w pobliżu (do 100 m) cieków i zbiorników wodnych,
- strome zbocza o spadku powyżej 5°,
- grunty ukośnie uwarstwione (kąt upadu warstw liczony względem poziomu przekracza 10°),
- miejsca położone nad armaturą podziemną,
- korony dróg i szlaków kolejowych
- skarpy i ich otoczenie w pasie podwójnej wysokości skarpy,
- hałdy i wydmy piaszczyste,
- miejsca narażone na wstrząsy i drgania,
- nowe budynki (do 2 lat), budynki o małej głębokości fundamentów (nie przekraczającej 1,3 m) lub cienkich ścianach (cegła – poniżej 0,55 m , beton – poniżej 0,25 m),
- miejsca o wysokim poziomie wód gruntowych (powyżej 3 m),
- obszary szkód górniczych,
- wyrobiska i tereny znajdujące się w zasięgu eksploatacji odkrywkowej.

Znaki wysokościowe należy zakładać na gruntach o dobrej nośności podłoża, nie podlegających odkształceniom np. żwiry i piaski grubo usytuowane warstwami poziomymi. Ze względu na niszczące działanie wód gruntowych na znaki korzystna ich lokalizacja występuje na wzniesieniach terenu.

3.6.4. Opracowanie projektu technicznego

Projekt techniczny, składający się z części opisowej i graficznej, sporządza się na podstawie założeń projektowych skorygowanych poprzez wyniki wywiadu terenowego. Do części opisowej zaliczamy: opis techniczny uzasadniający projekt, opis położenia poszczególnych znaków wysokościowych (przyjętych do renowacji i projektowanych) oraz protokół kontroli technicznej, natomiast część graficzną stanowi mapa projektu.

Opis projektu

Opis projektu technicznego powinien zawierać:

- analizę każdej linii niwelacyjnej (ciągu) dotyczącą jej przebiegu i długości oraz ilości i gęstości położonych na niej znaków wysokościowych: projektowanych i adaptowanych z dawnych sieci z podaniem typów poszczególnych znaków,
- wyniki wywiadu terenowego i uzasadnienie odstępstw projektu w stosunku do założeń technicznych,
- zestawienię długości linii (ciągów), wykazy wszystkich punktów sieci projektowanych i adaptowanych z podziałem znaków na: naziemne, ścienne, skalne,
- wykaz punktów znajdujących się w odległości do 100 m, przewidzianych do dowiązania bocznego,
- zalecenia i inne wskazówki dotyczące realizacji projektu.

Mapa projektu technicznego

Mapa ta jest sporządzana na podkładzie mapy topograficznej w skali 1:10 000 lub mniejszej. Na mapie należy przedstawić przebieg poszczególnych linii niwelacyjnych i odcinków kontrolnych, położenie punktów węzłowych oraz znaków wysokości projektowanych i adaptowanych z dawnych sieci.

Linie niwelacyjne numerowane są w danym poligonie niwelacyjnym równoleżnikowo w zakresie od 1 do *n*, rozpoczynając od lewego górnego narożnika arkusza mapy. Na mapie oznaczenie linii występuje w formie pseudoułamkowej tj. oprócz numeru linii (nad kreską) podaje się również jej długość w km (pod kreską).

Punktom wysokościowym sieci znajdujących się należy przypisać oznaczenia uzyskane z numeracji dwuczłonowej. Pierwszy człon stanowi godło arkusza mapy w skali 1:10 000, na którym występuje dany punkt, zaś drugim członem jest właściwy numer punktu z zakresu: od 1000 do 1999 dla klasy III i od 2000 do 9999 dla klasy IV.

Pierwszy człon oznaczeń punktów jest pomijany w dokumentach zawierających wykazane wyraźnie godło mapy. Na mapie dla punktów wykorzystuje się także formę pseudoułamkową: w „liczniku" podaje się numer punktu, zaś w „mianowniku" symbol głowicy składający się z dwóch liter i czterech cyfr.

Na mapach założeń projektowych i projektu technicznego stosuje się znaki i symbole pokazane na przykładach projektów znajdujących się w załącznikach do wytycznych technicznych G-2.5.

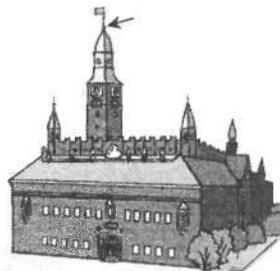
ROZDZIAŁ 4:
Stabilizacja punktów osnowy geodezyjnej

4.1. Zasady ogólne osadzania znaków geodezyjnych

Stabilizacja punktu geodezyjnego jest czynnością, polegającą na osadzeniu w terenie znaku lub zespołu znaków geodezyjnych. Znak geodezyjny, będący materialnym przedmiotem zaznaczającym w terenie położenie punktu osnowy, powinien być wykonany z trwałego tworzywa, zapewniającego znakowi możliwość wieloletniego użytkowania. Charakter trwały jest cechą charakterystyczną osnów geodezyjnych: podstawowej i szczegółowej. Po zatwierdzeniu projektu technicznego sieci punkty tych osnów stabilizuje się w terenie za pomocą znormalizowanych znaków wykonanych z materiałów odpornych na zniszczenie (np. granit, andezyt, beton zbrojony, stal, nierdzewne stopy metali, PCW), zapewniających długotrwałe wykorzystywanie osnowy.

Aktualnie punkty osnowy pomiarowej także stabilizuje się znakami trwałymi, z wyjątkiem terenów o małym zainwestowaniu obecnym lub przyszłym, na których przeważnie stosuje się stabilizację tymczasową, czyli tzw. *markowanie* za pomocą prowizorycznych znaków takich jak: paliki drewniane, rurki drenarskie, bolce i rurki żelazne, krzyże malowane farbą olejną na asfalcie lub betonie itp. W charakterze znaków mogą być także wykorzystywane istniejące w terenie widoczne na jego powierzchni elementy armatury.

Oprócz przedmiotów sztucznych, specjalnie wykonanych z metalu, betonu lub kamienia, znakami geodezyjnymi mogą być stabilne i dobrze widoczne elementy naturalne lub trwałe detale znajdujące się na wyższych budynkach i budowlach stałych (rys. 4.1, 4.2, 5.20) położone na wieżach kościołów, kaplic, zamków, masztach, wieżach ciśnień, latarniach morskich i na innych wyniosłych obiektach, często zakończonych elementem, który służy jako sygnał celowniczy np. bolec, podstawa krzyża, gałka lub inny element ozdobny. Rysunek celu i sposób jednoznacznego naprowadzenia na niego siatki kresek lunety musi być zamieszczony w opisie topograficznym danego punktu (rys. 4.2). Zaletą znaków naturalnych jest długowieczność, brak konieczności sygnalizacji, dobra widoczność z dużej odległości oraz uniknięcie kosztów stabilizacji. Wadą ich jest niedostępność, co wiąże się z potrzebą dokonywania przeniesień współrzędnych oraz wyznaczania punktów ekscentrycznych, dla których elementy mimośrodu muszą być określane pośrednio. Położenie punktów naturalnych wyznaczane jest z reguły metodą wielokrotnych wcięć w przód. W określonych warunkach terenowych na dachach, tarasach i balkonach wysokich budowli mogą być także osadzane *znaki sztuczne*, najczęściej w postaci zabetonowanej rury lub metalowej płytki z wyrytym krzyżem (rys. 4.6). Znaki geodezyjne w zależności od miejsca osadzenia można podzielić na: gruntowe (ziemne), skalne i ścienne.


Rys. 4.1. Punkt celowania na wieży

Na podstawie inwentaryzacji znaków geodezyjnych, przeprowadzonej na terenie Polski w latach osiemdziesiątych, stwierdzono istnienie punktów należących do następujących osnów stabilizowanych ok. 400 typami utrwaleń:

- około 6 tysięcy punktów poziomej osnowy podstawowej (SAG, SW),
- około 18 tysięcy punktów triangulacji zagęszczającej,
- około 80 tysięcy punktów triangulacji lokalnego znaczenia,
- około 8 tysięcy punktów poligonizacji precyzyjnej,
- około 3 miliony punktów poligonizacji technicznej,
- około 70 tysięcy punktów osnów wysokościowych.

Znaki tych osnów pochodzą z różnych okresów historycznych, począwszy od połowy XIX wieku do czasów obecnych. Szczegółowe zestawienie nazw i rysunków technicznych znaków osnów zakładanych dawniej i współcześnie zostało podane w wytycznych technicznych G-1.9 „Katalog znaków geodezyjnych".

OPIS TOPOGRAFICZNY PUNKTU GEODEZYJNEGO

Oznaczenie sekcji: *163.331*

Nazwa punktu: *punkt osnowy szczegółowej III kl.* triangulacyjnego ~~poligonowego, wysokościowego~~

Oznaczenie słupa

Nr katalogowy: *124 000*

Kraków-Krowodrza (Gmina) · *Mydlniki* (Miejscowość) · *Parafia Rzymsko-Katolicka Mydlniki* (Użytkownik) · Miejsce zamieszkania

Typ zabudowy · Wysokość stolika · Wysokość heliotropu · Wys. szczytu daszka · Wys. krzyżaka · Stan

X = –34640,54
Y = 300039,73

N
Balice
ul. K. Wierzyńskiego
ul. M. Hemara
ul. Balicka
Kraków
ul. Dolińskiego
p 124 000
cel

WYKONAWCA: *OPGK – Kraków sp. z o. o.*
Instytucja
inż. M. Pochwała 9.06.1997
Sporządził · Data

Rys. 4.2. Opis topograficzny punktu osnowy poziomej położonego na wieży kościelnej

Dla osnów poziomych i wysokościowych zakładane są znaki określające położenie punktów, natomiast punkty geodezyjnych osnów: grawimetrycznych i magnetycznych określają lokalne geofizyczne właściwości Ziemi: przyspieszenie siły ciężkości i elementy ziemskiego pola magnetycznego. Pomocniczą kategorię znaków stanowią tzw. *znaki rozpoznawcze*, służące do ułatwienia odszukiwania punktów w terenie np. pobocznikі, sygnały triangulacyjne i słupy osadzane w pobliżu właściwych znaków.

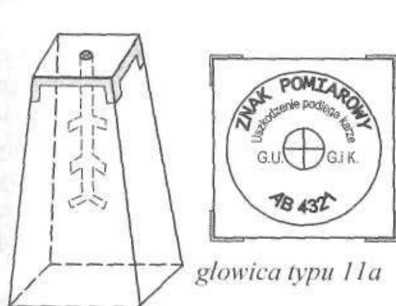
Oprócz doboru właściwego typu znaku ważna jest także jego prawidłowa lokalizacja punktu oraz powiązanie znaku z podłożem, którym najczęściej jest grunt, skała lub budowla. Wszystkie wymienione elementy tj.: typ znaku, lokalizacja i podłoże jego osadzenia powinny zapewniać punktom geodezyjnym: trwałość, łatwość odszukiwania, identyfikacji, możliwość sygnalizacji do celów fotogrametrycznych oraz nienaruszalność i stałość położenia w czasie i przestrzeni. Zgodnie z instrukcją G-2 (wydanie V z r. 2000) lokalizacja znaków powinna zapewnić możliwość pomiaru techniką GPS oraz nie budzić sprzeciwu właścicieli nieruchomości.

Położenie punktu osnowy, określane w przybliżeniu podczas tworzenia założeń projektowych danej sieci, ustala się ostatecznie w czasie wywiadu terenowego, którego celem jest weryfikacja założeń na gruncie. Następną czynnością związaną z zakładaniem sieci osnowy jest osadzenie wybranych typów znaków w miejscach do tego przewidzianych w projekcie technicznym osnowy. Na znakach sztucznych właściwe położenie punktu osnowy poziomej jest na znaku oznaczone poprzez centr, nad którym podczas pomiarów ustawia się teodolit lub sygnał celowniczy.

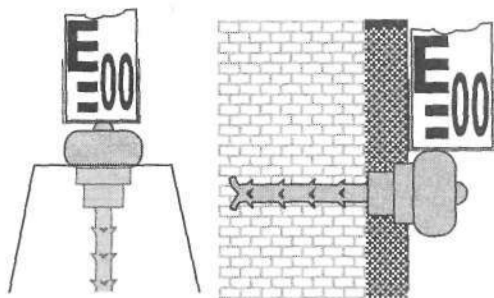
Obecnie wyodrębniono 86 typów aktualnie wykorzystywanych znaków, które są oznaczane za pomocą trzycyfrowego kodu numerycznego. Jego pierwsze dwie cyfry od 01 do 99 oznaczają typ znaku stabilizowanego na właściwym punkcie, natomiast trzecia cyfra oznacza rodzaj znaku rozpoznawczego osadzanego obok tego punktu. Spośród 86 typów znaków przypada: na osnowę poziomą – 61, na osnowę wysokościową – 20, – na osnowę grawimetryczną – 4, zaś na osnowę magnetyczną – 1. Przykładowo można tu wymienić najczęściej stosowane grupy znaków:

- 11 – 13 znaki osnowy poziomej na budowlach stałych i na skałach,
- 15 – 26 znaki gruntowe jednopoziomowe,
- 29 – 52 znaki gruntowe dwupoziomowe,
- 73 – 84 znaki wysokościowe naziemne,
- 86 – 90 znaki wysokościowe ścienne i na skałach.

W obrębie poszczególnych typów znaków oznaczonych cyfrowo dodatkowo rozróżniane są ich wersje oznaczane literami: a, b, c itd. Szczegółowe informacje i rysunki znaków są zamieszczone w wytycznych technicznych G-1.9.



Rys. 4.3. Znak osnowy poziomej: typ 11a

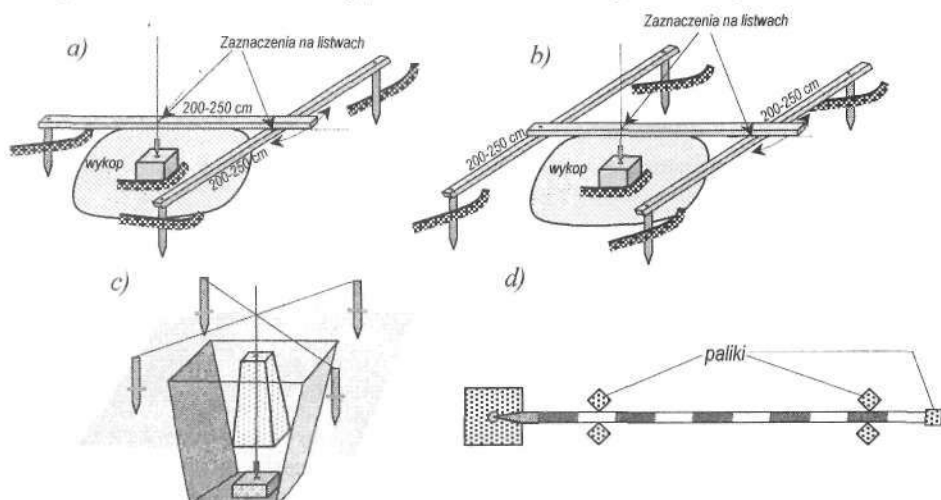


Rys. 4.4. Pionowe i poziome ustawienie głowicy reperu znaku wysokościowego

Aby umożliwić ewentualne wznowienie zniszczonego znaku naziemnego stosuje się *stabilizację wielopoziomową*, polegającą na osadzeniu w jednej linii pionowej centrów

dwóch, trzech lub większej liczby znaków w tym: jednego naziemnego i 1÷2 znaków podziemnych. Pod znakiem naziemnym umieszcza się znak podziemny, którym jest przeważnie płytka (kostka) betonowa lub granitowa z centrem w postaci krzyża, umieszczona ok. 10 cm pod podstawą słupa. Wymiary prostopadłościennej płytki mieszczą się w zakresach: wysokość 0,10 m ÷ 0,15 m, bok kwadratowej podstawy 0,20 m ÷ 0,60 m. Centry znaków stabilizacji wielopoziomowej powinny leżeć na tej samej pionowej linii prostej. Dla spełnienia tego warunku stosuje się sposoby i konstrukcje pokazane na rys. 4.5 a, b, c, d, przy czym dwie ostatnie (4.5 c, d) zapewniają niższą dokładność ustawienia znaków. Centrowanie znaków umieszczonych na różnych poziomach może być również wykonane za pomocą pionownika optycznego umieszczonego na statywie lub specjalnie do tego celu wykonanej konstrukcji.

Dla stabilizacji punktów osnowy poziomej wyższych klas stosuje się przeważnie utrwalenie trójpoziomowe (rys. 4.7 b), przy czym podczas pomiaru usuwany jest znak naziemny, zaś instrument ustawiany jest nad centrem znaku podziemnego.



Rys. 4.5. Sposoby osadzania centrów znaków naziemnych i podziemnych w jednej linii pionowej

Znak geodezyjnej osnowy poziomej musi posiadać dokładnie zaznaczony tzw. *centr* (rys. 4.3), czyli element wyraźnie wskazujący właściwy punkt geodezyjny, którego położenie określają znane współrzędne prostokątne X, Y. Znak osnowy wysokościowej posiada specjalnie ukształtowaną głowicę żeliwną, zwaną *reperem*, wyposażoną w elementy sferyczne dostosowane do pionowego lub poziomego ustawienia głowicy. Jej najwyższy punkt, styczny do płaszczyzny stopki łaty niwelacyjnej (rys. 4.4), ustawianej na reperze, wyznacza wysokość H znaku określaną podczas pomiaru osnowy wysokościowej danej klasy.

Prawidłowo zlokalizowany znak osnowy podstawowej lub szczegółowej ma zapewniać dobre warunki nawiązania dla punktów osnowy pomiarowej. Znak naziemny ma być łatwy do odszukania i dostępny do pomiaru elementów nawiązania (kąta i boku), zaś znak niedostępny, położony na wysokiej budowli, stosowany do orientacji pomiarów, powinien umożliwiać dobrą obserwację jego sygnału celowniczego na dużym obszarze.

4.2. Znaki poziomej osnowy szczegółowej kl. II

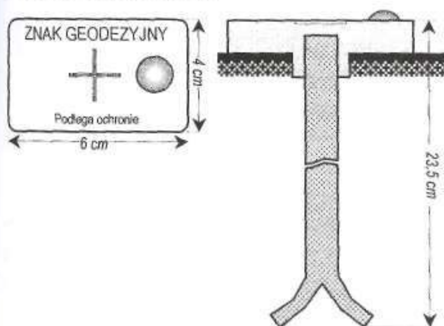
Typ znaku i sposób stabilizacji jest zależny od rodzaju i sposobu użytkowania gruntu oraz warunków terenowych. Zgodnie z wymogami instrukcji G-2 i zaleceniami podanymi w wytycznych G-1.9, G-2.5 punkty osnowy poziomej II klasy należy stabilizować jednym z następujących sposobów:

- Na terenach niezabudowanych – dwupoziomowo, za pomocą znaków betonowych lub granitowych. Znak należy otoczyć rowem w kształcie kwadratu o długości krawędzi wewnętrznej około 2 m i głębokości około 0,3 m.
- Na terenach zabudowanych i na gruntach skalistych – jednopoziomowo lub dwupoziomowo, stosując znaki z metalu lub innych trwałych materiałów i zabezpieczając położenie znaków pobocznikami lub znakami ściennymi.

Dla osnowy poziomej kl. II zalecane są następujące typy znaków:

- na gruntach: 36a, 37,
- na budowlach stałych i skałach: 11b (rys. 4.6), 12a, 12f,

Znaki stosowane do stabilizacji punktów osnowy kl. II dzielą się na dwupoziomowe jednofunkcyjne, dwupoziomowe dwufunkcyjne i jednopoziomowe jedno- i dwufunkcyjne. Typ znaku i sposób jego stabilizacji zależą od rodzaju podłoża i lokalizacji punktu.



Rys. 4.6. Głowica znaku dwufunkcyjnego typu 11b

Znaki *jednofunkcyjne* są przydatne do utrwalenia punktów osnowy tylko jednego rodzaju (poziomej lub wysokościowej), zaś znaki *dwufunkcyjne* stanowią stabilizację punktów zaliczanych zarówno do osnowy poziomej jak i wysokościowej. Znaki te posiadają umieszczone obok siebie dwa elementy: centr o określonych współrzędnych X, Y i reper o znanej wysokości H.

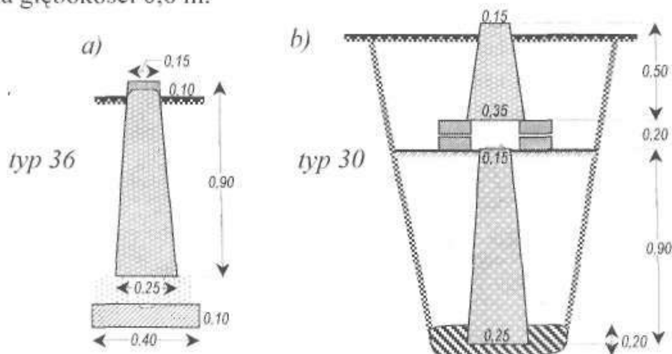
Znak dwufunkcyjny typu 11b (rys. 4.6) stosowany dla kl. II osnowy poziomej jest wykonany z metalu i może być osadzany samodzielnie np. na płaskich dachach budowli stałych lub jako głowica na wierzchu słupa betonowego. Przy niższej kategorii dokładności wyznaczenia wysokości znaku osnowy poziomej, odpowiadającej wymogom przewidzianym dla wysokościowej osnowy pomiarowej, rolę reperu może spełniać także centr znaku.

Gruntowe (ziemne) znaki naziemne osnowy poziomej mają kl. II przeważnie kształt ostrosłupa ściętego o kwadratowych podstawach, których wymiary boków mieszczą się przeważnie w przedziale: 0,15 m ÷ 0,20 m dla podstawy górnej oraz 0,20 m ÷ 0,25 m dla podstawy dolnej. Wysokość słupa wynosi z reguły od 0,70 m do 0,90 m.. Dla kl. II stosuje się najczęściej znak typu 36 z żeliwną głowicą (rys. 5.6 a) i centrem w kształcie krzyża. Na terenach rolnych zaleca się dwupoziomowy i dwufunkcyjny znak typu 30 (rys. 4.7 b).

Na dnie wykopu o głębokości 1,5 m średnicy 0,4 m umieszcza się warstwę zaprawy betonowej grubości 20 cm, w której zatapia się słup o wysokości 0,90 m u góry zaopatrzony w głowicę. Wykop zasypuje się do wysokości 0,90 m warstwą ubitej ziemi, na którą nasypuje się 3 – 5 centymetrową warstwę piasku. Na jej powierzchni tworzy się stu-

dzienkę z dwóch warstw cegieł, a na niej ustawia górny słup betonowy o wysokości 0,50 m. Po obsypaniu i ubiciu ziemi słup powinien wystawać 10 cm ponad powierzchnię gruntu. Jeśli wystający znak może utrudniać ruch pieszy lub prace związane z uprawą roli, wtedy zamiast górnego słupa układa się na studzience płytę chodnikową.

Oprócz punktów właściwych stabilizacji podlegają także punkty z nim związane takie jak: pobocznik, punkty kierunkowe, punkty przeniesienia współrzędnych i punkty ekscentryczne. *Poboczniki* stanowią uzupełniające zabezpieczenie ustalonego położenia znaku głównego i są stabilizowane w jego pobliżu jako dodatkowe znaki, które w wypadku jego przemieszczenia lub zniszczenia umożliwiają odtworzenie lokalizacji znaku głównego z dokładnością do 1 cm. Do osadzania poboczników używa się najczęściej znaku w postaci płyty betonowej lub granitowej o wymiarach 30×30×10 cm, z centrem, osadzonej na głębokości 0,6 m.



Rys. 4.7. Znaki stosowane do stabilizacji osnowy poziomej II klasy

Dla punktów kl. II stabilizowanych w gruncie osadza się przynajmniej dwa poboczniki na głębokości 0,6 m w odległości 10 m od centra znaku głównego, wzdłuż linii prostej łączącej ten znak z punktem kierunkowym. W terenie zabudowanym rolę poboczników mogą pełnić trwałe szczegóły sytuacyjne z wyraźnym punktem, stanowiącym początek miary odległości do punktu głównego, lub metalowe trzpienie osadzone na ścianach pobliskich budynków. Dla punktów na budowlach stałych i skałach jako poboczniki (minimum 3) stosuje się bolce lub nity.

Spośród poszczególnych rodzajów stabilizowanych punktów geodezyjnych osnowy poziomej możemy wyróżnić punkty: macierzyste, przeniesienia współrzędnych, mimośrodowe, kierunkowe i łączne.

Punkt kierunkowy (azymutalny) jest punktem terenowym widocznym bezpośrednio z punktu osnowy poziomej, który wraz z nim tworzy bok o dokładnie wyznaczonym azymucie topograficznym. Para tych punktów (punkt macierzysty i punkt kierunkowy) umożliwia nawiązanie kątowe osnowy niższej klasy np. ciągu poligonowego. Punkt kierunkowy osnowy II kl. stabilizuje się przeważnie dwupoziomowo znakiem typu 36 (rys. 4.7 a). Niekiedy punkt kierunkowy bywa także punktem o znanych współrzędnych X, Y.

Punkt mimośrodowy jest punktem zakładanym dla wykonania niektórych lub wszystkich niezbędnych obserwacji ze względu na niedostępność właściwego punktu osnowy lub zasłonięcie wychodzących z niego celowych przez przeszkody. Po zmierzeniu elementów mimośrodów (e, Θ) stanowisk lub celów obserwacje mimośrodowe podlegają redukcjom do właściwego punktu. Punkty mimośrodowe najczęściej markuje się lub,

w przypadku włączenia do sieci i wyznaczenia współrzędnych, stabilizuje płytami betonowymi 0,30×0,30×0,10 m na głębokości 0,6 m lub na budowlach znakiem 12 w postaci grubego pręta z wyrytym krzyżem.

Punkt przeniesienia współrzędnych jest punktem geodezyjnym dostępnym do bezpośredniego pomiaru, założonym w pobliżu (100 – 300 m) trudno dostępnego punktu macierzystego w celu nawiązania osnowy niższej klasy. Do określenia współrzędnych punktu przeniesienia zakłada się konstrukcję zwaną *siatką przeniesienia* (zob. ust. 5.4), wiążącą go z punktem macierzystym. Punkty przeniesienia współrzędnych stabilizuje się takimi samymi znakami jak znaki punktów tej samej klasy osnowy poziomej. Jeden punkt macierzysty może posiadać więcej niż jeden punkt przeniesienia (zwykle 1 ÷ 3).

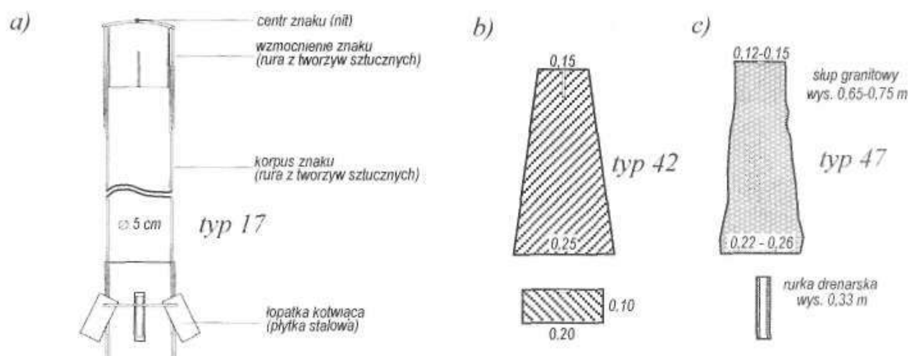
Punkt bliski jest punktem należącym do sąsiedniej lub dawniejszej sieci, położonym w niewielkiej odległości od punktu nowo założonej osnowy geodezyjnej. Powinien on być powiązany geometrycznie z rozpatrywaną siecią np. poprzez wcięcie wielokrotne lub domiary biegunowe. Za punkty bliskie uważamy punkty, które w terenie zabudowanym lub zalesionym znajdują się w odległości do 50 m od siebie, zaś w terenie odkrytym – w odległości do 300 m.

Punkt łączny jest punktem należącym do różnych sieci geodezyjnych, umożliwiając ich wzajemne powiązanie. Punktem łącznym może być również punkt, którego położenie zostało określone w odmiennych układach współrzędnych. Podczas transformacji punkt ten może spełniać rolę punktu dostosowania. Punkty łączne mogą być również zakładane w pobliżu granic styku stref odwzorowawczych.

4.3. Znaki poziomej osnowy szczegółowej kl. III

Po zatwierdzeniu projektu technicznego dokonuje stabilizacji punktów osnowy poziomej klasy III za pomocą następujących sposobów:

1) na terenach zabudowanych, gdy lokalizacja znaku nie zabezpiecza jego trwałości – wieloznakowo, za pomocą trwałych znaków naziemnych, podziemnych lub ściennych (minimum trzech),
2) na terenach niezabudowanych – dwupoziomowo za pomocą znaków z tworzyw sztucznych lub znaków metalowych, granitowych lub betonowych.



Rys. 4.8. Znaki stosowane do stabilizacji osnowy poziomej III klasy

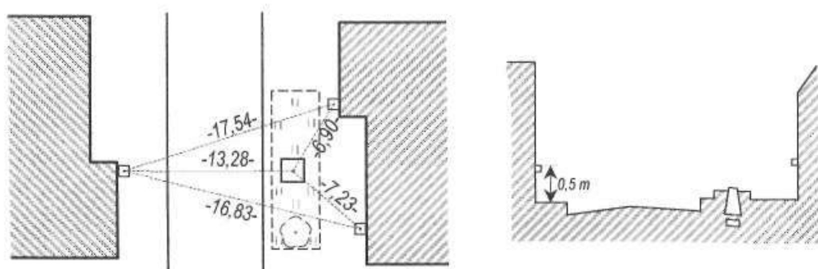
Dla punktów osnowy poziomej kl. III zalecane są następujące typy znaków:

- na terenach niezabudowanych: 42, 43, 46, 48 (słup+płyta) lub 44, 45 (skrzynka metalowa+płyta),
- na budowlach stałych: 11,
- na skałach: 11, 12, 13,
- na gruntach rolnych i poboczach dróg, gdzie znak może być łatwo uszkodzony: 25, 26 (znaki podziemne),
- na terenach grząskich, zabagnionych i torfiastych: 43, 49 (pal drewniany ∅15÷20 cm, sięgający zwięzłego gruntu).

Oprócz wcześniej wymienionych znaków dopuszczalne jest stosowanie znaków z tworzyw sztucznych typu 17 i 54, odpowiednio dobranych do rodzaju gruntu.

Dwufunkcyjny znak typu 17 (rys. 4.8 a) w postaci rury o długości 0,8 m lub 1,3 m jest wykonany z tworzywa sztucznego. Po wprowadzeniu znaku do otworu wywierconego świdrem w gruncie i rozchyleniu stalowych łopatek kotwiących rurę wypełnia się zaprawą betonową. Najczęściej stosowanym utrwaleniem punktu osnowy kl. III zakładanej przeważnie technologią poligonizacji technicznej jest znak typu 42 (rys. 4.8 b): słup betonowy o wysokości 0,70 – 0,75 m z centrem w postaci zabetonowanej w znaku rurki o średnicy 0,010 – 0,015 m lub znak 47 (rys. 4.8 c) słup granitowy z centrem w kształcie krzyża i ze znakiem podziemnym, którym jest rurka drenarska lub butelka z grubego szkła ustawiona dnem do góry.

Na terenach zabudowanych, gdy istnieje możliwość uszkodzenia znaku osadzonego np. w chodniku ulicy, należy zakładać przynajmniej trzy poboczniki utrwalone znakami naziemnymi, podziemnymi lub ściennymi i wykonać do nich pomiary odległości (rys. 4.9) umożliwiające odtworzenie właściwego punktu z dokładnością do 0,01 m.



Rys. 4.9. Położenie poboczników w terenie zabudowanym

Na punktach założonych dawniej, adaptowanych do nowych sieci, z reguły pozostawia się stabilizację odmienną w stosunku do obecnych wymogów, pod warunkiem wysokiej trwałości znaków naziemnych. Należy też sprawdzić i w razie potrzeby skorygować położenie lub wymienić znaki podziemne. Płytę betonową (0,2×0,2×0,1 m) znaku podziemnego z centrem w postaci krzyża osadza się na głębokości 0,8 m, na dnie wykopu o nienaruszonej strukturze gruntu. Boczne krawędzie górnej powierzchni płyty ustawia się wzdłuż linii północ-południe.

4.4. Odtwarzanie i wznawianie punktów poziomej osnowy szczegółowej

Odtworzenie punktu polega na przywróceniu jego pierwotnego położenia z zachowaniem dotychczasowych współrzędnych *X, Y* w przypadku, gdy znaki określające prawidłową lokalizację punktu w terenie zostały przemieszczone lub zniszczone. Podstawę do odtworzenia stanowią miary zawarte w opisie topograficznym lub na szkicu siatki mimośrodu bądź przeniesienia, wyznaczające położenie centrów znaków względem nienaruszonych poboczników lub innych znaków zespołu np. punktów mimośrodowych (ekscentrycznych) lub punktów przeniesienia współrzędnych.

Kontrolą prawidłowości odtworzenia jest pomiar długości tych samych odcinków zredukowanych do poziomu, które zostały zanotowane w opisie lub na szkicu siatki pomiędzy centrem punktu odtworzonego a innymi punktami zespołu znaków. Różnice pomiarów: pierwotnego i po dokonaniu odtworzenia nie mogą przekraczać ±1 cm dla punktów kl. II oraz ±2 cm dla punktów kl. III. Dodatkową obowiązkową kontrolę stanowi odłożenie odcinków centr-pobocznik na linii pomiarowej utworzonej przez centr i punkt kierunkowy oraz porównanie uzyskanych wyników z analogicznymi miarami na opisie topograficznym. Rozbieżności długości tych odcinków nie powinny być większe niż ±2 cm. Pomiar odtworzeniowy wykonuje się z dokładnością do ±0,5 cm skomparowanym, stalowym przymiarem wstęgowym (taśma, ruletka) lub atestowanym dalmierzem elektrooptycznym.

Odtworzenie punktu klasy II przy czterech zachowanych pobocznikach (rys. 4.10 a) wykonuje się poprzez dwukrotne wcięcie liniowe z przeciwległych baz utworzonych przez dwie różne pary poboczników. Gdy punkt posiada tylko dwa zachowane pobocznik, wówczas za pomocą teodolitu należy wytyczyć celową łączącą zewnętrzny pobocznik I i punkt kierunkowy (rys. 4.10 b), a następnie wzdłuż wytyczonej linii odmierzyć od pobocznika I odcinki: pobocznik I-centr punktu-pobocznik II.



Rys. 4.10. Odtworzenie położenia punktu za pomocą miar do poboczników

Po odtworzeniu punktu poprzez nowy pomiar należy ponownie wyznaczyć jego wysokość *H* i azymut *A* do punktu kierunkowego.

Dla punktów kl. III zakładanych za pomocą poligonizacji, odtworzenie zniszczonego punktu można wykonać poprzez odmierzenie kątów i boków z dwóch punktów sąsiednich. Po przeprowadzeniu stabilizacji punktu wznawianego należy ponownie pomierzyć kątów i boki do punktów sąsiednich. Zgodnie z wytycznymi G-2.5 różnice elementów pierwotnych i zmierzonych nie mogą przy tym przekroczyć: 45^{cc} dla kątów oraz $0{,}0001 \cdot d$ dla długości. W przypadku uzyskania większych rozbieżności trzeba ponownie obliczyć współrzędne wznowionego punktu i przekwalifikować go na punkt osnowy pomiarowej.

Wznowienie punktu wykonywane jest wtedy, gdy nie ma możliwości jego odtworzenia i polega na jego ponownym zastabilizowaniu przy tej samej lub zmienionej lokali-

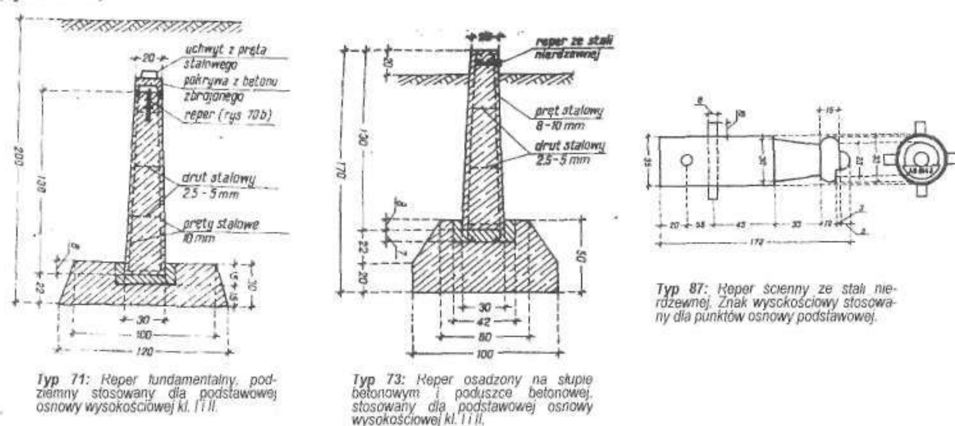
zacji oraz wykonaniu nowego pomiaru i wyrównania, na podstawie których wznowiony punkt otrzymuje nowe współrzędne *X*, *Y* wraz oceną dokładności położenia.

Na wznowienie punktów wyznaczonych metodą poligonizacji składają się następujące czynności:

- stabilizacja znaków w dotychczasowym lub zmienionym usytuowaniu,
- wykonanie niezbędnych uzupełniających pomiarów kątów i długości na punktach wznawianych i nienaruszonych punktach sąsiednich,
- wyrównanie spostrzeżeń zespołu nowych i zaadaptowanych obserwacji dla danego ciągu lub sieci w nawiązaniu do punktów wyższej klasy,
- przyjęcie współrzędnych z wyrównania dla wszystkich wyrównanych punktów sieci jako ostatecznych,
- sprawdzenie spełnienia wymagań dokładnościowych i kwalifikacja punktów do osnowy szczegółowej kl. III lub do osnowy pomiarowej.

4.5. Znaki geodezyjnej osnowy wysokościowej

Podstawowa osnowa wysokościowa (kl. I, II) obejmuje swym zasięgiem całe terytorium Polski, zaś łączna długość ciągów niwelacji podstawowej wynosi ok. 23 000 km. Jej pomiar wykonano w latach 1952 – 1958, z wykorzystaniem pewnych fragmentów osnowy wysokościowej założonej przed II Wojną Światową. Starsze sieci zawierają znaki wysokościowe przedwojennej niwelacji precyzyjnej, znaki PKP i znaki poniemieckie. W roku 1974 na terenie całego kraju rozpoczęto modernizację podstawowej osnowy wysokościowej, w której do stabilizacji nowych punktów wykorzystywano znaki: 71, 73, 87 (rys. 4.10).



Typ 71: Reper fundamentalny, podziemny stosowany dla podstawowej osnowy wysokościowej kl. I i II.

Typ 73: Reper osadzony na słupie betonowym i poduszce betonowej, stosowany dla podstawowej osnowy wysokościowej kl. I i II.

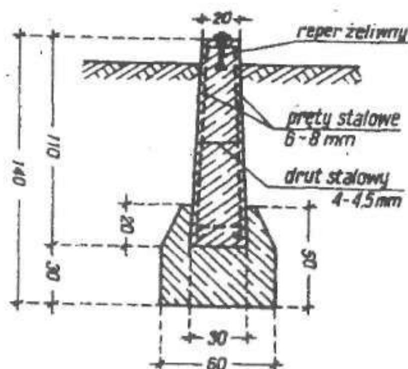
Typ 87: Reper ścienny ze stali nierdzewnej. Znak wysckościowy stosowany dla punktów osnowy podstawowej.

Rys. 4.11. Znaki wysokościowe osnowy podstawowej

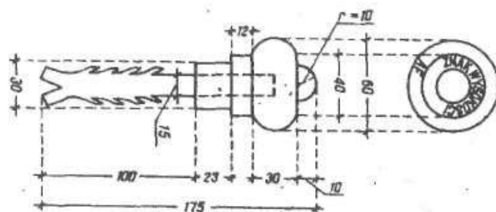
Dla osnowy podstawowej stabilizacja znaków wysokościowych gruntowych powinna nastąpić: co najmniej 6 miesięcy przed pomiarem osnowy, dla osnowy szczegółowej – 3 miesiące, natomiast dla znaków ściennych okres ten jest krótszy i wynosi 1 miesiąc. Elementy metalowe znaków wysokościowych należy zabezpieczyć przed korozją i w określonych odstępach czasu poddawać konserwacji. Najwyższy punkt głowicy reperu ściennego powinien być oddalony od ściany minimum o 4 cm. Stopa znaku gruntowego

musi znajdować się poniżej poziomu zamarzania gruntu. W przypadku zlokalizowania znaku w terenie utrudniającym późniejsze jego odszukanie, należy w odległości 2 ÷ 10 m od punktu zastabilizować słup rozpoznawczy.

Szczegółowa osnowa wysokościowa obejmująca klasy: III i IV była w Polsce zakładana w latach 1946 – 1960. Przeważająca liczba punktów została zastabilizowana znakami: 75 (rys. 4.12), 86 . Począwszy od roku 1974 stosowano także znaki: 71, 73 (rys. 4.11). Obecnie na nowych punktach zalecane są znaki naziemne typu 75a, 75b (słup z betonu na płycie lub poduszce betonowej - znak pokazany na rys. 5.14, 5.15 w podręczniku *Geodezja I*) i znaki ścienne typu 86b w postaci głowicy osadzonej na zaprawie betonowej w murze budynku lub litej skale. Znaki naziemne wysokościowej osnowy szczegółowej osadza się co najmniej na 3 miesiące przed pomiarem, zaś znaki ścienne na minimum 7 dni przed pomiarem.



Typ 75: Reper osadzony w słupie betonowym na poduszce betonowej. Stosowany dla osnowy kl. III i IV



Typ 86: Reper ścienny, żeliwny. Stosowany dla osnowy kl. III i IV

Rys. 4.12. Znaki wysokościowe osnowy szczegółowej

Osadzone znaki należy protokolarnie przekazać pod ochronę właściciela nieruchomości, na której znajduje się punkt osnowy. Dla znaków sporządza się także opisy topograficzne oraz wyznacza elementy niezbędne do określenia współrzędnych *X*, *Y* nowego punktu. Przeglądy i konserwacje punktów osnowy szczegółowej należy przeprowadzać w miarę potrzeb występujących podczas wykonywania prac geodezyjnych.

ROZDZIAŁ 5:
Pomiar osnowy poziomej

5.1. Zasady wykonywania pomiaru osnów geodezyjnych

Podczas pomiaru osnów geodezyjnych obowiązuje przestrzeganie znanej zasady *„od ogółu do szczegółu"*, polegającej na utrzymaniu hierarchicznego porządku wykonywania obserwacji i obliczeń. W przypadku zakładania osnów geodezyjnych zasada ta ustala na obszarze kraju następstwo realizacji osnów poziomych i wysokościowych, w myśl której w pierwszej kolejności dokonuje się projektowania, stabilizacji, pomiaru i obliczenia osnowy podstawowej, a następnie kolejno poszczególnych klas osnowy szczegółowej oraz na końcu osnowy pomiarowej, zakładanej doraźnie do oparcia konkretnych zadań geodezyjnych np. zdjęcia sytuacyjnego, niwelacji powierzchniowej, pomiarów katastralnych itp.

W myśl zasady *ciągłości prac geodezyjnych* należy przeanalizować i wykorzystać przechowywane w terytorialnie właściwym ośrodku dokumentacji geodezyjnej (ODGK) wyniki wykonanych wcześniej prac geodezyjnych związanych z zakładaniem osnowy na terenie *przewidzianym do zaprojektowania, utrwalenia i pomiaru nowozakładanej osnowy*. Przed przystąpieniem do pomiaru osnowy należy dokonać formalnego zgłoszenia pracy w ODGK prowadzącym zasób i ewidencję prac geodezyjnych na danym obszarze. Po zakończeniu prac geodezyjnych należy do tego ośrodka przekazać również ich wyniki.

W trakcie poszczególnych etapów robót geodezyjnych obowiązuje również zasada *kontroli prac*, w ramach której należy ustalić ilość spostrzeżeń większą od liczby niewiadomych, czyli przewidzieć wykonanie obserwacji nadliczbowych oraz w trakcie obliczeń przeprowadzać niezależne od siebie kontrole rachunkowe.

Pomiary wykonuje się instrumentami i narzędziami, które mają niezbędne atesty (instrumenty) lub świadectwa komparacji (przymiary). Dotyczy to tych przyrządów geodezyjnych, których użycie może wprowadzać błędy systematyczne do obserwacji i opracowania wyników pomiarów długości i wysokości, a w szczególności: teodolitów, niwelatorów, dalmierzy, odbiorników GPS, taśm i łat niwelacyjnych. Dla poszczególnych instrumentów należy prowadzić metryki, w których zapisuje się wyniki badań kontrolnych (podstawowych, okresowych i doraźnych) dobranych stosownie do danych przyrządów pomiarowych). Wykonawca robót geodezyjnych jest także zobowiązany do okresowego sprawdzania wykorzystywanych przyrządów pod względem zgodności warunków geometrycznych z ich założeniami konstrukcyjnymi oraz dokonywania w razie potrzeby i możliwości niezbędnych rektyfikacji.

Podczas pomiaru osnów geodezyjnych należy wykorzystywać instrumenty i metody pomiaru gwarantujące uzyskanie takiej dokładności obserwacji, która zapewni uzyskanie poprawnych kryteriów dokładności wymaganych dla danego rodzaju i klasy osnowy.

Zgodnie z instrukcją O-1/O-2 (wyd. I z r. 2000) oraz instrukcją G-2 (wyd. V z r. 2000) zamiast użycia klasycznych instrumentów optycznych, a także prowadzenia tradycyjnych dzienników polowych i szkiców, zalecane jest stosowanie przyrządów geodezyj-

nych umożliwiających komputerowy zapis, kontrolę obserwacji i przekazanie wyników pomiaru za pomocą plików tekstowych ASCII*, zawierających:

- wielkości mierzone lub ich współrzędne,
- numery punktów oraz dane dotyczące obiektów mierzonych np. ich wzajemne połączenia, kody lub identyfikatory.

5.2. Pomiar kątów poziomych

5.2.1. Przygotowanie sprzętu do pomiarów kątowych

Do pomiaru osnów należy w miarę możliwości wykorzystywać nowoczesny sprzęt pomiarowy, zapewniający automatyzację zapisu i kontrolę wyników obserwacji.

Przed przystąpieniem do pomiarów kątowych trzeba przeprowadzić laboratoryjne sprawdzenie i rektyfikację sprzętu, w skład którego wchodzą: teodolit lub tachimetr elektroniczny umożliwiający pomiar kątów (kierunków) z średnim błędem pomiaru kierunku $\leqslant 8^{cc}$ i komplet tarcz osadzonych na jednakowych spodarkach oraz statywach, pozwalających na zastosowanie metody trzech statywów, pionowniki optyczne do centrowania statywów ze spodarkami, spodarka wieżowa (rys. 5.1) z nakłuwaczem centrowniczym (rys. 5.7 c).

Geodezyjny przyrząd pomiarowy powinien posiadać metrykę, do której wpisywane są informacje z przeprowadzenia odpowiednich dla niego badań kontrolnych, które dzielą się na:

- podstawowe, dla ustalenia przydatności, dokładności, metodyki pomiarów, programu obsługi i zakresu konserwacji,
- okresowe, wykonywane systematycznie np. corocznie po zakończeniu sezonu pomiarowego,
- doraźne, po pobraniu przyrządu z magazynu, po przeprowadzonej konserwacji lub remoncie lub po stwierdzeniu usterek w funkcjonowaniu instrumentu.



Rys. 5.1. Spodarka wieżowa

W ramach pierwszego sprawdzenia teodolitu należy przede wszystkim skontrolować:

- działanie śruby sprzęgającej i śrub poziomujących spodarki, dopasowanie śruby sprzęgającej statywu do spodarek teodolitu i tarcz, działanie śrub zaciskowych nóg statywu, okuć i połączeń nóg z głowicą,
- prawidłowość i płynność obrotów alidady i lunety wokół osi *v*, *h*, działanie elementów mechanicznych: śruby zaciskowej i śrub poziomujących spodarki, śrub zaciskowych, leniwek alidady i lunety, mikrometru optycznego,
- zewnętrzną i wewnętrzną czystość optyki lunety oraz mikroskopu odczytowego,
- libele,
- optykę pionu optycznego i poprawność jego działania,
- stan naładowania baterii.

---

* ASCII – *American Standards Code for Information Interchange*, czyli Amerykański Znormalizowany Kod Wymiany Informacji, stanowiący system kodowania znaków alfanumerycznych (liczb, liter) w systemie dwójkowym. W tablicy znaków ASCII zebrane są używane znaki alfanumeryczne wraz z przyporządkowanymi im binarnymi kodami liczbowymi.

Dla tarcz celowniczych należy sprawdzić i ewentualnie zrektyfikować: libelę okrągłą, jakość rysunku tarczy, pokrywanie się osi geometrycznej tarczy celowniczej z osią obrotu tarczy i pionowym odcinkiem osi celowej pionu optycznego.

Przebieg terenowego sprawdzenia wyżej wymienionych przyrządów i ich warunków geometrycznych został opisany w podręczniku *„Geodezja I"*.

Pozostałe elementy zestawu sprzętu geodezyjnego do pomiarów kątowych osnowy poziomej mogą obejmować:

- centrownik triangulacyjny (rys. 5.7 c),
- 2 szt. ruletek stalowych,
- 2 lornetki polowe 6× ÷8×,
- taśmę ze szpilkami,
- szpile poszukiwawcze,
- tyczki miernicze,
- listwy stabilizacyjne (rys. 4.5),
- libelę stolikową,
- węgielnicę dwupryzmatyczną,
- łatę do niwelacji technicznej,
- szkicownik i formularze dzienników polowych oraz szkiców,
- radiotelefony,
- przybory rysunkowe do szkicowania i zapisów,
- siekierę, łopatę, młotek, kilof,
- zapasową baterię i ładowarkę do baterii,
- parasol mierniczy.

5.2.2. Teodolity stosowane do pomiaru kątów osnowy poziomej kl. II i III

Teodolity wykorzystywane do pomiaru kątów poziomej osnowy szczegółowej kl. II powinny zapewniać wyższą dokładność pomiaru kierunku rzędu ±2″ (6–8^{cc}), zaś w sieciach III klasy – dokładność średnią rzędu ±6″ (20^{cc}).

Gdy tylko jest to możliwe, obserwacje wykonuje się w odniesieniu do zasadniczych centrów znaków geodezyjnych stabilizujących punkty osnowy. Przy pomiarach mimośrodowych (ekscentrycznych) *elementy mimośrodu* tj. ekscentr liniowy e i kąt dyrekcyjny Θ powinny być pomierzone z dokładnością zapewniającą wyznaczenie poprawek ze względu na mimośród z błędem średnim nie większym od 0,3 wartości dopuszczalnego średniego pomiaru kąta i odległości.

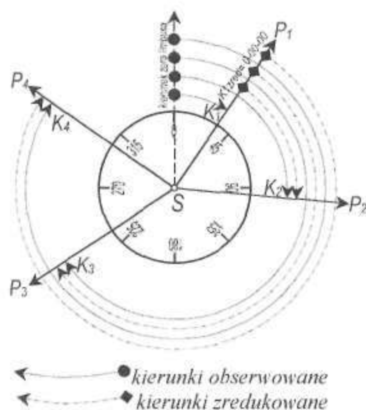
Aktualnie do pomiarów kątowych osnów kl. II, zamiast coraz rzadziej używanych teodolitów optycznych, stosuje się teodolity elektroniczne i dokładne tachimetry typu *total station* produkowane przez licznych wytwórców, spośród których w Polsce najbardziej znane są firmy: Leica (dawniej Wild), Zeiss, Spectra Precision (dawniej AGA, a następnie Geotronics), Trimble, Topcon, Sokkia, Nikon.

Pomiary kątowe i liniowe osnowy szczegółowej powinny być wykonywane w odniesieniu do centra znaku podziemnego typu 36 (rys. 4.7 a) lub centra na metalowej głowicy znaku dwufunkcyjnego typu 30 (rys. 4.7 b), co w przypadku znaku 30 wiąże się z koniecznością wydobycia przed pomiarem górnego słupa tego znaku. Przed jego wykopaniem należy założyć konstrukcję umożliwiającą centryczne osadzenie znaku górnego po zakończeniu pomiaru. Dokładność centrowania teodolitu nad znakiem podziemnym po-

winna zapewnić nieprzekroczenie wartości ±2 mm błędu centrowania, co można uzyskać poprzez wykorzystanie pionu optycznego lub laserowego.

Jeśli liczba kierunków wychodzących z danego stanowiska nie przekracza 8, wtedy pomiary kątów poziomych w sieciach klasy II wykonuje się metodą kierunkową w trzech seriach, zaś w sieciach kl. III – w dwóch seriach (dla pojedynczych kątów wykorzystuje się metodę kątową). W razie większej ilości celowych zalecana jest metoda sektorowa, zaś przy niezbyt stabilnym stanowisku lub niekorzystnych warunkach widoczności poszczególnych celów przydatniejszą może być metoda wypełniania horyzontu.

5.2.3. Metoda kierunkowa



Rys. 5.2. Kierunki obserwowane i zredukowane

Metoda kierunkowa pozwala na określenie wzajemnego położenia celowych na płaszczyźnie horyzontu instrumentu i jest powszechnie stosowana do pomiaru kątów w sieciach kątowo-liniowych osnowy szczegółowej II klasy oraz na punktach węzłowych sieci poligonowych, stanowiących osnowę poziomą III klasy. Jej zaletą jest mała pracochłonność i prostota postępowania, wadą zaś – niższa dokładność w porównaniu z metodami: Schreibera, kątową lub sektorową. Dodatkowe ograniczenie zastosowania stanowi dopuszczalna liczba celowych przypadających na jedno stanowisko pomiarowe, która nie powinna przekraczać 6 ÷ 8. Wynika to stąd, że ze względu na możliwość niekontrolowanej zmiany ustawienia teodolitu (np. w wyniku osiadania statywu, odkształcania się wieży pod wpływem wiatru lub nasłonecznienia) czas pomiaru jednej serii nie może przekraczać 0,5 godziny.

Metoda kierunkowa polega na celowaniu do kolejnych sąsiadujących z sobą punktów sieci: P_1, P_2, P_3, P_4,..., P_n, które wyznaczają pęk prostych wychodzących ze stanowiska S i wykonywaniu w obydwu położeniach lunety odczytów kierunków: K_1, K_2, K_3, K_4,..., K_n. Kierunki te są kątami poziomymi między linią zerową limbusa a liniami celowania łączącymi środki sygnałów na poszczególnych punktach celu P_1, P_2, P_3, P_4,...,P_n, ze stanowiskiem S (rys. 5.2).

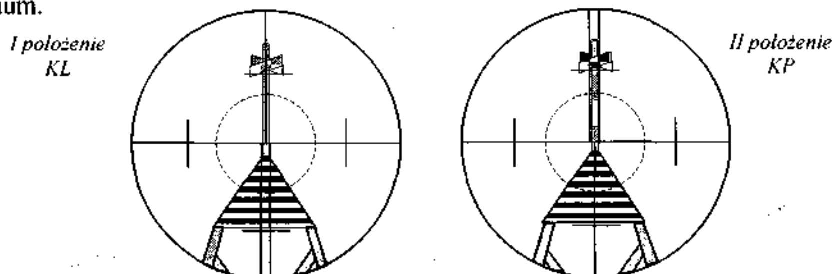
Rozpoczynając pomiar kątów metodą kierunkową ustawiamy teodolit na wybranym stanowisku S i dokonujemy znanych czynności wstępnych, takich jak: poziomowanie, centrowanie teodolitu, regulacja lunety i mikroskopu odczytowego, orientacja limbusa. Ze względu na konieczność wyrównania temperatur teodolitu i powietrza instrument trzeba postawić na stanowisku przynajmniej na 15 minut przed rozpoczęciem pomiaru kątów. Zalecane jest jednorazowe nastawienie ostrości obrazu w lunecie na średnią odległość do celu oraz kilkakrotne obrócenie lunety i alidady w celu rozładowania naprężeń mechanizmów teodolitu i rozprowadzenia smarów w łożyskach. Oprócz regulacji lunety należy również wyregulować mikroskop odczytowy.

Na stanowisku trzeba zapoznać się z układem celowych oraz sygnalizacją punktów celu. Jeśli obserwacje wykonywane są na wieży triangulacyjnej lub stanowisku podwyższonym, wówczas kontrolujemy, czy przebieg celowych spełnia warunek oddalenia od elementów konstrukcji wieży o przynajmniej 0,3 m. Bliższe punkty celu nie posiadające

własnej zabudowy w postaci wież lub sygnałów należy specjalnie zasygnalizować wiechami lub tarczami celowniczymi ustawionymi prostopadle do linii celowania.

Przed rozpoczęciem zasadniczego pomiaru celujemy wstępnie w I położeniu lunety do wszystkich przewidzianych punktów dla sprawdzenia ich widoczności i poprawności sygnalizacji, po czym wybieramy cel wyjściowy do punktu dalekiego z kontrastowym tłem, dobrze widocznego i oświetlonego, położonego przeważnie na północnej części horyzontu. Podczas celowania należy wykorzystywać efekt bisekcji, ustawiając obraz celu w środku siatki celowniczej i zarazem w środku bisektora utworzonego przez podwójną kreskę pionową krzyża (rys. 5.3).

Śruby zaciskowe należy dokręcać bez użycia siły, tylko do wyczuwalnego oporu umożliwiającego działanie śrub mikroruchu (leniwek), które w trakcie celowania wkręca się dokonując tylko obrotu w prawo. Podczas obserwacji na danym stanowisku nie należy zmieniać ostrości siatki celowniczej, ani ostrości obrazu urządzenia odczytowego. Regulację tych elementów należy wykonać jednorazowo zaraz po ustawieniu instrumentu na punkcie wierzchołkowym kąta. Zmiany innych nastawień takich jak: oświetlenie obrazów kół w polu widzenia mikroskopu, ogniskowanie lunety należy ograniczyć do niezbędnego minimum.



Rys. 5.3. Poprawne celowanie na świecę w dwóch położeniach lunety

Czynności podczas pomiaru kątów metodą kierunkową przebiegają następująco: Celujemy do wybranego wcześniej punktu wyjściowego w I położeniu lunety (*KL*), po czym obrotem śruby reiteracyjnej orientujemy na ten cel limbus, nastawiając odczyt z dwiema cyframi początkowymi równymi zero (np. $0{,}0^g$), który zapisujemy w kol. 5, 6 dziennika polowego (tabela 5.1). Poprzez obrót śruby mikrometru naruszamy koincydencję (bisekcję) i ponownie ją dokładnie ustawiamy, wpisując drugą końcówkę odczytu w kol. 6 oraz średnią $\frac{1}{2}(I+II)$ w kol. 7, 8. Rozbieżność odczytów z I oraz II koincydencji nie może przekraczać $\pm 5^{cc}$ (2″). Dla teodolitów bez mikrometru lub elektronicznych można dokonać dwukrotnego celowania na ten sam cel.

Później w podobny sposób celujemy i zapisujemy odczyty do pozostałych punktów celu w kolejności ich następstwa po sobie, licząc w prawo od punktu początkowego (zgodnie z ruchem wskazówek zegara), czyli również obracając alidadę w prawo. Po zaobserwowaniu wszystkich przewidzianych wcześniej punktów, celujemy jeszcze raz do punktu wyjściowego, zapisujemy odczyt zamykający horyzont i porównujemy go z odczytem początkowym. Różnica odczytów pomiędzy pierwszym i ostatnim wycelowaniem w danej półserii nie może być większa od $\pm 12^{cc}$ (4″). Opisany wyżej pomiar w I położeniu lunety tworzy pierwszą półserię pomiaru kierunków z danego stanowiska.

Tabela 5.1. Dziennik pomiaru kątów metodą kierunkową

(wykorzystano przykład liczbowy z wytycznych G-1.5)

Nr i nazwa punktu: 253 Młynica I Klasa: III Obiekt 189

Stanowisko: ~~centryczne~~ – mimośrodowe Cel: centryczny – ~~mimośrodowy~~ Ark. mapy 253.114

Teodolit typ: Zeiss Theo 010 B nr 120753 Str. 2

Godz. / Warunki atmosferyczne	Numer serii	Nr i nazwa celu	Koło: KL, KP	Odczyty limbusa		Odczyty mikrometru I	Odczyty mikrometru II	Odczyty średni		$\frac{I+II}{2}$	$\frac{KL+KP}{2}$	Kierunki zredukowane z poszczególnych serii			Poprawka horyzontu	Kierunek poprawiony K_i (1) g	c	cc
1	2	3	4	5		6		7		8	9	10			11	12		
9^{15}	I	257	KL	0	00	19	17	0	00	18						0	00	00,0
			KP	200	00	14	12			13	15,5	0	00	00,0	0,0			
Dobra widoczność, lekkie zachmurzenie		13 Słupice	KL	109	68	87	87	109	68	87						109	68	66,4
			KP	309	68	78	76			77	82,0	109	68	66,5	-0,1			
		153	KL	211	19	05	07	211	19	06						211	18	88,8
			KP	11	19	02	04			03	04,5	211	18	89,0	-0,2			
		250 Oleszna kościół	KL	301	80	47	47	301	80	47						301	80	29,2
			KP	101	80	43	43			43	45,0	301	80	29,5	-0,3			
		254	KL	337	27	36	34	337	27	35						337	27	22,6
			KP	137	27	43	41			42	38,5	337	27	23,0	-0,4			
		257	KL	0	00	15	17	0	00	16						0	00	00,0
			KP	200	00	16	16			16	16,0	0	00	00,5	-0,5			
	II	257	KL	66	66	57	56	66	66	56						0	00	00,0
			KP	266	66	60	62			61	58,5	0	00	00,0				
		13 Słupice	KL	176	35	25	23	176	35	24						109	68	68,6
			KP	376	35	29	27			28	26,0	109	68	67,5	+1,1			
		153	KL	277	85	63	65	277	85	64						211	19	02,2
			KP	77	85	54	52			53	58,5	211	19	00,0	+2,2			
		250 Oleszna kościół	KL	368	46	86	84	368	46	85						301	80	34,3
			KP	168	46	93	95			94	89,5	301	80	31,0	+3,3			
		254	KL	3	93	77	77	3	93	77						337	27	24,9
			KP	203	93	82	80			81	79,0	337	27	20,5	+4,4			
		257	KL	66	66	52	50	66	66	51						0	00	00,0
			KP	266	66	54	56			55	53,0	399	99	94,5	+5,5			
	III	257	KL	133	33	28	28	133	33	28						0	00	00,0
			KP	333	33	15	15			15	21,5	0	00	00,0				
		13 Słupice	KL	243	01	89	91	243	01	90						109	68	65,8
			KP	43	01	82	84			83	86,5	109	68	65,0	+0,8			
		153	KL	344	52	19	21	344	52	20						211	19	00,1
			KP	144	52	21	19			20	20,0	211	18	98,5	+1,6			
		250 Oleszna kościół	KL	35	13	66	64	35	13	65						301	80	40,4
			KP	235	13	54	54			54	59,5	301	80	38,0	+2,4			
		254	KL	70	60	52	54	70	60	53						337	27	28,2
			KP	270	60	40	40			40	46,5	337	27	25,0	+3,2			
9^{40}		257	KL	133	33	25	25	133	33	25						0	00	00,0
			KP	333	33	11	09			10	17,5	399	99	96,0	+4,0			

Po obrocie alidady i lunety do II położenia (KP) rozpoczynamy drugą półserię od ponownego wycelowania do punktu początkowego, zanotowania odczytu jego kierunku w dzienniku. Następnie celujemy i zapisujemy kierunki do pozostałych punktów, lecz w odwrotnej kolejności, a więc obracamy teraz alidadę w lewo. Odczyt zamykający kończy pierwszą pełną serię pomiaru.

Podobnie realizujemy dalsze dwie serie, pamiętając o przesuwaniu limbusa po każdej serii o kąt $66{,}7^g$ i skali mikrometru o $\frac{1}{3}$ jej całkowitego zakresu. Z tego powodu druga seria rozpocznie się od nastawienia odczytu około $66{,}7^g$, zaś trzecia od ok. $133{,}3^g$.

Po każdej serii pomiaru należy sprawdzić i ewentualnie skorygować poziomowanie i centrowanie instrumentu. Po zakończeniu pomiaru trzeciej serii należy dla każdego kierunku wpisać w kol. 9 średnie z poszczególnych par wartości z I i II położenia lunety ($\frac{KL+KP}{2}$) podanych w kol. 8. Dopuszczalne różnice między skrajnymi wartościami odpowiednich kierunków z pomiaru w trzech seriach nie mogą przekroczyć $\pm 16^{cc}$ (5,5″).

Kierunki zredukowane z kol. 10 otrzymujemy w wyniku odejmowania średniego odczytu wyjściowego od średnich odczytów do pozostałych punktów celu. Odchyłkę zamknięcia horyzontu, czyli różnicę ω pomiędzy średnią wartością kierunku wyjściowego z ostatniej i pierwszej obserwacji, należy rozrzucać narastająco na kolejne kierunki zaobserwowane w danej serii. Całą odchyłkę ze znakiem przeciwnym, czyli $-\omega$, dzielimy przez liczbę celowych n, wychodzących z danego stanowiska S, a zatem:

$$v = -\frac{\omega}{n} \tag{5.1}$$

Kierunek wyjściowy K_1 nie uzyskuje poprawki, kierunek K_2 do punktu P_2 otrzymuje poprawkę: $+1 \cdot v$, kierunek K_3 do P_3 – poprawkę $+2 \cdot v$, kierunek K_4 do P_4 – poprawkę $+3 \cdot v$ itd., a zatem ostatni n-ty kierunek K_n otrzyma poprawkę $(n-1) \cdot v$, zaś zamykający kierunek K_1^z, poprawkę $n \cdot v = -\omega$, przez co zrówna się wartością z kierunkiem wyjściowym. Poprawki zamknięcia horyzontu dla poszczególnych kierunków wpisujemy w kol. 11, zaś kierunki poprawione w kol. 12 dziennika pomiarowego.

Ostateczne wartości kierunków zredukowanych otrzymane po uśrednieniu wyników z poszczególnych serii i poprawione ze względu na mimośrody stanowiska i celu zapisuje się w formularzu „Zestawienie wyników pomiaru".

Obliczenie najprawdopodobniejszych wartości kierunków pomierzonych na pojedynczym stanowisku wraz z przeprowadzeniem oceny ich dokładności nosi nazwę *wyrównania stacyjnego*. Wyrównanie to powinno w zasadzie dotyczyć elementów pomierzonych bezpośrednio, którymi są odczyty koła poziomego w poszczególnych seriach, jednak realizacja takiego wyrównania spowodowałaby bardzo duży nakład pracy obliczeniowej, nie dający w zamian żadnego konkretnego pożytku. Z tego względu wielkościami wyrównywanymi traktowanymi jako spostrzeżenia są kierunki poprawione K_i zapisane w dzienniku pomiarowym w kol. 11. Kierunki te, dzięki wcześniejszemu zredukowaniu serii, polegającym na odjęciu od wszystkich kierunków odczytu wyjściowego, zostają „ustawione" na limbusie w tym samym miejscu, przez co stają się porównywalne. Potraktowane jako spostrzeżenia bezpośrednie podlegają uśrednieniu, dając w rezultacie wyrównane kierunki na danym stanowisku, obliczane jako średnie arytmetyczne z jednoimiennych kierunków ze wszystkich serii. Dla dokonania oceny dokładności, polegającej na obliczeniu średniego błędu kierunku wyrównanego należy:

1. Obliczyć poprawki v, stanowiące różnice pomiędzy średnimi ostatecznymi $K_{śr}$ ze wszystkich s serii (tab. 5.2, kol. 3) a średnimi K_i poszczególnych serii (tab. 5.2, kol. 12). Każdemu zredukowanemu kierunkowi w serii odpowiada zatem jego poprawka v:

$$v = K_{śr} - K_i \tag{5.2}$$

2. Obliczyć dla każdej serii tzw. *skręty* σ równe sumie poprawek $[v]$ ze znakiem przeciwnym podzielonej przez liczbę kierunków n:

$$\sigma = -\frac{[K_{śr}] - [K_i]}{n} = -\frac{[v]}{n} \tag{5.3}$$

Wartości skrętów różne od zera charakteryzują wpływy błędów systematycznych na wyniki pomiaru kierunków. Wpływy te należy wyeliminować, wykonując działania podane w następnym punkcie 3. W granicach zaokrągleń suma skrętów ze wszystkich serii powinna być równa zero (kontrola)

3. Obliczyć poprawki skorygowane v', odejmując od poszczególnych poprawek v danej serii wartość skrętu σ tej serii, czyli:

$$v' = K_{śr} - K_i + \sigma = v + \sigma \tag{5.4}$$

Sumy poprawek v' dla każdej serii i dla każdego kierunku powinny być równe zeru w granicach dokładności obliczeń.

4. Ocenić dokładność ostatecznych średnich, określając błąd m kierunku wyrównanego stacyjnie. Obliczenie to wykonać w oparciu o wzór:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v'v']}{s(s-1)(n-1)}} \tag{5.5}$$

Ocena dokładności wykonana jeszcze na stanowisku obserwacyjnym udziela informacji dotyczącej poprawności wykonanych obserwacji. Błąd kierunku m obliczony z materiału obserwacyjnego na podstawie wzoru (5.5) nie może przekroczyć wartości błędu kierunku ($\pm 8^{cc}$) wyliczonej na podstawie dopuszczalnego błędu pomiaru kąta m_{kt}, czyli:

$$m \leqslant \frac{m_{kt}}{\sqrt{2}} \tag{5.6}$$

Opisany wyżej sposób postępowania dotyczy tzw. *pełnych serii*, co oznacza, że w ramach każdej serii były obserwowane dwukrotnie wszystkie celowe. *Seria pełna* ma miejsce wtedy, gdy jest możliwe pomierzenie w dwóch położeniach lunety ogółu przewidzianych wcześniej kierunków, natomiast *seria niepełna* jest zubożona o co najmniej jeden odczyt, a więc nie zawiera kompletu obserwacji.

Wyrównanie stacyjne kierunków pomierzonych w pełnych seriach jest proste, ponieważ sprowadza się do uśrednienia kierunków zredukowanych z poszczególnych serii. Nieco inny sposób postępowania podczas wyrównania stacyjnego ma miejsce wtedy, gdy serie są niepełne. Przypadek ten może zajść w sytuacji, kiedy cele są dalekie a wskutek zmiany warunków atmosferycznych nastąpi utrata widoczności jednego lub więcej punktów, uniemożliwiając w pewnej serii odczytanie wszystkich kierunków.

Wyrównanie stacyjne wykonywane jest również dla obserwacji kątów innymi metodami: kątową, sektorową, Schreibera. Opis i uzasadnienie przebiegu tych wyrównań

można znaleźć w niektórych obszerniejszych podręcznikach geodezji i rachunku wyrównawczego.

Tabela 5.2: Ocena dokładności na podstawie wyrównania stacyjnego

Cel	Seria I		Seria II		Seria III		Obliczenie skrętów serii
	v	v'	v	v'	v	v'	
257	0	-3,3	0	+1,3	0	+2,2	$\sigma_I = \frac{-16{,}7}{5} = -3{,}3^{cc}$
13 Słupice	+0,5	-2,8	-1,7	-0,5	+1,1	+3,3	
153	+8,2	+4,9	-5,1	-3,9	-3,1	-0,9	$\sigma_{II} = \frac{+6{,}3}{5} = +1{,}3^{cc}$
250 Oleszna	+5,4	+2,1	+0,3	+1,6	-5,8	-3,7	
254	+2,6	-0,7	+0,3	+1,6	-3,0	-0,8	$\sigma_{III} = \frac{+10{,}8}{5} = +2{,}2^{cc}$
Suma:	+16,7	+0,1	-6,3	+0,1	-10,8	+0,1	

Ocena dokładności:

$[v'v'] = 100{,}78$ $\quad m = \pm\sqrt{\frac{100{,}78}{3 \cdot 2 \cdot 4}} = \pm 2{,}05^{cc}$ $\quad m_{kt} = \pm 2{,}05^{cc} \cdot \sqrt{2} = \pm 2{,}9^{cc}$

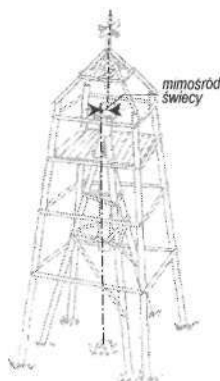
5.3. Mimośrodowy pomiar kątów

5.3.1. Wyznaczenie elementów mimośrodu

O ile pozwalają na to warunki położenia i zabudowy punktów, obserwacje elementów kątowych i liniowych osnów należy wykonywać *centrycznie*. Ma to miejsce wtedy, gdy doprowadzona do położenia pionowego oś obrotu instrumentu *v*, przechodzi przez środek centra znaku stabilizującego stanowisko, zaś spionowane osie geometryczne sygnałów celowniczych – przez środki centrów znaków wyznaczające punkty celów. W praktyce ustawienia centryczne mogą być zrealizowane tylko w odniesieniu do dobrze widocznych znaków naziemnych i podziemnych lub dostępnych punktów utrwalonych na budowlach, nad którymi można ustawić statyw z instrumentem lub tarczą celowniczą.

Obserwacje prowadzone na wieżach (rys. 5.4), połączone z celowaniem do innych wież lub sygnałów mają z reguły mimośrodowe cele, a często także i stanowiska. Na wieżach i sygnałach triangulacyjnych mimośrody świec powstają wskutek przesunięć i deformacji elementów wieży pod wpływem czynników atmosferycznych oraz zmiennych właściwości budulca.

Pomiar mimośrodowy jest pomiarem elementu geometrycznego osnowy poziomej: kierunku, kąta lub odległości, gdy instrument lub (i) sygnał jest ustawiony ekscentrycznie, czyli w miejscu przesuniętym poza właściwy punkt. Z tego względu rozróżniamy dwa rodzaje mimośrodów: *stanowiska* i *celu*. Mimośrody rzędu kilku - kilkudziesięciu centymetrów występują podczas obserwacji ze stanowisk na stolikach wież triangulacyjnych i celowaniu na świece tych wież. Jako punkty osnowy wyższych klas bardzo często wykorzystywane są także zakończenia wież kościelnych i innych wyniosłych budowli, gdzie centryczne ustawienie instrumentu nie jest możliwe (rys. 5.5). Na lokalizację sta-



Rys. 5.4. Mimośród świecy wieży triangulacyjnej

nowiska instrumentu mogą być wówczas wykorzystane pobliskie parapety okien, tarasy i balkony. Mimośrody tak zlokalizowanych stanowisk wynoszą kilka lub więcej metrów. Gdy i takie ustawienie nie jest możliwe, wówczas obiera się odpowiednie stanowisko podwyższone lub naziemne, z którego wykonywane są obserwacje mimośrodowe.

Wyniki tych pomiarów należy dośrodkować, czyli zredukować do takich wartości, jakie zostałyby określone podczas obserwacji na stanowiskach i celach ustawionych centrycznie. Obliczenie poprawek redukcyjnych jest możliwe wówczas, gdy zostaną pomierzone elementy mimośrodu, będące wielkościami określającymi wartość liniową przesunięcia i orientację kierunku przesunięcia.

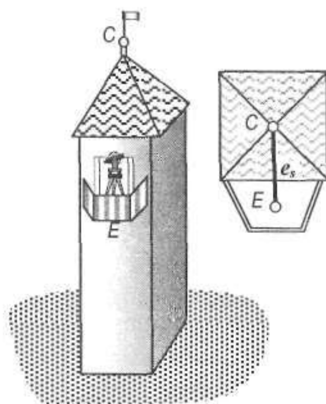
Elementami *mimośrodu stanowiska* (rys. 5.6) niezbędnymi do późniejszego obliczenia poprawek redukcyjnych są:

1. *Mimośród liniowy stanowiska* e_c – długość pozioma odcinka CE wyznaczonego przez mimośrodowe stanowisko teodolitu E i centr C punktu A osnowy.
2. *Kąt dyrekcyjny Θ, czyli* $\sphericalangle CEP_0$ o wierzchołku w punkcie E, liczony zawsze w prawo od kierunku mimośrodu liniowego do kierunku na wybrany sąsiedni punkt danej sieci np. punkt P_0. Kąty dyrekcyjne Θ_1, Θ_2, ... Θ_n mogą być również wyznaczane dla innych punktów celu: P_1, P_2,....., P_n.

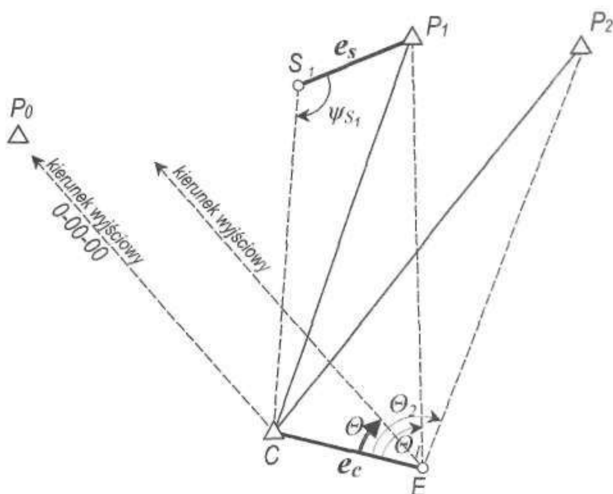
W podobny sposób można także określić elementy *mimośrodu celu* (rys. 5.6) tj. mimośród liniowy sygnału – e_S i kąt dyrekcyjny – ψ.

W zależności od wzajemnego usytuowania centra C właściwego znaku lub sygnału celowniczego S i punktu mimośrodowego E oraz warunków terenowych do wyznaczenia elementów mimośrodu stanowiska i celu można wykorzystać następujące sposoby:

1) rzutowanie za pomocą teodolitu centra i osi sygnału na arkusz centrowniczy;
2) bezpośredni pomiar elementów mimośrodu przy dostępnych punktach: C, E;
3) pośredni pomiar elementów mimośrodu dla punktów niedostępnych.



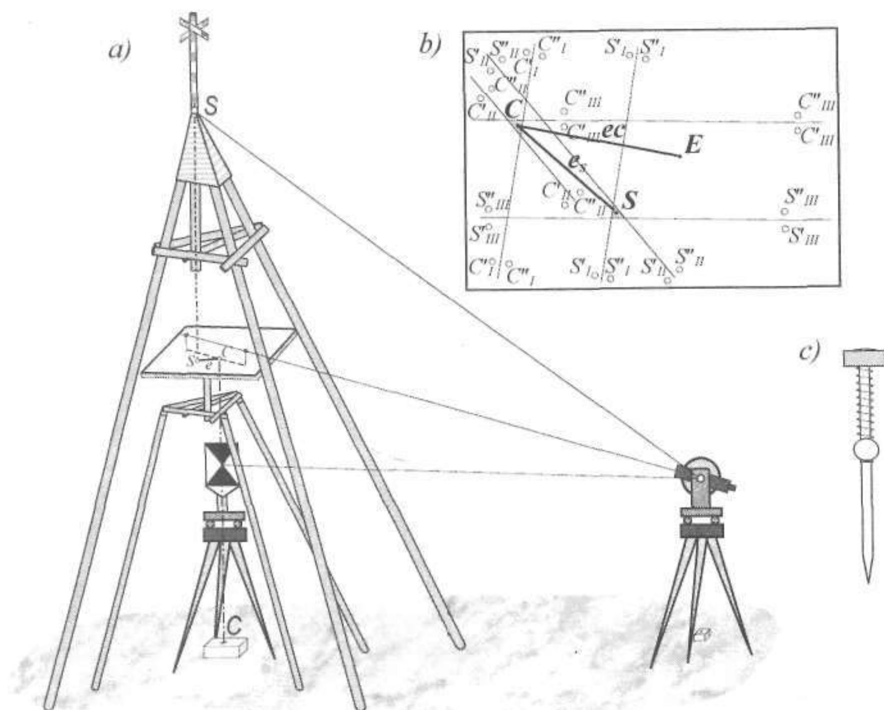
Rys. 5.5. Stanowisko mimośrodowe na balkonie budowli



Rys. 5.6. Elementy mimośrodu stanowiska E i celu S

Ad. 1. Bezpośrednie wyznaczenie elementów mimośrodu stanowiska i celu poprzez rzutowanie punktów C, S na arkusz centrowniczy

Rzut pionowy centra znaku naziemnego *C* i ślad linii pionu z punktu celu znajdującego się na świecy *S* można dokładnie zaznaczyć na powierzchni tzw. *arkusza centrowniczego* rozpiętego na powierzchni stolika obserwacyjnego wieży. W przypadku, gdy stolik jest zbyt mały i rzut centra wypada poza jego powierzchnią, można go wydłużyć poprzez przybicie większej deski. Rzutowania przeprowadza się teodolitem ustawianym kolejno na każdym z trzech stanowisk, odległych od punktu o minimum 1,5 wysokości wieży, z których widoczne są: sygnał nad centrem znaku, powierzchnia stolika z przytwierdzonym arkuszem papieru i świeca. Przyrządem przydatnym do zaznaczania rzutowanych punktów na arkuszu jest *centrownik triangulacyjny* (rys. 5.7 c). Jest to długi, trzydziestocentymetrowy, ostry bolec zakończony u góry libelą pudełkową. Centrownik służy do sygnalizowania i odkłuwania na arkuszu położeń par punktów wyznaczających ślady (rzuty) płaszczyzn kolimacyjnych teodolitu, przechodzących przez wybrany cel, którym w tym wypadku jest oś geometryczna świecy lub tarczy celowniczej rozstawionej nad punktem.



Rys. 5.7. Wyznaczenie elementów mimośrodu na arkuszu centrowniczym

Celujemy najpierw na szpilkę lub tarczę na centrze znaku, zaś po zwolnieniu zacisku lunety, jednak bez zmiany ustawienia alidady - na stolik wieży, stosując przy tym dwukrotne naprowadzenie osi centrownika na obraz kreski pionowej siatki celowniczej w dwóch skrajnych punktach stolika (rys. 5.7a), które nakłuwamy na arkuszu.

Dla zwiększenia dokładności rzutowania należy obraz każdej celowej wyznaczać w obu położeniach lunety. Po połączeniu odpowiadających sobie par punktów otrzymamy na arkuszu rzuty linii celowania z dwóch położeń lunety i poszczególnych stanowisk. Po wykreśleniu uśrednionych linii z obu położeń lunety, ich przecięcia powinny wypaść w punktach *C, S*, będących rzutami centra i osi geometrycznej świecy na arkuszu centrowniczym. Dla trzech stanowisk najczęściej nie otrzymamy jednak pojedynczych punktów przecięć, lecz trójkąty błędów, toteż wspomniane rzuty *C, S* zaznaczamy w środkach ich ciężkości (rys. 5.7 b). Jeśli rzut centra *C* wypada zbyt blisko krawędzi stolika, wówczas w pobliżu jego środka obieramy punkt *E* (rys. 5.7b), na którym za pośrednictwem spodarki wieżowej (rys. 5.1) centrujemy teodolit. Małe elementy mimośrodu mierzy się wtedy bezpośrednio na arkuszu centrowniczym, korzystając z podziałki milimetrowej i nanośnika tachimetrycznego lub kątomierza.

Ad. 2. Bezpośredni pomiar mimośrodu przy dostępnych punktach *C, E*

Przy dużych mimośrodach w przypadku, gdy właściwy punkt geodezyjny jest dostępny do umieszczenia reflektora dalmierza elektrooptycznego ustawionego na naziemnym stanowisku mimośrodowym, elementy mimośrodu można wyznaczyć za pomocą pomiaru bezpośredniego. Mimośród liniowy zredukowany do poziomu mierzy się dalmierzem z błędem nie przekraczającym ±0,01 m, natomiast kąt dyrekcyjny Θ względem celowej wyjściowej (kierunek zredukowany 0-00-00) – teodolitem jednosekundowym w trzech seriach. Kąty dyrekcyjne dla pozostałych punktów celu otrzymamy po dodaniu do kąta Θ kierunków zredukowanych. Konieczność wprowadzenia punktu mimośrodowego może również wynikać z niemożności wykonania pełnego kompletu obserwacji z punktu właściwego.

Ad. 3. Pośredni pomiar elementów mimośrodu

Pomiar elementów mimośrodu sposobem pośrednim stosuje się dla punktów zlokalizowanych na szczytach budowli np. wież kościelnych ze stanowiskiem mimośrodowym na balkonie, parapecie okna lub specjalnie zbudowanym pomoście. Konstrukcja geometryczna do pośredniego wyznaczenia elementów mimośrodu stanowiska mimośrodowego, znajdującego się np. na balkonie budowli stałej, oparta na dwóch bazach: b_1, b_2, wychodzących ze wspólnego punktu *A*, została pokazana na rys. 5.8.

Ponieważ bazy b_1, b_2 mogą być także wykorzystane do utworzenia siatki przeniesienia współrzędnych punktu *C*, stąd ich położenie powinno spełnić następujące warunki:

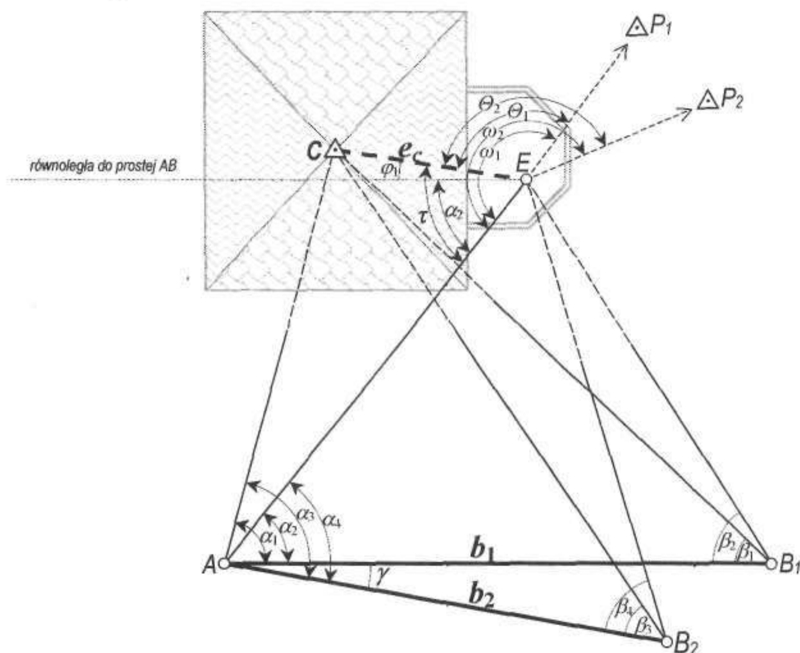
1. Odległości końców baz od punktów *E, C* powinny być większe od dwukrotnej wysokości budynku, na którym znajduje się punkt osnowy *C*.
2. Bazy mają być w przybliżeniu równoległe do odcinka mimośrodu liniowego e_c.
3. Długości baz powinny być większe od długości celowych do punktów *E, C*, lecz kąt przecięcia celowych biegnących do tych punktów z końców baz niezbyt ostry (nie mniejszy niż 30°).

We wskazanej konstrukcji należy pomierzyć:

- długości baz b_1, b_2 w kierunkach: tam i z powrotem,
- kąty poziome: na punkcie *A*: α_1, α_2, α_3, α_4; na punktach B_1, B_2: β_1, β_2, β_3, β_4; na stanowisku *E*: $\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_n$.

Rachunek wyznaczenia wartości elementów mimośrodu można przeprowadzić dwoma sposobami:

1. Za pomocą współrzędnych lokalnych punktów: A, B_1, B_2 oraz obliczenia w tym samym układzie współrzędnych punktów E, C na podstawie wcięć w przód. Elementy mimośrodu oblicza się ze współrzędnych powyższych punktów.
2. Bezpośrednie obliczenie elementów mimośrodu w oparciu o zamieszczone dalej wzory (5.7), (5.8) podane także w zaleceniach dawniejszych wytycznych technicznych G-1.5*.



Rys. 5.8. Konstrukcja do pośredniego wyznaczenia elementów mimośrodu stanowiska

Sposób 1:

1. Przyjmujemy lokalny układ współrzędnych, zakładając dowolnie współrzędne punktu A np. $x = y = 100{,}00$ oraz azymut boku np. $A_{AB_1} = 100^g$ (90°).
2. Określamy w tym układzie współrzędne punktów: B_1, B_2. Zgodnie z wcześniejszymi założeniami współrzędne punktu B_1 wyniosą: $x_1 = 100{,}00$;
   $y_1 = 100{,}00 + b_1$, zaś współrzędne punktu B_2: $x_2 = 100{,}00 + b_2 \cdot \cos(A_{AB_1} + \gamma)$;
   $y_2 = 100{,}00 + b_2 \cdot \sin(A_{AB_1} + \gamma)$.

   Kąt γ zgodnie z rys. 5.8 wyniesie: $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_2)$.
3. Dwukrotnie obliczamy współrzędne punktów C, E na podstawie kątowych wcięć w przód i po porównaniu wyników tworzymy średnie arytmetyczne z jednoimiennych par współrzędnych: punktu C obliczonych dwukrotnie z trójkątów AB_1C, AB_2C oraz punktu E obliczonych z trójkątów AB_1E, AB_2E.

* Uzasadnienie wzorów (5.7), (5.8) zostało podane w podręczniku: T. Lazzarini i współautorzy; *Geodezja. Geodezyjna osnowa szczegółowa*; PPWK Warszawa - Wrocław 1980 str. 219 – 222.

4. Obliczamy mimośród e_c liniowy z obliczonych współrzędnych punktów E, C.
5. Obliczamy kąty dyrekcyjne: Θ_1, Θ_2,..., Θ_n do punktów celu P_1, P_2,...,P_n. Kąty te otrzymamy na podstawie różnic kątów: ω_1, ω_2,..., ω_n pomierzonych na stanowisku E oraz kąta τ obliczonego ze współrzędnych punktów: A, E, C:
$\Theta_1 = \omega_1 - \tau;\ \Theta_2 = \omega_2 - \tau;\ ...;\ \Theta_n = \omega_n - \tau;$

Sposób 2:

1. Obliczamy cotangensy, a następnie wartości kątów φ_1, φ_2 w oparciu o wzory:

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_2 \cdot \operatorname{ctg}\beta_1 - \operatorname{ctg}\alpha_1 \cdot \operatorname{ctg}\beta_2}{(\operatorname{ctg}\alpha_2 + \operatorname{ctg}\beta_2) - (\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\beta_1)}$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_2 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_4 \cdot \operatorname{ctg}\beta_3 - \operatorname{ctg}\alpha_3 \cdot \operatorname{ctg}\beta_4}{(\operatorname{ctg}\alpha_4 + \operatorname{ctg}\beta_4) - (\operatorname{ctg}\alpha_3 + \operatorname{ctg}\beta_3)} \tag{5.7}$$

2. Dwukrotnie obliczamy wartości mimośrodu liniowego na podstawie danych związanych z bazami b_1, b_2, po czym wyniki zgodne z sobą uśredniamy.

$$e_1 = \frac{b_1}{\sin\varphi_1}\left(\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\beta_1} - \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha_2 + \operatorname{ctg}\beta_2}\right)$$

$$e_2 = \frac{b_2}{\sin\varphi_2}\left(\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha_3 + \operatorname{ctg}\beta_3} - \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha_4 + \operatorname{ctg}\beta_4}\right) \tag{5.8}$$

Jako ostateczną wartość mimośrodu liniowego przyjmiemy średnią arytmetyczną:

$$e = \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2)$$

3. Dwukrotne obliczenie wartości kąta τ (rys. 5.8).

$$\tau_1 = \alpha_2 + \varphi_1 \quad \text{oraz} \quad \tau_2 = \alpha_4 + \varphi_2$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$$

4. Obliczamy kąty dyrekcyjne dla poszczególnych kierunków:

$$\Theta_1 = \omega_1 - \tau;\ \Theta_2 = \omega_2 - \tau;\ ....,\ \Theta_n = \omega_n - \tau.$$

5.3.2. Dośrodkowanie obserwacji mimośrodowych

Dośrodkowanie obserwacji mimośrodowych polega na wykonaniu redukcji wartości elementów geometrycznych (kierunków, kątów, odległości), pomierzonych na punktach mimośrodowych, poprzez wyliczenie odpowiednich poprawek redukcyjnych i doprowadzeniu wyników pomiaru do takich wartości, które byłyby uzyskane podczas przeprowadzania obserwacji na stanowiskach i celach centrycznych.

Zgodnie z rysunkiem 5.9 otrzymamy:

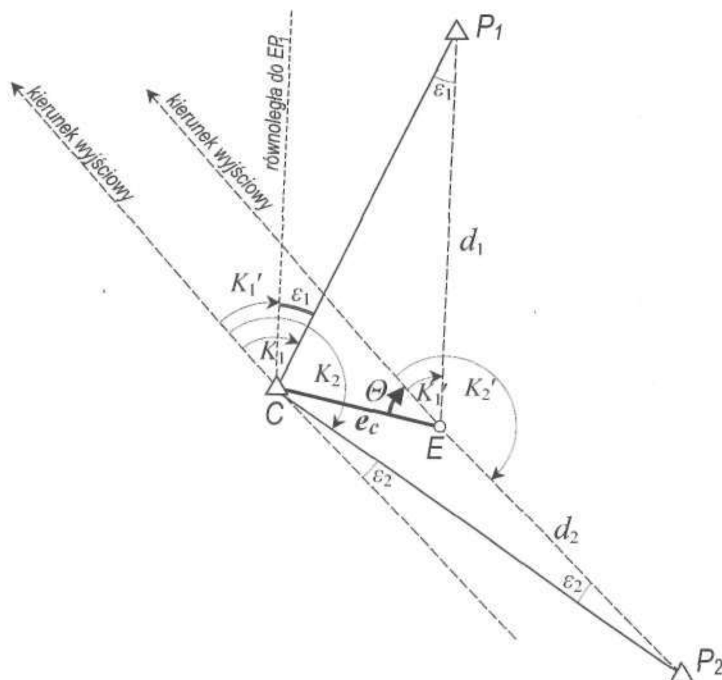
$$K_1 = K_1' + \varepsilon_1$$
$$K_2 = K_2' + \varepsilon_2$$
$$......................$$
$$K_n = K_n' + \varepsilon_n$$

oraz

$$\sin\varepsilon_1 = \frac{e_c \cdot \sin(\Theta + K_1')}{d_1}$$

$$\sin\varepsilon_2 = \frac{e_c \cdot \sin(\Theta + K_2')}{d_2}$$

$$\sin\varepsilon_n = \frac{e_c \cdot \sin(\Theta + K_n')}{d_n}$$



Rys. 5.9. Poprawki kierunków uzyskanych ze stanowiska mimośrodowego

Kąty: ε_1, ε_2, ... , ε_n są poprawkami kierunków: K_1', K_2', ... , K_n' pomierzonych na stanowisku ekscentrycznym E. Kąt Θ jest kątem dyrekcyjnym celu wyjściowego, dla którego ustala się zerowy kierunek zredukowany. Poprawki ε są małymi kątami, toteż ich sinusy można zastąpić wartościami kątów w mierze łukowej, zaś po ich wymnożeniu przez zamiennik ρ^{cc} wyrazić je w decymiligradach. Poprawka dla i-tego kierunku będzie równa:

$$\varepsilon_i = \frac{e_c \cdot \sin(\Theta + K_i')}{d_i} \cdot \rho^{cc} \tag{5.9}$$

zaś kierunek poprawiony:

$$K_i = K_i' + \varepsilon_i \tag{5.10}$$

Podobne wzory można zapisać dla poprawek na mimośród celu e_s z kątem dyrekcyjnym ψ.

$$\varepsilon_i' = \frac{e_s \cdot \sin(\psi + K_i')}{d_i} \cdot \rho^{cc} \tag{5.11}$$

Łączna poprawka dla *i*-tego kierunku, określająca wpływ obu mimośrodów e_c, e_s stanowi sumę poprawek obliczonych za pomocą wzorów: (5.9) i (5.11).

$$\varepsilon'' = \frac{e_c \cdot \sin(\Theta + K_i) + e_s \cdot \sin(\psi + K_i')}{d_i} \cdot \rho^{cc} \tag{5.12}$$

gdzie: d_i – długość i-tego boku mierzonego między punktami centrycznymi.

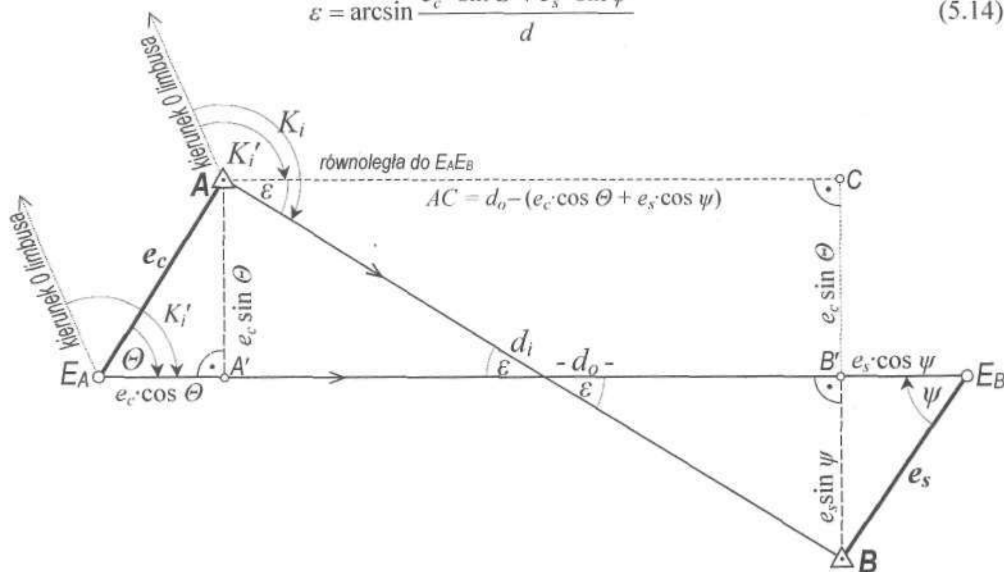
Korzystanie z przybliżonego wzoru (5.12) jest uzasadnione przy stosunkowo krótkich mimośrodach, nie przekraczających 5 m. Wynika to z poprzedniego założenia, że poprawka ε jest małym kątem, nie przekraczającym jednego stopnia. Dla dużych mimośrodów stanowiska e_c i celu e_s należy wyprowadzić wzory ścisłe.

Z trójkąta *ABC* (rys. 5.10) wynikają zależności:

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{e_c \cdot \sin\Theta + e_s \cdot \sin\psi}{d_o - (e_c \cdot \cos\Theta + e_s \cdot \cos\psi)} \tag{5.13}$$

oraz

$$\varepsilon = \arcsin \frac{e_c \cdot \sin\Theta + e_s \cdot \sin\psi}{d} \tag{5.14}$$



Rys. 5.10. Określenie poprawek dla mimośrodowego stanowiska i celu

Wzór (5.13) może być zastosowany wtedy, gdy odległość d_0 pomiędzy punktami mimośrodowymi jest znana, natomiast wzór (5.14), analogiczny do wzoru (5.12), stosujemy w przypadku znajomości odległości *d* zawartej między właściwymi punktami geodezyjnymi (centrycznymi). Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$a = e_c \cdot \cos\Theta + e_s \cdot \cos\psi \quad \text{oraz} \quad b = e_c \cdot \sin\Theta + e_s \cdot \sin\psi$$

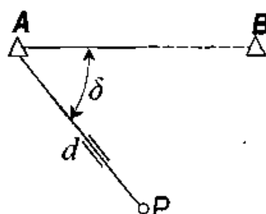
wzory (5.13) i (5.14) przyjmą znacznie prostszą postać:

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{a}{d_o - b} \tag{5.15}$$

$$\varepsilon = \arcsin \frac{b}{d} \tag{5.16}$$

5.4. Przeniesienie współrzędnych

5.4.1. Rola punktów przeniesienia współrzędnych



Rys. 5.11. Elementy przeniesienia współrzędnych

Przeniesienie współrzędnych trudnodostępnego lub niedostępnego punktu osnowy poziomej, zwanego dalej *punktem macierzystym*, polega na stabilizacji i wyznaczeniu współrzędnych w oparciu o specjalną konstrukcję przynajmniej jednego dostępnego *punktu przeniesienia*, położonego w sposób dogodny do pomiarów bezpośrednich, jak również wykonywania dalszych prac fotogrametrycznych i geodezyjnych, a szczególności do nawiązywania osnów niższych klas. Konieczność stosowania długich celowych w sieciach osnów poziomych klas I, II sprawia, że stanowiska pomiarowe na punktach tych osnów muszą być lokalizowane w miejscach zapewniających dobrą widoczność. Przy pomiarach dwustronnych sygnały tych punktów spełniają także rolę celów, toteż ich zabudowa powinna zapewniać możliwość wykonywania na nie obserwacji z innych odległych stanowisk. Powoduje to konieczność sytuowania punktów klas I, II na wysokich budowlach lub, w przypadku punktów naziemnych, zakładania stanowisk podwyższonych, wież triangulacyjnych i sygnałów.

Zbudowane kilkadziesiąt lat temu drewniane sygnały i wieże wskutek ograniczonej trwałości materiału uległy z czasem zniszczeniu, toteż bez wcześniej założonych punktów przeniesienia nie byłoby możliwe ich aktualne wykorzystanie do nawiązywania współcześnie zakładanych osnów niższych klas. Przeniesienia są wykonywane nie tylko dla osnowy naziemnej, lecz przede wszystkim dla punktów ulokowanych na wyniosłych budowlach, najczęściej na dobrze widocznych z daleka wieżach kościelnych, na które można z łatwością celować, lecz nie da się na nich ustawić teodolitu lub reflektora zwrotnego. Rolę sygnału celowniczego spełniają tu krzyże wież lub wyraźnie zarysowane detale architektoniczne, spełniające funkcję centra właściwego znaku i zarazem świecy (rys. 5.16).

Dla zapewnienia odpowiednio długich boków sieci klas I, II w warunkach gęstej zabudowy miejskiej oprócz budowli typu wieżowego punkty osnowy muszą być także lokalizowane na płaskich dachach wyższych budynków, balkonach i tarasach. Można tam wprawdzie umieścić zarówno sygnał celowniczy jak i instrument, lecz wysoko położone punkty wyższych klas utrudniają nawiązywanie sieci i pojedynczych ciągów poligonowych, wykorzystywanych z reguły w charakterze osnowy szczegółowej klasy III lub osnowy pomiarowej. Ciągi te z konieczności przebiegają więc dołem, wzdłuż ulic, zaś do ich kątowego i liniowego nawiązania niezbędne są naziemne punkty przeniesienia współrzędnych, umożliwiające dogodny pomiar elementów nawiązania ciągu, którymi są: poziomy kąt nawiązania δ i długość boku d, określanego jako *bok przeniesienia* (rys. 5.12).

Punkty przeniesienia współrzędnych stabilizuje się znakami typu 30 lub 36 (rys. 4.7), zaś punkty końcowe baz w siatkach przeniesienia płytami o wymiarach 0,3×0,3×0,1 m.

5.4.2. Wymagania dokładnościowe i konstrukcja siatek przeniesienia

Zgodnie z wymogami instrukcji G-2 punkty II klasy zlokalizowane w miejscach trudnodostępnych dla wykonywania pomiarów (wieże kościelne, maszty itp.) powinny posiadać geodezyjne przeniesienie współrzędnych. Obserwacje dla wyznaczenia punktu przeniesienia współrzędnych powinny być wykonane z dokładnością zapewniającą uzyskanie średniego błędu nie większego od 0,03 m w stosunku do punktu macierzystego. Punktowi przeniesienia nadaje się klasę punktu macierzystego.

Punkt przeniesienia współrzędnych *P* położony jest przeważnie na powierzchni gruntu, drogi lub ulicy, w pobliżu punktu macierzystego *A*, znajdującego się w miejscu niedostępnym lub mało dostępnym, utrudniającym nawiązanie osnowy niższej klasy. Nawiązanie to polega na wyznaczeniu tzw. *elementów przeniesienia* tj. kąta nawiązania δ i boku nawiązania d (rys. 5.11).

Gdy punkt macierzysty jest niedostępny lub dostępny, lecz położony bardzo wysoko na budowli, wtedy bezpośredni pomiar obu elementów nawiązania: δ, d jest niemożliwy do wykonania lub zbyt pracochłonny, a zatem dla określenia współrzędnych punktu przeniesienia *P* trzeba powyższe wielkości wyznaczyć pośrednio poprzez założenie odpowiednio skonstruowanej *siatki przeniesienia współrzędnych*. Ciągi poligonowe są wtedy nawiązywane do punktu przeniesienia *P*, z którego, oprócz punktu macierzystego, powinien być widoczny przynajmniej jeden punkt osnowy wyższej klasy.

Szczegółową lokalizację jednego lub większej liczby punktów przeniesienia ustala się podczas wywiadu terenowego, związanego z projektowaniem i zakładaniem sieci zawierającej punkt macierzysty. Położenie to musi zapewniać trwałość i stabilność znaku utrwalającego punkt przeniesienia, dogodne dowiązywanie ciągów poligonowych oraz wymaganą dokładność przeniesienia współrzędnych. Według wytycznych G-2.5 (§ 24) konstrukcja siatki przeniesienia powinna zapewnić spełnienie następujących warunków:

1. Odległość punktu przeniesienia od punktu macierzystego (długość boku przeniesienia) nie powinna być większa od 500 m, a kąt pochylenia celowej między tymi punktami nie powinien być większy od 35° (40^g).
2. Konstrukcja geometryczna siatki przeniesienia współrzędnych powinna zapewniać dwukrotne, niezależne wyznaczenie współrzędnych i wysokości punktu przeniesienia z dokładnością zapewniającą uzyskanie w stosunku do punktu macierzystego średnich błędów:

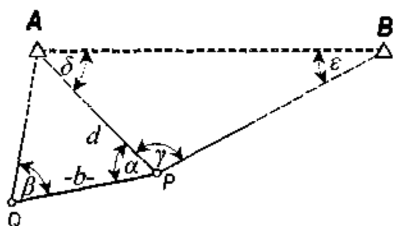
$$m_P \leqslant 0{,}03 \text{ m} \; ; \; m_H \leqslant 0{,}05 \text{ m}.$$

W praktyce przyjmuje się założenie, że błąd położenia punktu przeniesienia nie powinien przekraczać $^1/_3$ błędu średniego położenia punktu macierzystego. Punkty macierzyste dostępne jako stanowiska teodolitu lub dalmierza elektrooptycznego umożliwiają bezpośredni pomiar obydwu lub przynajmniej jednego z dwóch elementów nawiązania (przeniesienia): δ oraz d (rys. 5.11). Gdy znane są średnie błędy: m_d, m_δ, wówczas błąd położenia punktu przeniesienia wyrazi się wzorem:

$$m_P = \pm\sqrt{m_d^2 + d^2 \cdot m_\delta^2} \tag{5.17}$$

Jeśli kąt δ pomierzono teodolitem jednosekundowym w trzech seriach, zaś dokładność wyznaczenia długości boku nawiązania d, mierzonego tam i z powrotem, wynosi

±1 cm, wtedy średni błąd położenia punktu przeniesienia nie przekracza ±2 cm, co zapewnia spełnienie wymagania dokładnościowego: $m_P \leqslant 0{,}03$ m.



Rys. 5.12. Konstrukcja siatki do pośredniego wyznaczenia elementów nawiązania

Punkty przeniesienia mogą być zakładane nie tylko dla punktów macierzystych położonych się na wysokich budowlach, lecz także punktów stabilizowanych znakami gruntowymi w przypadku, gdy ze stanowiska znajdującego się na właściwym punkcie nie widać innego punktu nawiązania, co uniemożliwia pomiar kąta δ.

Ze względu na większą możliwość zniszczenia lub uszkodzenia pojedynczego punktu przeniesienia na terenach miast i zakładów przemysłowych zwykle w otoczeniu punktu macierzystego zakłada się ich większą liczbę, wiążąc je wzajemnie za pomocą wielopunktowych siatek, w których należy zmierzyć odpowiednią ilość elementów kątowych i liniowych, aby zapewnić właściwą kontrolę wyznaczonych elementów nawiązania.

Niedostępność macierzystego punktu A pociąga za sobą konieczność pośredniego wyznaczenia elementów przeniesienia: δ, d. Do tego celu najczęściej wykorzystuje się konstrukcję pokazaną na rys. 5.12, w której należy pomierzyć kąty: α, β, γ oraz długość bazy $b = PQ$. Zadanie, polegające na obliczeniu elementów przeniesienia, a tym samym także elementów nawiązania ciągu poligonowego rozpoczynającego się od punktu P, sprowadza się do rozwiązania w oparciu o twierdzenie sinusów dwóch trójkątów: APQ oraz ABP. Elementy przeniesienia wyniosą:

$$d = \frac{b}{\sin\,(\alpha+\beta)} \cdot \sin\beta \tag{5.18}$$

$$\varepsilon = \arcsin\, d \cdot \frac{\sin\gamma}{d_{AB}} \cdot \rho \tag{5.19}$$

Wyznaczenie kąta ε, który jako kąt trójkąta ABP nie może przekroczyć 180°, umożliwia obliczenie kąta nawiązania δ, stanowiącego dopełnienie sumy kątów $\gamma + \varepsilon$ do 180°:

$$\delta = 180° - (\gamma + \varepsilon) \tag{5.20}$$

Określenie współrzędnych punktu P na podstawie znajomości azymutu boku AB i elementów przeniesienia wykonamy według wzorów:

$$\begin{aligned} X_P &= X_A + d\cdot\cos\,(A_{AB}+\delta) \\ Y_P &= Y_A + d\cdot\sin\,(A_{AB}+\delta) \end{aligned} \tag{5.21}$$

W wyniku zastosowania prawa przenoszenia się błędów średnich w odniesieniu do funkcji wyrażonych powyższymi wzorami otrzymamy elementy składowe wzoru (5.17) występujące pod pierwiastkiem:

$$m_d^2 = d^2\left\{\frac{m_b^2}{b^2} + \frac{m_\beta^2}{\sin^2(\alpha+\beta)}\cdot[\sin^2\alpha + \cos^2(\alpha+\beta)]\right\} \tag{5.22}$$

$$d^2 \cdot m_\delta^2 = \mathrm{tg}^2\varepsilon \cdot d^2 \left\{ \frac{m_b^2}{b} + [\sin^2\alpha + \mathrm{ctg}^2(\alpha+\beta) + (\mathrm{ctg}\,\varepsilon + \mathrm{ctg}\,\gamma)^2] m_\beta^2 \right\} \tag{5.23}$$

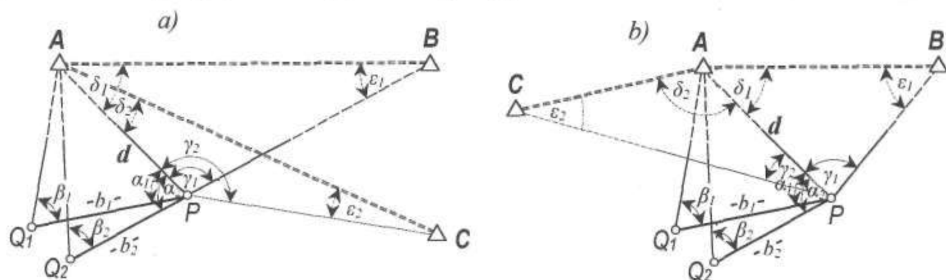
gdzie: m_β – błąd pomiaru kątów poziomych: α, β, γ

Jak wynika ze wzorów (5.22) i (5.23) dla zadanych wartości błędów pomiaru kątów i długości baz: m_β, m_b dokładność przeniesienia wzrasta wraz ze zmniejszaniem się kąta ε oraz długości boku nawiązania d. Z tego względu długość bazy nie powinna być mniejsza od długości boku przeniesienia AP.

Zgodnie z podanymi wcześniej wymogami konstrukcja siatki przeniesienia powinna zapewnić dwukrotne, niezależne wyznaczenie elementów: przeniesienia. Można to osiągnąć stosując dwie pary trójkątów pokazanych na rys. 5.13 a, b. Konstrukcje te umożliwiają dwukrotne wyznaczenie długości boku AP (d) i azymutu tego boku. Ostateczna wartość współrzędnych punktu przeniesienia stanowi średnią arytmetyczną z obydwu wyznaczeń. W tym przypadku średni błąd położenia punktu P wyniesie więc:

$$m_P = \sqrt{\tfrac{1}{2}(m_{P_1}^2 + m_{P_2}^2)} \tag{5.24}$$

Jeśli wraz z siatkami przeniesień współrzędnych zakładana jest także sieć ciągów poligonowych dowiązywanych do punktów przeniesienia, wówczas rolę baz b mogą pełnić przyległe boki poligonowe zmierzone z odpowiednią dokładnością w stosunku do klasy punktu macierzystego, dla którego dokonuje się przeniesienia.

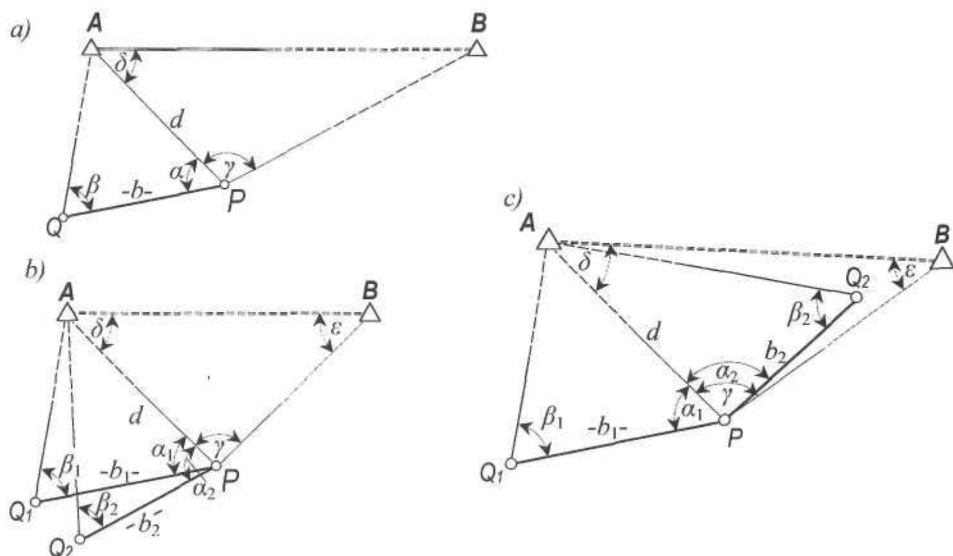


Rys. 5.13. Typowe siatki przeniesienia współrzędnych umożliwiające dwukrotne wyznaczenie długości boku nawiązania i jego azymutu

Gdy warunki terenowe i dostępność punktu macierzystego pozwalają na bezpośredni pomiar kąta nawiązania δ, wtedy można założyć uproszczoną siatkę przeniesienia (rys. 5.14 a) dla pośredniego określenia samego boku nawiązania d, którego długość można wówczas dwukrotnie i niezależnie od siebie obliczyć z trójkątów: ABP, APQ, ponieważ każdy z nich zawiera trzy znane elementy.

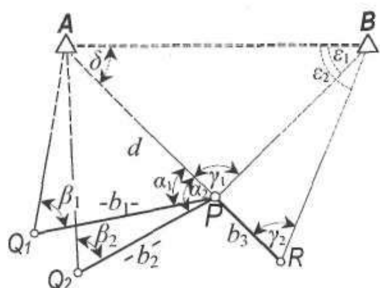
Konieczność zastosowania uproszczonej siatki może wystąpić również wtedy, gdy z punktu przeniesienia P oprócz punktu macierzystego widoczny jest tylko jeden punkt nawiązania (rys. 5.14 b, c). Nie ma wówczas możliwości wyznaczenia dwóch kątów nawiązania δ_1, δ_2, a więc skontrolowania nawiązania kątowego poprzez dwukrotne wyznaczenie azymutu A_{AP}. W tym przypadku konieczny jest eliminujący możliwość pomyłki, bardzo staranny pomiar kąta γ, ponieważ stanowi on jedyną obserwację wykonywaną w trójkącie ABP, w którym znane są długości: AB, AP (d) i kąt γ. W trójkącie ABP nie ma

zatem elementów nadliczbowych, natomiast w wyniku rozwiązania trójkątów: APQ_1, APQ_2 długość wspólnego boku AP (d) może być określona dwukrotnie.



Rys. 5.14. Uproszczone siatki przeniesienia współrzędnych

Dla poprawienia warunków kontroli przeniesienia współrzędnych można także wykorzystać wzmocnioną konstrukcję pokazaną na rys. 5.15, różniącą się od siatki z rys. 5.14 b dodatkowymi elementami: γ_2 i b_3 pomierzonymi w trójkącie BPR, którego wierzchołek R należy wcześniej z punktu przeniesienia P wtyczyć teodolitem na przedłużeniu boku AP.



Rys. 5.15. Wzmocniona siatka przeniesienia współrzędnych

Po określeniu poznanym wcześniej sposobem długości boku nawiązania AP (d) z trójkątów APQ_1, APQ_2, możemy wyznaczyć kąty ε_1, ε_2 na podstawie twierdzenia sinusowego w trójkątach ABP, ABR:

$$\sin \varepsilon_1 = d \cdot \frac{\sin \gamma_1}{d_{AB}} \quad ; \quad \sin \varepsilon_2 = (d + b_3) \cdot \frac{\sin \gamma_2}{d_{AB}},$$

a następnie dwukrotnie kąt nawiązania δ potrzebny do obliczenia azymutu A_{AP}:

$$\delta' = 180° - (\gamma_1 + \varepsilon_1) \quad ; \quad \delta'' = 180° - (\gamma_2 + \varepsilon_2),$$

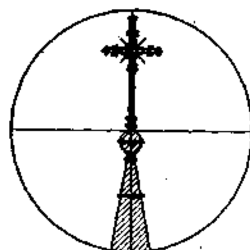
którego ostateczną wartością będzie średnia arytmetyczna:

$$\delta' = \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'')$$

Jako siatki przeniesienia mogą być również wykorzystywane różne typy wcięć omówione szczegółowo w rozdziale 9. Siatkę przeniesienia może stanowić np. pojedyncze wcięcie wstecz, o ile z punktu przeniesienia oprócz punktu macierzystego widać również dwa inne punkty wyższej klasy. Dla celów kontrolnych konstrukcja wcięcia powinna być jednak uzupełniona o pomiar przynajmniej jednego elementu nadliczbowego.

5.5. Punkty kierunkowe

Punkt kierunkowy (azymutalny) jest punktem terenowym widocznym bezpośrednio z punktu osnowy poziomej, z którym tworzy bok o znanym azymucie topograficznym. Para tych punktów tj. punkt podstawowy i punkt kierunkowy umożliwia nawiązanie kątowe osnowy niższej klasy do osnowy klasy wyższej np. ciągu poligonowego. Jako punkt kierunkowy obiera się zwykle niezbyt odległy, trwały i dobrze widoczny element wyniosłej budowli np. podstawę krzyża wieży kościelnej (rys. 5.16), punkt utrwalony na budowli lub stabilizowany punkt naziemny osnowy. W razie braku w otoczeniu danego punktu osnowy obiektu o charakterze punktu kierunkowego, osadza się oddzielny znak naziemny w odległości 400 – 600 m od punktu właściwego (wyjątkowo w odległości krótszej 200 m – 400 m).


Rys. 5.16. Cel na punkt kierunkowy na wieży kościoła

Dla punktu osnowy poziomej I klasy zakłada się minimum dwa punkty kierunkowe, zaś dla punktu II klasy (i punktu przeniesienia współrzędnych) należy wyznaczyć co najmniej jeden punkt kierunkowy, dobrze widoczny po zasygnalizowaniu. Może nim być punkt naziemny położony w odległości 0,5 – 2 km lub trwały i jednoznacznie określony punkt na budowli, znajdujący się w odległości 0,5 – 5 km. W przypadku braku możliwości ustalenia punktu kierunkowego zgodnie z powyższymi warunkami, należy zaprojektować naziemny punkt kierunkowy w odległości 400 – 600 m, a w trudnych warunkach terenowych w odległości nie mniejszej niż 200 m. Dla punktów osnowy III klasy jako punkt kierunkowy z reguły obiera się sąsiedni punkt tej samej lub wyższej klasy. Gdy osnowa jest zakładana technologią GPS, wówczas należy projektować pary punktów (macierzysty i kierunkowy) z zachowaniem wzajemnej widoczności między nimi.

Zgodnie z zaleceniami podanymi w wytycznych technicznych G-2.5 wyznaczenie punktu kierunkowego, nie będącego punktem osnowy I lub II klasy, należy wykonać według następujących zasad:

1. Wyznacza się techniką GPS wektor pomiędzy punktem osnowy a punktem kierunkowym.
2. Wyznacza się kierunek na punkt kierunkowy w nawiązaniu do dwóch kierunków na punkty I lub II klasy, mierząc kąty nawiązania w trzech seriach, z zamknięciem horyzontu. W przypadku braku możliwości nawiązania do dwóch kierunków, dopuszcza się nawiązanie do jednego kierunku z jednoczesnym zwiększeniem liczby serii do czterech. Pomiar wykonuje się teodolitem o dokładności odczytu $\pm 2^{cc}$, a błąd średni pomiaru kąta kierunkowego nie może przekraczać 15^{cc}.

Jeśli punkt kierunkowy jest jednocześnie punktem osnowy poziomej I lub II klasy, wtedy kąty kierunkowe oblicza się ze współrzędnych. Odległości do punktów kierunkowych, będących punktami osnowy poziomej kl. I lub II, należy także obliczać ze współ-

rzędnych. Odległości do innych punktów powinny być określane z błędem średnim nie większym niż ±1 m, a w przypadku odległości większej od 1 km – z mapy topograficznej z dokładnością do 10 m.

5.6. Pomiary liniowe

5.6.1. Metody pomiaru odległości i wymagania dokładnościowe

Pomiary liniowe w sieciach osnów poziomych, dotyczące baz triangulacyjnych, długości boków w sieciach kątowo-liniowych i w poligonowych ciągach oraz sieciach, mogą być wykonywane metodami pośrednimi i metodą bezpośrednią tj. przy użyciu przymiarów: dokładnych taśm i drutów inwarowych. Przez niektórych autorów publikacji geodezyjnych do pomiarów bezpośrednich jest zaliczany także pomiar długości przy użyciu dalmierzy elektromagnetycznych, w których emitowana jest sinusoidalna fala pomiarowa (wzorcowa). Jej połowa długości $\lambda/2$ pełni rolę przymiaru elektronicznego „odkładanego" przez dalmierz wewnątrz mierzonego odcinka. Wobec znacznego zasięgu, małej pracochłonności i wysokiej dokładności pomiaru dalmierzami elektromagnetycznymi, a szczególnie stosowanymi powszechnie we współczesnej geodezji tachimetrami elektronicznymi typu *total station*, przymiary taśmowe, drutowe i sztywne w osnowach poziomych mają obecnie rzadkie zastosowanie, które ogranicza się najczęściej do wyznaczania długości krótkich odcinków w ramach prostych konstrukcji w osnowach pomiarowych np. dla punktów posiłkowych.

Spośród różnych rodzajów dalmierzy elektromagnetycznych najbardziej popularne są obecnie dalmierze elektrooptyczne (świetlne) emitujące falę nośną o długości mieszczącej się w zakresie światła widzialnego (λ w zakresie od 0,40 μm do 0,76 μm) lub najczęściej promieniowania podczerwonego, bliskiego światłu widzialnemu (długość fali nośnej wynosi ok. 0,78 μm). Charakterystykę dokładności dalmierzy świetlnych przedstawia się najczęściej w formie wzoru na standardowy błąd pomiaru odległości – m_d, uwzględniający wpływ czynników systematycznych i przypadkowych:

$$m_d = \pm(a + b \cdot 10^{-6} \cdot d) \qquad (5.25)$$

gdzie: a – składnik stały, zawierający w sobie zespół jednostkowych błędów instrumentalnych oraz błąd określenia poprawek instrumentalnych dalmierza,
b – współczynnik proporcjonalny do mierzonej odległości, zawierający błędy: wyznaczenia prędkości fali elektromagnetycznej w próżni i w aktualnych warunkach pomiarowych, określenia częstotliwości wzorcowej i przesunięcia fazowego,
d – długość mierzonego boku wyrażona w metrach.

Drugi składnik błędu zawierający czynnik b może być wyrażany w mm/km lub w ppm. (skrót od: *parts per million*), czyli milionowych częściach mierzonej odległości. Błąd pomiaru odległości określony wzorem (5.25) stanowi bardzo ważny element charakterystyki technicznej dalmierza, z reguły podawanej w jego instrukcji obsługi lub prospekcie przez producenta instrumentu. Dobór dalmierza do pomiaru odległości w sieciach osnów poziomych klasy II i III powinien uwzględnić wymagania dokładnościowe pomiarów liniowych podane w instrukcji technicznej G-2.

Dla dalmierza elektrooptycznego przeznaczonego do pomiarów liniowych w sieciach osnowy szczegółowej klasy II współczynniki składowe błędu standardowego powin-

ny spełniać wymagania: $a \leqslant 10$ mm; $b \leqslant 5 \cdot 10^{-6}$ (5 ppm). Dokładność współczesnych dalmierzy wyrażona wzorem (5.25) jest określana poprzez przeciętne zakresy wartości współczynników *a, b*: dla *a* w przedziale od 5 mm do 10 mm, zaś dla *b* od 1 do 10.

Pomiary liniowe w sieciach III klasy należy wykonywać w trzech seriach, dalmierzami, których całkowity błąd m_d określony wzorem (5.25) nie przekracza ±20 mm.

Tabela 5.3: Dopuszczalne błędy pomiaru długości kątów i boków w sieciach kl. II i III

Osnowa pozioma kl. II				Osnowa pozioma kl. III (met. poligonizacji)			
Pomiar kątów		Pomiar boków		Pomiar kątów		Pomiar boków	
błąd średni kierunku	$\leqslant 8^{cc}$	błąd standardowy dalmierza	≤(10 mm +5 ppm)	błąd średni kierunku	$\leqslant 20^{cc}$	błąd standardowy dalmierza	≤(10 mm +10 ppm)
Ilość serii	≥3	Ilość serii	≥3	Ilość serii	≥2	Ilość serii	≥2
Dopuszczalna różnica między seriami	$\pm 16^{cc}$	Dopuszczalna różnica między seriami	podwójna wartość błędu standard.	Dopuszczalna różnica między seriami	$\pm 30^{cc}$	Dopuszczalna różnica między seriami	podwójna wartość błędu standard.

5.6.2. Sprawdzanie dalmierzy

Zgodnie z instrukcją G-2 dalmierze elektrooptyczne wykorzystywane do pomiarów osnów poziomych powinny być sprawne techniczne, mieć metrykę instrumentu, atest i aktualne świadectwo komparacji. *Atestacja* przyrządów pomiarowych, legalizująca sprzęt stosowany do prac geodezyjnych, jest w Polsce wykonywana przez Instytut Geodezji i Kartografii (IGiK)w Warszawie. Dotyczy ona w szczególności nowych dalmierzy elektrooptycznych oraz tych, w których podczas naprawy wymieniano układ nadawczo-odbiorczy lub elementy fazomierza. W ramach atestacji określa się: dokładność, zasięg, stałą dodawania, poprawkę fazomierza, częstotliwość wzorcową dalmierza (zob. ust. 5.7) oraz dokonuje sprawdzenia i rektyfikacji jego osprzętu.

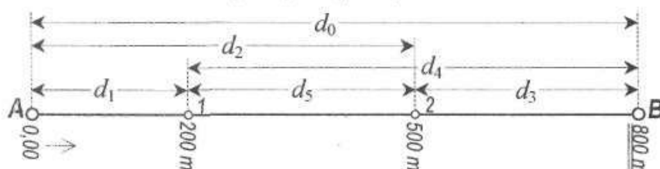
Komparacja okresowa polega na sprawdzeniu i aktualizacji parametrów technicznych dalmierza oraz przeglądzie osprzętu. Dokonuje jej także Instytut Geodezji i Kartografii lub jednostka przez niego upoważniona. Komparację przeprowadza się na po naprawie instrumentu oraz na początku i końcu sezonu pomiarowego, jednak nie rzadziej niż jeden raz w roku. Wyniki komparacji wpisywane są do metryki instrumentu oraz wydawane jest urzędowe świadectwo komparacji.

Celem *kontroli polowych*, które powinny być dokonywane przez użytkownika sprzętu przynajmniej raz na miesiąc, jest sprawdzenie najważniejszych parametrów dalmierza oraz weryfikacja jakości pracy obserwatora. Dla systematycznego sprawdzania przyrządu należy w terenie równym i odkrytym założyć wcześniej bazę kontrolną *AB* (rys. 5.17) o łącznej długości ok. 800 m i wyznaczyć punkty pośrednie *1, 2* w odległości ok. 200 m i 500 m od punktu początkowego *A* bazy. Punkty *A, 1, 2, B* należy zastabilizować znakami typu *30* lub *36* (rys. 4.7) z wyraźnymi centrami mosiężnymi lub ceramicznymi. Pierwszy pomiar bazy, dostarczający danych wyjściowych powinien być wykonany niezależnie dwoma atestowanymi i dokładnie wcześniej sprawdzonymi dalmierzami.

W ramach kontroli polowej pomiarowi w sześciu seriach podlegają odległości: d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. Pomiar każdej z sześciu wyżej wymienionych długości uzyskanych jako średnia z wyników serii można uznać za prawidłowy, jeżeli wyniki pomiaru kontrolnego

są zgodne z pomiarem wyjściowym w granicach podwójnego błędu m_d obliczonego z zależności (5.25), a ponadto spełniają następujące nierówności:

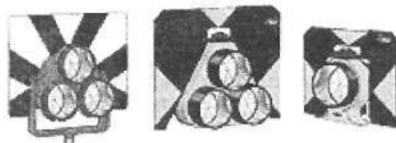
$$d_1 + d_3 + d_5 - d_0 \leqslant 0{,}02 \text{ m}$$
$$d_2 + d_3 - d_0 \leqslant 0{,}02 \text{ m}$$
$$d_1 + d_4 - d_0 \leqslant 0{,}02 \text{ m}$$
$$d_1 + d_5 - d_2 \leqslant 0{,}02 \text{ m}$$
$$d_3 + d_5 - d_4 \leqslant 0{,}02 \text{ m}$$



Rys. 5.17. Schemat bazy kontrolnej

5.6.3. Pomiar długości boków sieci

Określanie długości elementów liniowych w sieciach osnów poziomych metodami bezpośrednimi za pomocą taśm i drutów obecnie nie jest już stosowane. Od kilkudziesięciu lat metody te zostały zastąpione przez znacznie wygodniejsze i dokładniejsze pomiary wykonywane przy użyciu dalmierzy elektrooptycznych. Przygotowanie pomiaru dalmierzami wymaga ustawienia sygnałów celowniczych wraz z reflektorami zwrotnymi (rys. 5.18) na statywach lub stolikach wież obserwacyjnych i stanowiskach podwyższonych instrumentu. W miarę możności stanowiska dalmierza i sygnały celu powinny być położone centrycznie. Błędy centrowania dalmierza i zwierciadła na punktach końcowych mierzonego boku nie mogą przekraczać" 2 mm dla kl. II i 5 mm dla kl. III. Gdy punkty centryczne są niedostępne i stanowisko oraz cele muszą być ustawione mimośrodowo, wtedy pomiary wykonuje się na zastabilizowanych punktach mimośrodowych, co wiąże się z koniecznością wyznaczenia elementów mimośrodów stanowiska i celów (rys. 5.10).



Rys. 5.18. Reflektory z tarczami

Pomiar należy przeprowadzać sprawdzonym dalmierzem z dobrze naładowanymi bateriami, w korzystnych warunkach atmosferycznych, zapewniających dobrą widoczność reflektorów zwrotnych ze stanowiska instrumentu, osłanianego parasolem przed opadami i bezpośrednim promieniowaniem słonecznym. Jako warunki nieodpowiednie dla pomiaru odległości należy rozumieć zamglenie lub opady ograniczające widoczność do nie więcej niż 3 km, silne nasłonecznienie oraz duża wibracja powietrza. Zwierciadła mają być czyste, pozbawione kurzu i rosy, które rozpraszają sygnał pomiarowy.

Nigdy nie należy celować lunetą w kierunku słońca, ponieważ może to spowodować duże błędy pomiaru oraz trwałe uszkodzenie układu dalmierczego. Jeśli podczas pomiarów liniowych wystąpi tego typu celowa, wtedy należy zamienić ze sobą stanowiska: instrumentu i reflektora. Ilość pryzmatów (1, 3 lub więcej) reflektora powinna być dostosowana do długości mierzonego boku i aktualnej widoczności, dlatego wzdłuż każdej celowej należy sprawdzać intensywność sygnału powrotnego. Na drodze wiązki emitowanej

fali nie powinny się znajdować żadne przeszkody, zwłaszcza ruchome np. drgające liście, ponieważ mogą one spowodować znaczne błędy pomiaru odległości.

Pomiar długości pojedynczego boku osnowy poziomej klasy II powinien być przeprowadzony w co najmniej trzech seriach. *Seria pomiarowa* stanowi komplet czynności i odczytów niezbędnych do wyznaczenia długości pojedynczego boku osnowy. Po każdej serii należy powtórnie spoziomować i scentrować instrument oraz ponownie naprowadzić środek siatki celowniczej na środek reflektora zwrotnego. Przed opuszczeniem stanowiska pomiarowego należy skontrolować prawidłowość wyników obserwacji. Rozbieżności odległości z poszczególnych serii nie mogą przekraczać podwójnej wartości błędu m_d podanego w instrukcji fabrycznej dalmierza. W przypadku, gdy różnice z dowolnej pary serii są większe, należy anulować wszystkie wyniki obarczone nadmiernymi błędami i od nowa wykonać trzy serie pomiaru tej samej odległości. Dla trygonometrycznego wyznaczenia wysokości punktów należy dodatkowo wyznaczyć z dokładnością do ±0,5 cm wysokości: instrumentu i sygnału celowniczego nad centrami znaków geodezyjnych.

Tabela 5.4. Dziennik pomiaru boków sieci kl. II dalmierzem elektrooptycznym

Klasa: .... Typ dalmierza: .... nr .... Ark. mapy: .... Obiekt: ....

Nr stan. – nr celu								
Data								
i_d	i_z							
Ilość pryzmatów								
Eksc. stan. e_s, Θ								
Eksc. celu e_c, ψ								
Temp. t	Ciśn. p							
Popr. atm. K_a/km								
Popr. atm. K_a								
Stała dodaw. K_s								
Popr. fazom. K_f								
Suma=$K_a+K_s+K_a$								
Odczyt dalmierza	seria I							
	seria II							
	seria III							
Średnia								
Dł. skośna d_s								
Dł. pozioma d								
Kąt pionowy	KL							
	KP							
	Kąt α							
$d=d_s \cdot \cos \alpha$								
$d+\Delta e$								

W celu określenia poprawki atmosferycznej do pomierzonej długości w sieci kl. II trzeba na stanowisku instrumentu za pomocą sprawdzonego aneroidu zmierzyć aktualne ciśnienie atmosferyczne z dokładnością odczytu do 0,5 mm Hg (0,7 hPa) i temperatury z dokładnością odczytu do 0,5°C atestowanym termometrem. Dokładność określenia powyższych parametrów nie może być niższa od 1 mm Hg i 1°C. Dla boków dłuższych od 2 km i różnicy wysokości końców boku ponad 15 m, analogicznego pomiaru należy również dokonać na punktach ustawienia reflektorów zwrotnych, zaś jako dane do obliczenia poprawki przyjąć średnie z pomiarów na obu punktach. W kl. III osnowy dokładność pomiaru temperatury i ciśnienia wynoszą odpowiednio: 1°C oraz 1 mm Hg (1,3 hPa).

Wyniki pomiarów długości, wskazania przyrządów meteorologicznych, wysokości instrumentu i sygnałów notuje się w dzienniku polowym (tabela 5.4) lub rejestruje w nośnikach pamięci zewnętrznej lub wewnętrznej dalmierza.

Do pomierzonej odległości należy wprowadzić następujące poprawki:

- poprawkę atmosferyczną – K_a,
- poprawkę stałej dodawania dalmierza – K_s,
- poprawkę dalmierza ze względu na cykliczne zmiany wskazań fazomierza (poprawkę fazomierza) – K_f,
- poprawkę redukcji pomierzonej długości do poziomu
- poprawkę redukcji odległości poziomej na powierzchnię elipsoidy GRS-80,
- poprawkę boku pomierzonego mimośrodowo.

Dwie poprawki tj. K_s, K_f zostają określone podczas komparacji okresowej instrumentu i są zapisane w świadectwie komparacji.

5.6.4. Obliczenie poprawek odległości oraz zredukowanej długości boku

Poprawka atmosferyczna

Poprawka atmosferyczna K_a jest określana za pomocą wzorów, tablic lub nomogramów zamieszczanych przez producenta w fabrycznej instrukcji obsługi dalmierza. Poprawkę ustala się na stanowisku instrumentu na podstawie pomiaru parametrów meteorologicznych: ciśnienia p wyrażonego w mm Hg, hektopaskalach (hPa) lub milibarach (mb), temperatury t w stopniach Celsjusza (°C), a czasem dodatkowo wilgotności względnej powietrza w procentach. Potrzeba pomiaru wilgotności zachodzi przede wszystkim w warunkach klimatu gorącego i wilgotnego.

Wartość poprawki wyrażonej w mm/km otrzymujemy na podstawie opisu krzywej (rys. 5.19) znajdującej się na przecięciu prostych prostopadłych wyprowadzonych na skalach nomogramu z danych odczytów temperatury i ciśnienia. Poprawkę dla pomierzonej odległości oblicza się z dokładnością do 1 mm jako wartość proporcjonalną do wyniku pomiaru wyrażonego w kilometrach. Współczesne dalmierze z reguły obliczają poprawkę i redukują odległość samoczynnie po wprowadzeniu danych meteorologicznych.

Stała dodawania

Poprawka stałej dodawania dalmierza K_s jest w rzeczywistości poprawką układu utworzonego przez dalmierz i reflektor zwrotny, składa się zatem z dwóch części. Część związana z dalmierzem wiąże się z jego konstrukcją i działaniem, toteż może z czasem ulegać pewnym zmianom. Druga, niezmienna część stałej K_s pochodzi od reflektora i związana jest z jego budową.

Jeśli korzystamy z oryginalnego zestawu fabrycznego dalmierz – pryzmat, wtedy stała K_s jest z reguły równa zeru, co przeważnie jest wyraźnie zaznaczone w instrukcji obsługi danego instrumentu. Posługując się nieoryginalnym pryzmatem jesteśmy zobowiązani dokonać wyznaczenia stałej K_s. Można tego dokonać podczas sprawdzenia okresowego, mierząc przy pomocy zestawu dalmierz – pryzmat znane wcześniej długości odcinków na bazie kontrolnej (rys. 5.17). Wartość stałej K_s możemy określić jako średnią z kilku różnic obliczonych pomiędzy długością znaną i pomierzoną. Innym sposobem jest pomiar co najmniej trzech odcinków, z których dwa stanowią sumę odcinka trzeciego np. zgodnie z rys. 5.17:

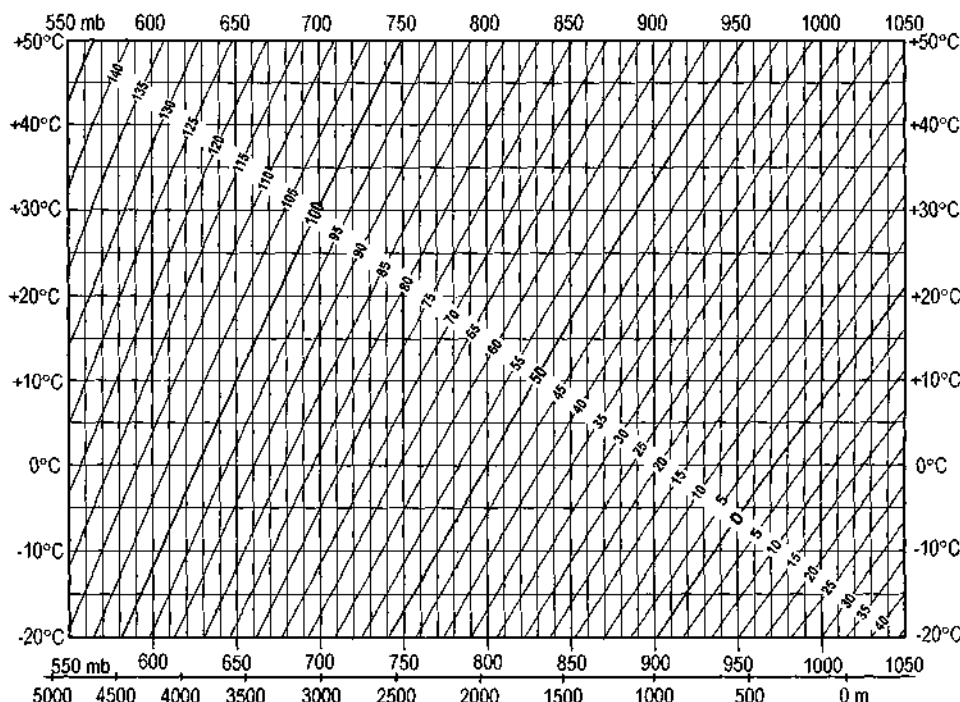
$$d_{[illegible]}=d_{[illegible]}+d_{[illegible]}$$

Wartość stałej wyznaczymy w tym wypadku na podstawie zależności:

$$K_s = d_0 - (d_2 + d_3),$$

do której podstawimy wyniki pomiaru wspomnianych długości.

Nomogram tachimetru Leica TC 305 do określania poprawek atmosferycznych



Rys. 5.19. Przykład nomogramu do odczytywania poprawki atmosferycznej

Poprawka fazomierza

Zadaniem fazomierza jest pomiar przesunięcia fazowego $\Delta\varphi$, stanowiącego różnicę fazy fali powracającej do odbiornika po jej odbiciu od reflektora i fazy fali wysyłanej przez nadajnik. Poprawka fazomierza K_f jest to błąd systematyczny wyznaczenia przesunięcia fazowego, zmieniający się cyklicznie w zakresie skali pomiarowej fazomierza. Wyznaczenie poprawki odbywa się na specjalnych bazach komparacyjnych. Konstrukcja współczesnych dalmierzy elektromagnetycznych z reguły zapewnia automatyczne zminimalizowanie poprawki K_f.

Poprawka redukcji odległości skośnej do odległości poziomej

Redukcja odległości skośnej (rzeczywistej) d', czyli długości odcinka AB, pomierzonej dalmierzem elektrooptycznym do odległości d zredukowanej na płaszczyznę poziomą (odległości poziomej) wymaga znajomości pionowego kąta nachylenia α (lub zeni-

talnego z) albo przewyższenia h, czyli różnicy wysokości dalmierza i reflektora, która zgodnie z rys. 5.20 wyniesie:

$$h = (H_P + s) - (H_S + i)$$

Na podstawie tych wielkości można obliczyć odległość zredukowaną d w oparciu o znane wzory, wynikające z trójkąta prostokątnego ABB':

$$d = d' \cdot \cos\alpha \qquad \text{lub} \qquad d = d' \cdot \sin z \tag{5.26}$$

oraz

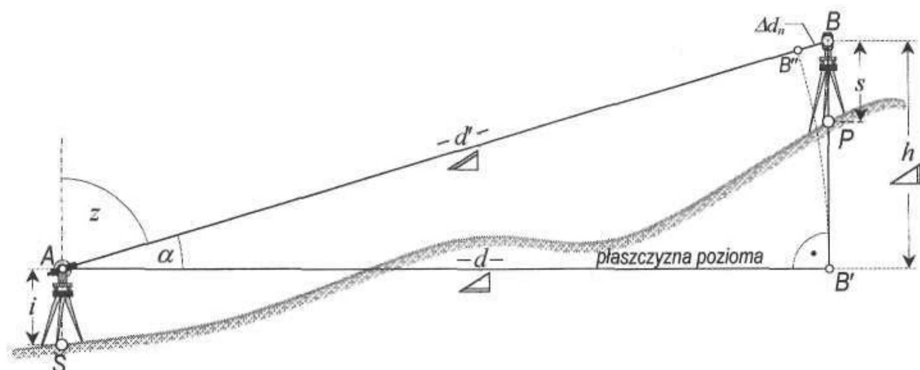
$$d = \sqrt{d'^2 - h^2} = d'\left[1 - \left(\frac{h}{d'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.27}$$

Redukcja odległości skośnej polega na wyliczeniu za pomocą niżej podanych wzorów poprawki redukcyjnej Δd_n, stanowiącej różnicę odległości poziomej i odległości skośnej:

$$\Delta d_n = d - d'$$

oraz jej algebraicznym dodaniu do odległości skośnej, co w rezultacie daje odległość zredukowaną:

$$d = d' + \Delta d_n \tag{5.28}$$



Rys. 5.20. Poprawka redukcji odległości skośnej do poziomu

Poprawka redukcyjna Δd_n jest zawsze u j e m n a. Znając kąt nachylenia α lub zenitalny z można ją określić za pomocą wzoru:

$$\Delta d_n = d'\,(1 - \cos\alpha) = d'\,(1 - \sin z) \tag{5.29}$$

lub

$$\Delta d_n = -2d' \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{5.30}$$

Gdy znana jest różnica wysokości h dalmierza i pryzmatu, wtedy do obliczenia poprawki redukcyjnej można posłużyć się wzorem (5.31), uzyskanym po rozwinięciu funkcji wyrażonej wzorem (5.27) w szereg Taylora:

$$\Delta d_n = -\frac{h^2}{2d'} - \frac{h^4}{8d'^3} - \dots \tag{5.31}$$

W celu zapewnienia dokładności redukcji z błędem średnim poprawki – $m_{\Delta d}$ nie większym niż $\frac{1}{3}$ błędu standardowego m_d ($m_{\Delta dn} \leqslant \frac{1}{3} m_d$) do obliczenia poprawki Δd_n wystarcza z reguły tylko pierwszy wyraz szeregu tj. $-\frac{h^2}{2d'}$. W przypadku, gdy długość d' przekracza 3 km, zaś wartość bezwzględna przewyższenia h jest większa od 33 m, wówczas poprawkę należy obliczać z uwzględnieniem obydwu składników wzoru (5.31).

W zintegrowanych tachimetrach elektronicznych typu *total station* redukcja na poziom wykonywana jest automatycznie na podstawie kąta pionowego. Wyświetlane i rejestrowane mogą być: odległość skośna (◺), odległość zredukowana do poziomu (◺) lub przewyższenie (◺).

Poprawka redukcji pomierzonej odległości na powierzchnię elipsoidy GRS-80

Długość zredukowaną do poziomu, pomierzoną na średniej wysokości $H_{śr}$ należy następnie zredukować na poziom zerowy, czyli powierzchnię elipsoidy GRS-80. Odległość zredukowana na poziom elipsoidy d_m obliczona na podstawie odległości d zredukowanej do poziomu wynosi:

$$d_m = \frac{d \cdot R}{R + H_{śr}} \tag{5.32}$$

gdzie: R – średni promień Ziemi, R = 6 367 650 m;

$H_{śr}$ – średnia wysokość dalmierza i pryzmatu $H_{śr} = \frac{1}{2}[(H_P + s) + (H_S + i)]$;

Poprawka redukcyjna Δd_m odległości d jest równa:

$$\Delta d_m = -\frac{H_{śr} \cdot d}{R} \tag{5.33}$$

Obliczenie odległości poprawionej ze względu na mimośród stanowiska i celu

Po zredukowaniu do poziomu długości boku pomierzonego mimośrodowo należy zredukować jego długość na podstawie pomierzonych elementów mimośrodów:

- stanowiska,
- celu.

Zgodnie z rysunkiem 5.10 odległość d_i pomiędzy punktami centrycznymi A, B obliczona w oparciu o długość d_0 pomierzoną ekscentrycznie wyniesie:

$$d_i = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(d_0 - a)^2 + b^2} \tag{5.34}$$

przy czym: $AC = d_0 - (e_c \cdot \cos\theta + e_s \cdot \cos\psi) = d_0 - a$

oraz $BC = e_c \cdot \sin\theta + e_s \cdot \sin\psi = b$.

Jeśli mierzona długość nie przekracza 0,5 km, zaś suma mimośrodów liniowych stanowiska i celu jest mniejsza od 1 metra, wtedy poprawkę Δd_e pomierzonej mimośrodowo odległości d_0 można wyrazić wzorem uproszczonym:

$$\Delta d_e = -(e_c \cdot \cos\theta + e_s \cdot \cos\psi) \tag{5.34 a}$$

Poprawki redukcji odległości na płaszczyznę odwzorowania kartograficznego

Poprawka odwzorowawcza odległości wynika ze zniekształceń, jakie następują w rezultacie przeniesienia (odwzorowania) elementów liniowych z powierzchni odniesienia na płaszczyznę odwzorowania kartograficznego.

Wartości tych poprawek obliczane są ze wzorów wyprowadzonych w ramach opracowania matematycznego danego odwzorowania. Wzór poprawki Δd_0 długości odcinka IK stanowi funkcję F współrzędnych punktów I, K pomnożoną przez współczynnik b właściwy dla danego odwzorowania: $\Delta d_0 = b \cdot F(X_I, Y_I, X_K, Y_K)$.

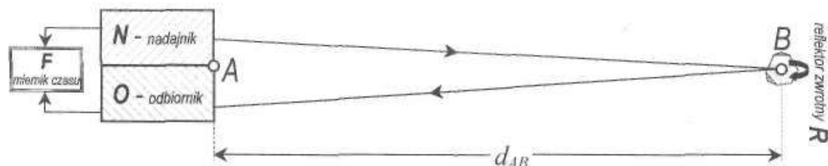
Współrzędne punktów I, K wystarczy przy tym znać jedynie w dużym przybliżeniu. Dla określenia poprawek odwzorowawczych długości w układzie „1965" można również skorzystać z mapki zawierającej izolinie zniekształceń odległościowych (mm/km) w poszczególnych strefach tego układu (rys. 1.10).

5.7. Dalmierze elektromagnetyczne

Każdy dalmierz (odległościomierz) jest urządzeniem służącym do pośredniego pomiaru długości, czyli do jej wyznaczenia bez potrzeby przykładania (transportu) przyrządu pomiarowego wzdłuż mierzonego odcinka.

Dalmierzem elektromagnetycznym nazywamy przyrząd, w którym nośnikiem energii tworzącej i przenoszącej sygnał pomiarowy jest fala elektromagnetyczna. Fala ta jest rozchodzącym się w przestrzeni zaburzeniem pola elektromagnetycznego, przy czym najprostszą falą elektromagnetyczną jest *fala harmoniczna* o sinusoidalnej zależności wektorów pól: elektrycznego i magnetycznego od czasu. *Sygnał pomiarowy* stanowi emitowana przez nadajnik dalmierza fala elektromagnetyczna doprowadzona poprzez modulację do ściśle określonej formy. *Modulacja fali* jest procesem fizycznym polegającym na oddziaływaniu pewnego przebiegu wielkości fizycznej, zwanej sygnałem modulującym, na inny przebieg (modulowany), będący falą nośną, w wyniku czego uzyskuje się określony przebieg fali zmodulowanej. Do najczęściej stosowanych rodzajów modulacji należą:

- *modulacja harmoniczna*, w której fala nośna posiada przebieg sinusoidalny,
- *modulacja impulsowa*, w której fala nośna jest okresowym ciągiem impulsów.



Rys. 5.21. Schemat dalmierza elektromagnetycznego

Dalmierz elektromagnetyczny składa się z nadajnika N odbiornika O i elektronicznego miernika czasu F (rys. 5.21). Wyznaczenie odległości pomiędzy zadanymi punktami A, B opiera się na zasadzie pomiaru czasu t_s, w którym sygnał pomiarowy przebywa drogę $2d_{AB}$ wzdłuż mierzonego odcinka tj. w kierunku od A do B oraz od B do A (tam i z powrotem). Miernik czasu dalmierza znajdującego się w punkcie A rejestruje elektronicznie moment wysłania sygnału pomiarowego t_w oraz moment jego powrotu t_p po odbiciu (retransmisji) fali elektromagnetycznej przez reflektor zwrotny umieszczony w punkcie B. Znając wartość różnicy wskazań miernika czasu: $t_s = t_p - t_w$ oraz prędkość v sygnału przenoszonego na fali elektromagnetycznej można obliczyć rzeczywistą długość boku AB

na podstawie zależności, która zachodzi pomiędzy czasem t_s a drogą ($2d_{AB}$) pokonaną przez sygnał pomiarowy:

$$d_{AB} = \frac{1}{2} v \cdot t_s \quad (5.35)$$

W próżni fale elektromagnetyczne rozchodzą się prostoliniowo ze stałą prędkością c (299 792,5 km/s), jednak w atmosferze ziemskiej prędkość fali v zależy od parametrów meteorologicznych, w tym głównie od temperatury i ciśnienia powietrza, zaś w mniejszym stopniu od jego wilgotności, wpływających na zmianę wartości współczynnika załamania n fali w powietrzu. Powoduje to konieczność wprowadzania poprawek atmosferycznych do wyników pomiaru, o czym była już wcześniej mowa w ust. 5.6.4. Prędkość v można określić na podstawie wzoru:

$$v = \frac{c}{n} \quad (5.36)$$

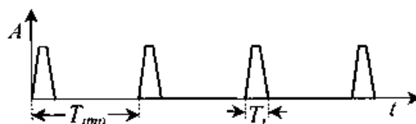
Spośród szerokiego zakresu częstotliwości fal elektromagnetycznych do pomiaru odległości najlepiej nadają się: *mikrofale*, czyli fale radiowe o długościach fal λ w zakresie od kilku milimetrów do ok. 1 metra oraz *fale świetlne* wraz podczerwienią bliską światłu widzialnemu (λ od 0,35 μm do 1,1 μm).

W zależności od długości λ emitowanej przez przyrząd fali rozróżniamy więc dalmierze:

- radiowe czyli mikrofalowe,
- świetlne (w tym: elektrooptyczne i interferencyjne).

Pomiar mikrofalowy jest mniej dokładny od świetlnego, ponieważ ten ostatni dzięki skupionej wiązce promieniowania jest w mniejszym stopniu zakłócany przez odbicia (od powierzchni terenu, budowli i innych obiektów) oraz zmiany wilgotności powietrza. Zaletą dalmierzy mikrofalowych jest ich bardzo duży zasięg dochodzący do 120 km.

Ze względu na formę sygnału pomiarowego wyodrębnia się elektromagnetyczne dalmierze impulsowe i fazowe, które różni przede wszystkim odmienny sposób rozwiązywania problemu pomiaru czasu t_s. Nadajniki w *dalmierzach impulsowych* dokonują impulsowej modulacji fali nośnej, wytwarzając w określonych odstępach czasu T_{imp} sygnały pomiarowe w formie krótkich odcinków fali harmonicznej, zwanych impulsami (rys. 5.22), zaś po odbiciu sygnału i jego przyjęciu przez odbiornik miernik czasu oblicza różnicę czasową $t_p - t_w$.



Rys. 5.22. Wykres impulsów fali elektromagnetycznej

W zależności od działania urządzeń (generatory kwarcowe) wytwarzających impulsy, kształt ich obwiedni na wykresie fali nośnej jako funkcji amplitudy w czasie może być trójkątny, prostokątny, trapezoidalny lub inny. Iloczyn okresu powtarzania impulsów – T_{imp} i prędkości ich rozchodzenia się – v impulsów stanowi wzorzec długości dalmierza impulsowego:

$$L_{imp} = v \cdot T_{imp} \quad (5.37)$$

W nowoczesnych dalmierzach impulsowych pomiar czasu t_s i wynikającej z niego odległości odbywa się automatycznie za pomocą specjalnych liczników cyfrowych.

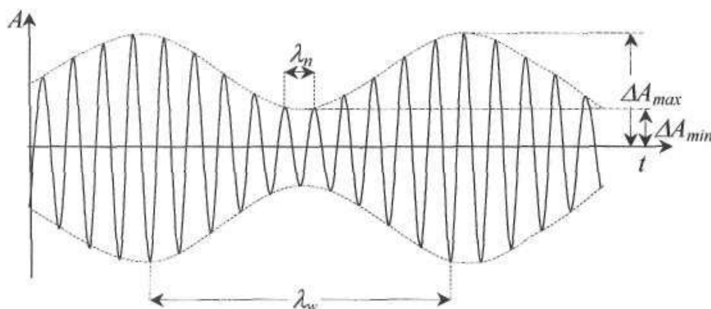
W *dalmierzach fazowych* stosowany jest sygnał pomiarowy w postaci zmodulowanej sinusoidalnie, ciągłej fali harmonicznej, zaś czas t_s jest określany w sposób pośredni, na podstawie różnicy faz fali wychodzącej z nadajnika i tej samej fali po odbiciu powracającej do odbiornika.

Modulacja sinusoidalna w amplitudzie (rys. 5.23) umożliwia nałożenie na *falę nośną* o długości λ_n *fali wzorcowej* (pomiarowej) o długości λ_w. Krótka fala nośna służy do koncentracji energii promieniowania elektromagnetycznego, natomiast fala wzorcowa pełni podczas określania odległości rolę przymiaru. Fazomierz *F*, do którego dochodzą obie fale: wysyłana i odbita jest urządzeniem pomiarowym, które określa przesunięcie fazowe, czyli różnicę faz pomiędzy falą wysyłaną przez nadajnik *N* a falą odbitą przyjętą przez odbiornik *O*.

Ciągły sygnał pomiarowy w formie fali sinusoidalnej wyraża się wzorem:

$$y = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_o) \tag{5.38}$$

gdzie:
- a – amplituda fali,
- ω – częstotliwość kątowa (pulsacja),
- t – czas,
- φ_o – faza początkowa.



Rys. 5.23. Modulacja sinusoidalna fali nośnej w amplitudzie

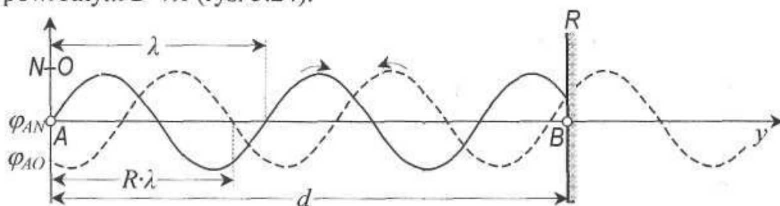
Załóżmy, że z nadajnika *N* został wyemitowany sygnał o fazie:

$$\varphi_{AN} = \omega \cdot t + \varphi_o.$$

Po odbiciu fali od reflektora *R* faza sygnału na wejściu do odbiornika *O* wyniesie:

$$\varphi_{AO} = \varphi_{AN} - \omega \cdot t_s,$$

Wielkość t_s stanowi czas przebycia przez sygnał odcinka $2d$ w kierunku głównym $A \rightarrow B$ i powrotnym $B \rightarrow A$ (rys. 5.24).



Rys. 5.24. Przebieg sygnału sinusoidalnego na drodze $A \rightarrow B \rightarrow A$ (2d)

W fazomierzu F następuje pomiar przesunięcia fazowego $\Delta\varphi$. Różnicę faz pomiędzy sygnałem wychodzącym (sygnałem odniesienia) a sygnałem powracającym zapiszemy więc jako:

$$\Delta\varphi = \varphi_{AN} - \varphi_{AO} = \omega \cdot t + \varphi_o - (\omega \cdot t + \varphi_o - \omega \cdot t_s),$$

stąd:

$$\Delta\varphi = \omega \cdot t_s$$

Na przesunięcie fazowe składa się pewna, całkowita liczba n kątów pełnych 2π, odpowiadających całkowitej długości fali wzorcowej λ_w oraz reszty φ_R, będącej odpowiednikiem niepełnej długości λ_w ($0 \leq \varphi_R < 2\pi$), a więc:

$$\Delta\varphi = \omega \cdot t_s = n \cdot 2\pi + \varphi_R$$

Szukany czas t_s potrzebny do przebycia drogi $2d$ wyniesie zatem:

$$t_s = \frac{n \cdot 2\pi + \varphi_R}{\omega}$$

Biorąc pod uwagę zależność wyrażoną wzorem (5.35) można napisać:

$$\frac{2d}{v} = \frac{n \cdot 2\pi + \varphi_R}{\omega}$$

stąd:

$$d = v \cdot \frac{n \cdot 2\pi + \varphi_R}{2\omega}$$

Do powyższego wzoru można podstawić wzory znane z fizyki: $\omega = 2\pi \cdot f$, gdzie f oznacza częstotliwość fali

oraz
$$\lambda = \frac{v}{f}, \tag{5.39}$$

a stąd:
$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda},$$

co po podstawieniu do wcześniejszej zależności daje:

$$d = \frac{v}{2}(n \cdot 2\pi + \varphi_R) \cdot \frac{\lambda}{2\pi v},$$

zaś po skróceniu:

$$d = \frac{\lambda}{2}\left(n + \frac{\varphi_R}{2\pi}\right) \tag{5.40}$$

Po oznaczeniu : $\frac{\varphi_R}{2\pi} = R$, otrzymamy:

$$d = \frac{\lambda}{2}(n + R) = \frac{v}{2f}(n + R) \tag{5.41}$$

Powyższy wzór ma postać podobną do znanego wzoru na odległość mierzoną bezpośrednio np. za pomocą taśmy. W tym wypadku rolę długości przymiaru spełnia wartość $\frac{1}{2}\lambda$, czyli połowa długości fali wzorcowej, zaś wielkość R stanowi tzw. resztę. Mierzona odległość d składa się z całkowitej liczby n pełnych odłożeń odcinka $\frac{1}{2}\lambda$, który nosi nazwę *przymiaru elektronicznego* i ułamkowej części tego odcinka – R. Wielkość $\frac{1}{2}\lambda \cdot R$ odpowiada niejako końcówce taśmy po dokonaniu ostatniego, pełnego przyłożenia. Z tego powodu niektórzy autorzy podręczników geodezyjnych (np. A. Hermanowski) zaliczają elektromagnetyczny pomiar odległości do pomiarów liniowych bezpośrednich.

Fazomierz F pozwala na określenie wartości φ_R, czyli części ułamkowej kąta pełnego 2π, natomiast nie rejestruje liczby n, stanowiącej ilość pełnych odłożeń odcinka $\frac{1}{2}\lambda$. Ustalenie liczby n, będące rozwiązaniem wieloznaczności pomiaru przesunięcia fazowego, odbywa się poprzez pomiar odległości za pomocą fal pomiarowych o różnych długościach, a tym samym różnych częstotliwościach wzorcowych. Stosuje się zatem kilka przymiarów elektronicznych o różnych długościach $^{\lambda}/_{2}$.

Metodami wyznaczenia liczby n są:

1) skokowa zmiana w szerokich granicach stałych częstotliwości liczonych w układzie dziesiętnym,
2) skokowa zmiana częstotliwości fal w wąskich granicach (metoda różnicowa),
3) ciągła zmiana częstotliwości wzorcowej w pewnym przedziale.

Dla przykładu omówimy metodę 1*, polegającą na wykorzystaniu kilku stałych częstotliwości wzorcowych znacznie różniących się od siebie. Mogą to być częstotliwości tworzące malejący postęp geometryczny o ilorazie 10^{-1}, a więc każda następna częstotliwość jest 10 razy mniejsza od poprzedniej, stąd:

$$f_1 = 1 \cdot f_1 \ ; \ f_2 = 0{,}1 \cdot f_1 \ ; \ f_3 = 0{,}01 \cdot f_1 \ ; \ f_4 = 0{,}001 \cdot f_1 \ ,\ldots\text{itd.}$$

Powyższemu szeregowi częstotliwości odpowiada rosnący postęp geometryczny długości fal pomiarowych λ o ilorazie 10:

$$\lambda_1 = 1 \cdot \lambda_1 \ ; \ \lambda_2 = 10 \cdot \lambda_1 \ ; \ \lambda_3 = 100 \cdot \lambda_1 \ ; \ \lambda_4 = 1000 \cdot \lambda_4 \ ;\ldots\text{itd.},$$

przy czym f_1 jest podstawową częstotliwością wzorcową, zaś pozostałe: $f_2, f_3, f_4, \ldots$ są częstotliwościami pomocniczymi.

Tabela 5.5. Wyznaczenie poszczególnych cyfr mierzonej odległości

Częstotliwość	Długość przymiaru elektronicznego $\frac{1}{2}\lambda$	Odczyt fazomierza						
f_1	$\frac{1}{2}\lambda_1 = 10\ m$					**4**	8	3
f_2	$\frac{1}{2}\lambda_2 = 100\ m$				**5**	4	8	
f_3	$\frac{1}{2}\lambda_3 = 1000\ m$			**9**	5	4		
f_4	$\frac{1}{2}\lambda_4 = 10\ 000\ m$		**3**	9	5			
$n = 395 \ ; \ R = 0{,}483$								

* Szczegółowe omówienie metod wyznaczenia liczby n można znaleźć w podręczniku: A. Płatek; „Elektroniczna technika pomiarowa"; Wydawnictwa AGH; Kraków 1995 r.

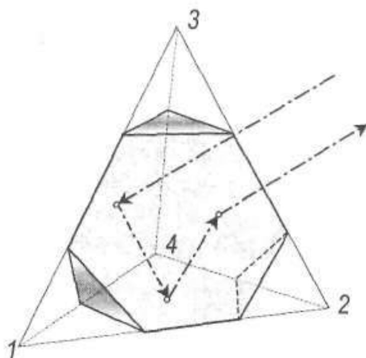
Załóżmy, że mierzona odległość $d = 3\,954{,}83$ m, zaś $\lambda = 20$ m a ponadto, że fazomierz jest wyskalowany w jednostkach długości, którym odpowiadają wartości kątowe przesunięcia fazowego w zakresie od 0 do 2π. Kątowi pełnemu na skali fazomierza odpowiada długość równa $\frac{1}{2}\lambda_1 = 10$ m. Jeśli fazomierz może wskazać 3 cyfry znaczące, wówczas założona długość $d = 3\,954{,}83$ m będzie pomierzona w czterech etapach zestawionych w tabeli 5.5.

Zgodnie z wzorem (5.41) odległość wyniesie: $d = 10\text{ m} \cdot (395 + 0{,}483) = 3\,954{,}83$ m.

Każdy etap pomiaru dostarcza więc części ułamkowej (mniejszej od 1) zastosowanej w nim długości przymiaru elektronicznego $\frac{1}{2}\lambda$. Pierwszy pomiar pozwala na ustalenie trzech cyfr końcowych mierzonej odległości, zaś pomiary następne dostarczają po jednej cyfrze licząc od przodu liczby. W pomiarach: drugim, trzecim i dalszych wykorzystuje się tylko pierwsze cyfry odczytu, zaś następne powtarzają się i mogą być kontrolą wcześniejszych pomiarów.

Opisany sposób wyznaczania długości mierzonego odcinka był przeprowadzany przez obserwatora w starszych dalmierzach np. EOK 2000 (Zeiss Jena), gdzie kolejne odczyty uzyskiwano poprzez ręczną zmianę częstotliwości. W dalmierzach nowoczesnych opisana procedura jest realizowana automatycznie przez mikrokomputer instrumentu, bez udziału obserwatora, zaś otrzymany rezultat jest redukowany do poziomu oraz poprawiany ze względu na odchylenie od pionu osi v, parametry meteorologiczne i inne, a na wyświetlaczu ukazuje się ostateczny rezultat pomiaru, który może być zapisany elektronicznie w wybranym nośniku pamięci.

W geodezji do pomiaru osnów i zdjęć sytuacyjno-wysokościowych są powszechnie stosowane *dalmierze elektrooptyczne*, stanowiące obok stosunkowo rzadko wykorzystywanych dalmierzy interferencyjnych drugi rodzaj dalmierzy świetlnych. Dalmierz elektrooptyczny składa się z instrumentu, zawierającego między innymi: nadajnik, odbiornik i fazomierz oraz reflektora zwrotnego R (rys. 5.21).



Rys. 5.25. Pryzmat czworościenny

Stanowi on element odbijający promienie świetlne lub podczerwień, złożony z co najmniej jednego pryzmatu czworościennego, którego trzy ściany boczne są wzajemnie prostopadłe i posrebrzone, tworząc powierzchnie odbijające. Trzy narożniki czworościanu są ucięte, dzięki czemu zewnętrzna powierzchnia pojedynczego pryzmatu widziana z zewnątrz ma kształt sześcioboku. Zaletą reflektora pryzmatycznego jest to, że nie musi on być dokładnie zorientowany wzdłuż linii pomiaru odległości.

Bieg promienia świetlnego wpadającego do pryzmatu zostaje po trzech odbiciach od ścian lustrzanych przesunięty równolegle i odwrócony o 180° (rys. 5.25). Reflektor składa się z co najmniej jednego pryzmatu. Dla wzmocnienia sygnału powrotnego przy dużych odległościach trzeba stosować zestawy złożone z większej ilości pryzmatów (rys. 5.26).



Rys. 5.26. Reflektory zwrotne jedno- i wielopryzmatowe

Częstotliwość f występująca we wzorach (5.39) i (5.41) nazywana jest *częstotliwością wzorcową*. Jest ona odwrotnie proporcjonalna do długości λ fali wzorcowej i tworzącej sygnał pomiarowy otrzymywany na drodze modulacji fali nośnej. Do tego celu w dalmierzach fazowych stosuje się specjalne generatory częstotliwości wzorcowej (np. kwarcowe), które powinny zapewniać wysoki stopień stabilności generowanej częstotliwości. Jej zmiana w stosunku do wartości nominalnej f_n może wynikać z wpływu temperatury lub starzenia się materiału (kwarcu), z którego wykonany jest generator. Z tego powodu rzeczywista częstotliwość wzorcowa f musi być okresowo kontrolowana (2-3 razy w roku), a jej odchylenie od wartości nominalnej – korygowane.

Różnica $\Delta f = f_n - f$ powinna być wykorzystana do skorygowania pomierzonej odległości d, której poprawka wyraża się wzorem:

$$\Delta d_f = \frac{\Delta f}{f} \cdot d \tag{5.42}$$

Poprawka ta, zwana współczynnikiem skali k_s często podawana jest jednostkowo w mm dla $d = 1$ km, a więc może być wyrażana w ppm:

$$k_s = \frac{\Delta f}{f} \tag{5.43}$$

Jednym ze sposobów komparacji częstotliwości wzorcowej i wyznaczenia poprawki Δd_f jest bezpośrednie porównanie częstotliwości rzeczywistej badanego dalmierza z częstotliwością wytwarzaną przez precyzyjny generator. Sposób ten jest stosowany przez Centralny Urząd Jakości i Miar w Warszawie oraz Instytut Geodezji i Kartografii.

Innym sposobem jest pośrednie wyznaczenie współczynnika skali k_s poprzez pomiar danym dalmierzem bazy komparacyjnej o precyzyjnie określonej, znanej długości $\overline{d}$. Współczynnik k_s wyniesie wówczas:

$$k_s = \frac{\overline{d} - d}{\overline{d}} \frac{[\mathrm{mm}]}{[\mathrm{km}]} \tag{5.44}$$

gdzie: d – długość zmierzona dalmierzem.

ROZDZIAŁ 6: Pomiar osnowy wysokościowej metodą niwelacji geometrycznej

6.1. Sprzęt pomiarowy stosowany do niwelacji klasy I i II

W skład podstawowego sprzętu pomiarowego potrzebnego do wykonania niwelacji osnowy klas I i II wchodzą:

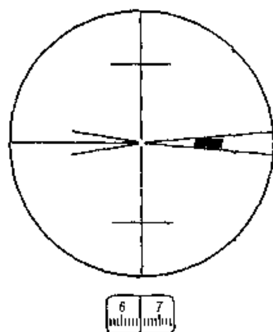
- niwelator precyzyjny ze statywem sztywnym,
- dwie nieskładane, precyzyjne łaty inwarowe o długości 3 m z libelami i pokrowcami,
- komplety stalowych klinów do ustawiania łat na różnych rodzajach podłoży.

Zestaw sprzętu pomocniczego może też zawierać: termometry, podpórki do utrzymywania łat w pionie, żabki lub kliny niwelacyjne do ustawiania łat na twardym podłożu, pion zwykły, młotki do wbijania klinów i przyrząd do ich wyciągania, łopatę, kilof, szpilę do poszukiwania znaków podziemnych.

W zależności od przydatności niwelatora precyzyjnego do pomiaru podstawowej osnowy wysokościowej I lub II klasy, wyróżniamy dwie klasy dokładnościowe niwelatorów precyzyjnych, uwarunkowane osiąganą wartością średniego błędu $m_{\Delta H}$ podwójnej niwelacji na odcinku 1 km. Dla niwelatorów I klasy musi być spełniony warunek:

$m_{\Delta H} \leq 0{,}5$ mm, zaś dla niwelatorów II klasy: $0{,}5 \text{ mm} < m_{\Delta H} \leq 2{,}0$ mm.

6.1.1. Niwelatory optyczne



Rys. 6.1. Siatka celownicza i odczyt mikrometru

Niwelatory stosowane do pomiaru osnowy wysokościowej najwyższych klas muszą zapewniać dokładność niwelacji wyrażoną błędem średnim po wyrównaniu sieci, który dla niwelacji kl. I nie może być większy niż ±1mm/km i ±2mm/km dla niwelacji kl. II. Dokładność tego rzędu może zapewnić tylko technologia geometrycznej niwelacji precyzyjnej, wykonywanej przy użyciu dokładnych niwelatorów optycznych lub elektronicznych (cyfrowych). W przypadku zastosowania do pomiaru sieci niwelacyjnych klasy I i II instrumentów optycznych należy używać niwelatorów precyzyjnych o powiększeniu lunety ponad 40× dla klasy I oraz przynajmniej 30× – dla klasy II. Błąd poziomowania osi celowej niwelatora za pomocą libeli niwelacyjnej lub kompensatora nie może być większy niż ±0,2", co w przypadku niwelatora libelowego może zapewnić libela o przewadze ω nie większej niż 10".

Niezbędnym wyposażeniem tego rodzaju instrumentów jest mikrometr optyczny, umożliwiający wykonanie odczytu na łacie z błędem średnim poniżej ±0,05 mm. Dzięki temu urządzeniu końcówki odczytu nie szacuje się tak jak w niwelatorach technicznych, lecz odczytuje z podziałki mikrometru (rys. 6.1). Podstawowym elementem mikrometru jest umieszczona przed obiektywem lunety płytka płasko-równoległa, której obrót za pomocą śruby mikrometrycznej powoduje przesuwanie się obrazu widzianego przez obserwatora w lunecie. Całkowita liniowa wielkość przesunięcia jest równa jednej działce po-

działu łaty, a więc w zależności od zastosowanego podziału, 5 mm lub 10 mm. Opis cyfrowy mikrometru jest tak dobrany, aby przy maksymalnym wychyleniu płytki równoległościennej do przodu odczyt zerowy odpowiadał najbardziej obniżonej celowej. Odczyt 50 występuje wtedy, gdy płytka jest ustawiona prostopadle do osi celowej, zaś odczyt 100 odpowiada celowej najwyżej podniesionej i jednocześnie położeniu płytki wychylonej skrajnie do tyłu. Taki sposób opisu podziałki mikrometru umożliwia wyłączne dodawanie (dopisywanie) jego odczytów do odczytów z łaty. Z mikrometru odczytuje się z reguły trzy cyfry, przy czym ostatnia z nich pochodzi z szacowania ułamkowej części działki. łączny odczyt z łaty i mikrometru zawiera więc 6 cyfr (rys. 6.2), zaś dokładność odczytu jest równa 0,001 cm (dla zakresu mikrometru 1 cm) lub $\frac{1}{2} \cdot 0{,}001$ cm (dla zakresu 0,5 cm).

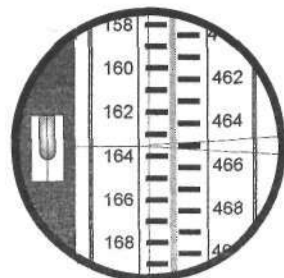
Rysunek siatki celowniczej lunety niwelatora precyzyjnego oprócz typowej kreski poziomej musi zawierać kreskę poprzeczną, klinowato rozwidloną, umożliwiającą symetryczny lub bisekcyjny sposób wykonania odczytu na łacie. Poprzez obrót śruby mikrometru, nie zmieniający ustawienia samej lunety, obraz pojedynczej, prostokątnej kreski podziałowej o szerokości ok. 1,5 mm zostaje przed odczytem wprowadzony w środek pola znajdującego się wewnątrz rozwidlenia (rys. 6.1). Odczyt z mikrometru wykonuje się za pomocą lupy z podziałki naniesionej na bębenku tej śruby lub na oddzielnej skali, często przeniesionej optycznie w pole widzenia lunety. Łączny odczyt (rys. 6.2) otrzymujemy w wyniku uzupełnienia końcówką uzyskaną z mikrometru odczytu tej działki łaty, której obraz znajduje się w środku pola rozwidlonej kreski siatki celowniczej.

Podczas pomiaru niwelator ustawiany jest na nieskładanym (sztywnym) statywie, którego rozmiary powinny umożliwiać umieszczenie przyrządu na wysokości wynoszącej przynajmniej 1,5 m nad powierzchnią terenu.

Sprzęt techniczny przeznaczony do niwelacji powinien być sprawdzony i w razie potrzeby zrektyfikowany, zaś niwelator, w tym także egzemplarz fabrycznie nowy, musi być przed sezonem pomiarowym poddany atestacji według ustalonego programu badań laboratoryjnych, otrzymując kwalifikację do pomiarów dla określonej klasy niwelacji. Wyniki tych badań zapisuje się w metryce instrumentu. Niezależnie od kontroli sprzętu przeprowadzonej przed wyjazdem w teren, podczas pomiarów polowych należy dokonywać jego okresowego sprawdzania w okresach przynajmniej dwutygodniowych.

Sprawdzenie i ewentualna rektyfikacja wykrytych błędów dotyczy przede wszystkim poznanych wcześniej warunków znanych także dla niwelatorów technicznych: $n_1 \perp v$, $Q \perp v$, $l \parallel c$ (lub ich odpowiedników w niwelatorach samopoziomujących). Należy również często kontrolować czystość optyki, poprawne działanie mechanizmów niwelatora i statywu np. śrub poziomujących, ogniskowania lunety, zaciskowych, leniwek, mikrometru itp.

Do niwelacji precyzyjnej mogą być wykorzystywane starsze, lecz solidne i nieraz będące do dziś w doskonałym stanie technicznym egzemplarze niwelatorów optycznych takie jak: libelowy Ni 004 i samopoziomujący Ni 007 zakładów Zeiss Jena z byłej NRD. W późniejszym okresie działania tej wytwórni produkowane były także inne modele precyzyjnych niwelato-



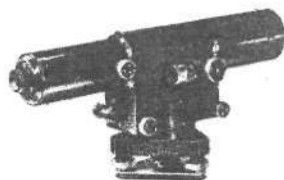


Odczyt: 465473

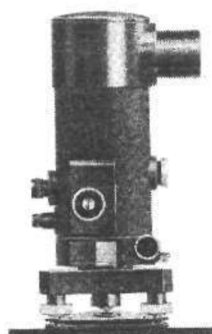
Rys. 6.2. Odczyt w niwelacji precyzyjnej

rów samopoziomujących: Ni 002 oraz Ni 005. Szwajcarska firma Wild również dostarczała do Polski kilka typów niwelatorów precyzyjnych i półprecyzyjnych, z których największą popularnością cieszył się instrument Wild N3. Znane i stosowane były też przyrządy firmy Zeiss Opton z Oberkochen (RFN), a szczególnie typy: Ni 1, Ni 2.

Libelowy **niwelator Ni 004** (rys. 6.3) z zakładów Zeiss Jena posiada lunetę o powiększeniu 44×, czynnej średnicy obiektywu 55 mm i ogniskowej 411 mm. Parametry te powodują znaczne zwiększenie długości lunety, lecz jednocześnie zapewnia to pożądaną w niwelacji precyzyjnej stabilność położenia osi celowej.


Rys. 6.3. Niwelator Ni 004 Zeiss Jena

Przewaga libeli niwelacyjnej tego instrumentu wynosi 10″. Ampułka libeli posiada podziałkę z opisem, umożliwiającym pomiar małych kątów nachylenia osi celowej w granicach ±50″, przydatnym podczas przekraczania z niwelacją przeszkód wodnych. Obraz tzw. *libeli koincydencyjnej* jest przeniesiony optycznie w pole widzenia lunety, co usprawnia stałe kontrolowanie poziomu osi celowej podczas wykonania odczytu. Z mikrometru o zakresie 0-5 mm otrzymuje się końcówkę odczytu z podziałki na bębenku powiększonej przez lupę. Zgodnie z oznaczeniem opisywanego modelu średni błąd podwójnej niwelacji niwelatorem Ni 004 wynosi 0,4 mm/km.


Rys. 6.4. Niwelator Ni 007 Zeiss Jena

Samopoziomujący **niwelator Ni 007** (rys. 6.4) wytwórni Zeiss Jena* w b. NRD, jest wyposażony w peryskopową lunetę o powiększeniu 31,5× i średnicy obiektywu 40 mm, dającą obraz prosty. Instrument posiada szklany, poziomy krąg podziałowy z indeksowym mikroskopem odczytowym. Rolę płytki płasko-równoległej mikrometru o zakresie 5 mm spełnia obracalny pryzmat pentagonalny, realizujący wraz z umieszczonym niżej pryzmatem prostokątnym zadanie peryskopowego przesunięcia w pionie osi optycznej obiektywu względem okularu o odcinek 14 cm. Po zablokowaniu bębenka mikrometru za pomocą śruby umieszczonej w środku pokrętki w połowie jego zakresu instrument Ni 007 może być wykorzystany w charakterze samopoziomującego niwelatora technicznego. Kompensator wahadłowy o długości wahadła $l = \frac{1}{2} f$ posiada zakres ±8′ i dokładność poziomowania osi celowej ±0,15″. Przy wykorzystaniu techniki niwelacji precyzyjnej, czyli łat inwarowych i odczytu na mikrometrze, dokładność podwójnej niwelacji tym instrumentem wynosi ±0,7 mm/km. Parametry techniczne niwelatora Ni 007 kwalifikują go do grupy niwelatorów półprecyzyjnych, przydatnych do wykonywania niwelacji klasy II i klas niższych. Do grupy tej można również zaliczyć dokładniejsze niwelatory techniczne, wyposażane fabrycznie w rozwidloną kreskę siatki celowniczej i nasadkowy mikrometr, którego element optyczny – ruchoma płytka płasko-równoległa w razie potrzeby może być zakładana na lunetę przed jej obiektywem.

* Symbolika warunków, opis ich sprawdzenia i rektyfikacji został zamieszczony w podręczniku „*Geodezja I*". Zamieszczono tam również opis kompensatora niwelatora Zeiss Ni 007.



Rys. 6.5. Niwelator Ni 002 Zeissa

Precyzyjny, samopoziomujący **niwelator Ni 002** Zeissa (rys. 6.5), zapewniający dokładność niwelacji 0,2 mm/km, został wyposażony w lunetę o powiększeniu 40× i czynnej średnicy obiektywu 55 mm. Kompensator tego instrumentu działa po spoziomowaniu libeli okrągłej o przewadze 8'/2 mm w przedziale wychyleń ±10', poziomując oś celową z dokładnością około 0,5". Standardowy mikrometr Ni 002 posiada zakres 0-5 mm, przy czym wytwórnia Zeiss wyposażała te niwelatory także w mikrometry o zakresie 10 mm i $^{1}/_{50}$ cala.

Libelowy **niwelator N3** Wilda (rys. 6.6) posiada lunetę o powiększeniu 42× z obiektywem o średnicy czynnej 50 mm, co zapewnia dobrą jasność obrazu. Zakres działania mikrometru wynosi 0-10 mm. Libela niwelacyjna obserwowana jest w postaci koincydencyjnej przez lupę. Przez inną lupę umieszczoną w pobliżu poprzedniej można obserwować podział mikrometru. Średni błąd podwójnej niwelacji niwelatorem N3 wynosi 0,25 mm/km. Dodatkowe udogodnienia niwelatora N3 stanowią:

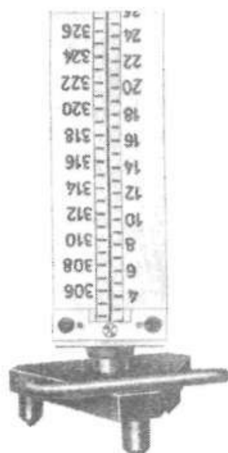


Rys. 6.6. Niwelator N3 Wilda

- możliwość regulacji długości pęcherzyka libeli niwelacyjnej,
- podziałka na śrubie elewacyjnej wyrażona w promilach (‰), pozwalająca na pomiar nachyleń osi celowej lunety,
- zakrycie obiektywu klinowatą, obracalną płytką dzięki której można łatwo usuwać błąd nierównoległości osi: *l*, *c*.

6.1.2. Łaty do niwelacji precyzyjnej i ich wyposażenie

Do niwelacji precyzyjnej najczęściej stosowane są inwarowe łaty sztywne o długości 3 m, natomiast w terenach górzystych mogą być wykorzystywane także łaty czterometrowe. Łata precyzyjna posiada drewniany lub metalowy korpus (ramę), wewnątrz którego rozpięta jest taśma inwarowa z naniesionym podziałem. Dolny koniec tej taśmy umocowany jest na zaczepie, zaś drugi, górny – na mocnej sprężynie, zapewniającej taśmie stały naciąg z siłą 20 kG. Obydwa elementy są połączone ze stalowymi okuciami łaty, spośród których okucie dolne tworzy stopkę łaty. Stopka jest dobrze zahartowana i dokładnie oszlifowana w celu zapewnienia stałości zera podziału i prostopadłości płaszczyzny stopki do osi łaty.



Rys. 6.7. Łata Wilda na żabce niwelacyjnej

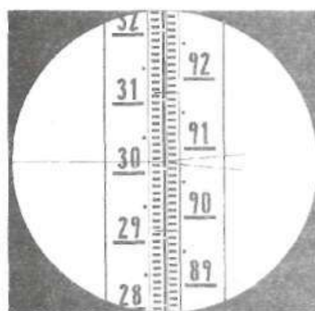
Niezbędne wyposażenie łaty precyzyjnej stanowi libela okrągła o przewadze ok. 20'. Łaty wyposażone są w uchwyty do ręcznego podtrzymywania, zaś dla zabezpieczenia stałości ustawienia pionowego stosuje się także specjalne podpórki. Łaty ustawiane są na klinach wbijanych do gruntu lub żabkach o masie 3 –7 kg. Do stopki łaty przymocowywany jest stalowy pierścień dostosowany do kształtu zaokrąglonych trzpieni żabek lub kli-

nów, zabezpieczający każdorazowe, jednakowe ustawianie łaty na trzpieniu. Pierścień ten zdejmuje się przed postawieniem łaty na reperze. Na łatach do niwelacji precyzyjnej stosowane są różne rodzaje podziałek i opisów, przy czym w Polsce najczęściej wykorzystywane są łaty firm: Wild i Zeiss.

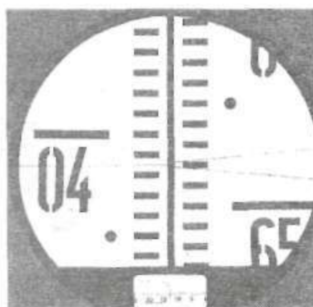
Na taśmie inwarowej łat Wilda (rys. 6.7) naniesione są dwa przesunięte względem siebie centymetrowe podziały: prawy i lewy (dla mikrometru o zakresie 0÷10 mm), ocyfrowane co drugą, parzystą kreskę centymetrową. Podział lewy posiada opis 0÷300, zaś prawy 302÷602. Wielkość wzajemnego przesunięcia obu podziałów wynosi 1,5 cm. Podwójny podział łat ułatwia na pojedynczym stanowisku niwelatora dwukrotny pomiar różnicy wysokości oraz kontrolowanie jego poprawności.

Łaty inwarowe firmy Zeiss (rys. 6.8, 6.9) mają dwa półcentymetrowe podziały, biegnące równolegle, dostosowane do mikrometru, którego zakres wynosi 0-50 mm. Podziały przesunięte względem siebie o ¼ cm posiadają opisy: prawy od 0 do 59 i lewy od 60 do 119. W użyciu są również łaty precyzyjne Zeissa z podziałem pojedynczym.

Do niwelacji klasy I i II łaty inwarowe powinny być wyposażone w podwójny podział i libele okrągłe o przewadze nie większej niż 20'. Przed i po sezonie pomiarowym łaty powinny być sprawdzane w celu określenia współczynnika rozszerzalności liniowej, wyznaczenia poprawki komparacyjnej średniego metra łaty z błędem, który nie powinien przekroczyć wartości ±0,015 mm/m. Wyniki tych badań stanowią podstawę kwalifikacji łat do odpowiedniej klasy.



Rys. 6.8. Odczyt (908) na łacie Zeissa w niwelatorze Ni 007



Rys. 6.9. Odczyt (652) na łacie w niwelatorze Ni 004

6.1.3. Niwelatory cyfrowe

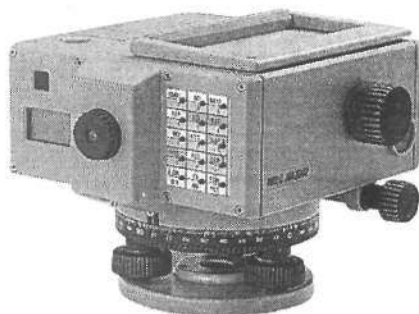
Niwelatory cyfrowe stanowią najnowsze osiągnięcie technologiczno-konstrukcyjne w zakresie budowy instrumentów do niwelacji geometrycznej. Instrumenty te są obecnie produkowane przez wielkie wytwórnie sprzętu geodezyjnego takie jak: Zeiss, Leica, Topcon, Sokkia. Niezbędnym wyposażeniem niwelatora cyfrowego jest komplet łat z podziałem kodowym w postaci kodu kreskowego (rys. 6.10). Po przybliżonym spoziomowaniu niwelatora za pomocą libeli okrągłej, wycelowaniu i ustawieniu ostrości obrazu, wbudowane w instrument sensory elektryczne dokonują na łacie kodowej automatycznego odczytu położenia osi celowej doprowadzonej do poziomu przez kompensator oraz odczytu długości celowej (z dokładnością do 1–5 cm). Odczyt z łaty i wynik pomiaru odległości mogą być pokazane na wyświetlaczu oraz rejestrowane w pamięci wewnętrznej, wbudowanej w instrument lub w pamięci zewnętrznego urządzenia rejestrującego. Standardowy

port, w który wyposażony jest niwelator cyfrowy umożliwia jego komunikację z komputerami i urządzeniami peryferyjnymi (np. rejestratorami zewnętrznymi). Rejestracji mogą podlegać nie tylko odczyty, lecz także nazwy (numery) obiektów, stanowisk i pikiet. Wbudowane oprogramowanie umożliwia realizację typowych obliczeń związanych z pomiarami wysokościowymi np. ciągów niwelacyjnych, danych do tyczenia punktów o zadanej wysokości, wysokości punktów pośrednich (w oparciu o odczyty w bok), uśredniania wielokrotnych pomiarów, automatycznego wprowadzania niektórych poprawek, wyświetlania różnic wysokości pomiędzy punktami: wstecz i w przód itp.

Do wykonania odczytu wystarcza ok. piętnastocentymetrowy fragment łaty kodowej. Niwelatory elektroniczne (cyfrowe) dzięki typowej optyce mogą również działać tak jak standardowe niwelatory samopoziomujące, umożliwiając wykonanie klasycznej niwelacji za pomocą zwykłych podziałów naniesionych na drugiej stronie łat kodowych.

Stwierdzono, że zastosowanie niwelatorów elektronicznych przyspiesza pomiary wysokościowe o 50% w stosunku do czasu pracy niwelatorami optycznymi, a ponadto eliminuje możliwość pomyłki w odczytach i ich zapisie. Oprogramowanie niwelatorów cyfrowych umożliwia bieżącą kontrolę poprawności i dokładności wykonywanych obserwacji, wyznaczanie odkształceń i przemieszczeń, tyczenie wysokościowe tras i budowli.

Na rynku polskim dość popularne są obecnie dwa typy **niwelatorów cyfrowych firmy Leica** (dawniej Wild): techniczny *NA 2002* (rys. 6.10) i precyzyjny *NA 3003*, którego produkcję rozpoczęto pod koniec roku 1995, natomiast w użyciu są też wcześniejsze wersje tego instrumentu: *NA 2000* i *NA 3000*.



Rys. 6.10. Niwelator cyfrowy Leica 2002 i fragment technicznej łaty kodowej



Rys. 6.11. Niwelator cyfrowy DiNi 22

Dokładność *NA 3003* wynosi 0,4 mm/km, zaś jego zasięg pomiarowy mieści się w przedziale: od 1,8 m do 100 m. Wyposażenie niwelatora stanowi komplet łat sztywnych, inwarowych o długości 3 m do niwelacji precyzyjnej lub łat składanych 4 m do niwelacji technicznej. Łaty te posiadają na jednej stronie kod paskowy, zaś na drugiej stronie klasyczny podział centymetrowy do odczytów optycznych. Kod paskowy jest kodem dwójkowym (binarnym) złożonym z 2000 białych i czarnych elementów podstawowych o szerokości 2,025 mm. Obraz kodu kreskowego jest przekazywany do detektora, który za pomocą fotodiod analizuje przekazany przez układ optyczny obraz odcinka łaty i porównuje go z wzorcem zapisanym w pamięci, po czym w ciągu ok. 4 sekund podaje

wartość cyfrową odczytu na wyświetlaczu. Instrument obsługiwany jest za pomocą klawiatury złożonej z kilkunastu przycisków.

Tabela 6.1. Niektóre dane techniczne niwelatorów cyfrowych Leica

Typ niwelatora		NA 2002	NA 3003	DNA 10	DNA 03
Zastosowanie		*niwel. techniczna*	*niwel. precyzyjna*	*niwel. techniczna*	*niwel. precyzyjna*
Dokładność niwelacji na 1 km (łata kodowa)		*łaty techn. ±1.5 mm*	*łaty techn. ±1.2 mm*	*łaty techn. ±1.5 mm*	*łaty techn. ±1.0 mm*
		łaty precyz. ±0.9 mm	*łaty precyz. ±0.4 mm*	*łaty precyz. ±0.9 mm*	*łaty precyz. ±0.3 mm*
Powiększenie lunety		24×	24×	24×	24×
Dokł. pomiaru odległ.		*3-5 mm/10 m*	*3-5 mm/10 m*	*10mm/20 m*	*10 mm/20 m*
Zasięg pomiaru	*łaty techn.*	*1,8 – 100 m*	*1,8 – 100 m*	*0,6 – 100 m*	*0,6 – 100 m*
	łaty precyz.	*1,8 m – 60 m*	*1,8 – 60 m*	*0,6 – 60 m*	*0,6 – 60 m*
Kompensator		*10'/0,4''*	*10'/0,8''*	*10'/0,3''*	*10'/0,8''*
Masa instrumentu		*2,5 kg*	*2,5 kg*	*2,8 kg*	*2,8 kg*

Nową generację niwelatorów cyfrowych firmy Leica stanowią dwa modele o nowoczesnej, ergonomicznej obudowie: precyzyjny DNA 03 (rys. 6.12) i techniczny DNA 10. Ich cechą jest duży i bardzo czytelny wyświetlacz, klawiatura alfanumeryczna, bogate oprogramowanie, nowoczesna elektronika, optyka i układ mechaniczny. Zapis danych może następować w pamięci wewnętrznej, na karcie wymiennej PCMCIA oraz w rejestratorze zewnętrznym podłączonym do złącza RS 232. Po włączeniu odpowiedniej funkcji instrumenty automatycznie wprowadzają do obserwacji poprawkę na krzywiznę Ziemi, a ponadto uwzględniane są inne poprawki takie jak np. korekcja błędu nachylenia osi celowej. Błąd ten można zmierzyć lub wprowadzić ręcznie.



Rys. 6.12. Niwelator cyfrowy DNA 03/10 Leica

Niwelatory DNA posiadają dodatkowo funkcje wyznaczania wartości średniej i mediany z wielu pomiarów, wyświetlanie odchylenia standardowego, pomiaru pojedynczego repetycyjnego i inne. Do przetwarzania i transmisji zebranych danych służy dołączony do instrumentu program *Leica Survey Office*, przy pomocy którego można dokonać wymiany danych, konfiguracji instrumentu, utworzyć kody i listy tyczenia wysokościowego. Istnieje także możliwość tworzenia własnych formatów wyjściowych i łatwego dostosowania ich do innych programów. Program *Levelpak pro* do profesjonalnej obróbki danych z niwelatorów DNA zawiera funkcje ułatwiające dostosowanie obliczeń do specyfiki pomiarów. Posiada ponadto większość podstawowych funkcji obliczeniowych takich jak: obliczanie ciągu niwelacyjnego, wyrównywanie ciągów niwelacyjnych wraz z tworzeniem raportów i przedstawianiem wyliczeń. Program umożliwia też składowanie i administrowanie danych w bazie danych.

Niwelatory cyfrowe Zeissa: DiNi 10 – precyzyjny (rys. 6.11), DiNi 20 – techniczny, posiadają parametry techniczne zbliżone do podanych wcześniej dla niwelatorów firmy Leica. Producent niwelatorów DiNi– firma Zeiss podaje następujące cechy i zalety tych instrumentów:

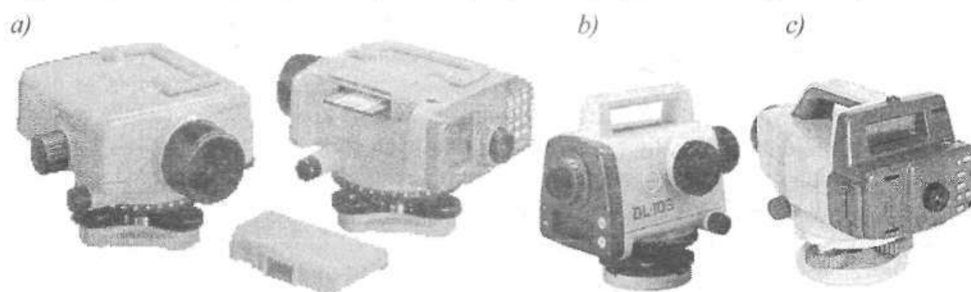
Niwelatory cyfrowe Zeissa: DiNi 10 – precyzyjny (rys. 6.11), DiNi 20 – techniczny, posiadają parametry techniczne zbliżone do podanych wcześniej dla niwelatorów firmy Leica. Producent niwelatorów DiNi– firma Zeiss podaje następujące cechy i zalety tych instrumentów:

- elektroniczny pomiar różnicy wysokości i odległości wraz z automatycznym obliczeniem wysokości w ciągu 4 sekund,
- prosta obsługa dzięki wyświetlaniu instrukcji dla użytkownika oraz wykorzystaniu 5 klawiszy programowych z rozwijalnym menu,
- stała kontrola czynności użytkownika i poziomowania instrumentu wraz z sygnalizacją ostrzeżeń i błędów,
- wykonywanie pomiarów pojedynczych i wielokrotnych, obliczanie wysokości, tyczenie wysokościowe,
- automatyczna rejestracja danych w wymiennym układzie pamięci.

Tabela 6.2. Niektóre dane techniczne niwelatorów cyfrowych Zeissa

Typ niwelatora	DiNi 10(11), (12)	DiNi 20(21), (22)
Dokładność niwelacji na 1 km	*niw. techn. ±1.5 mm* *niw. precyz. ±0.3 mm*	*niw. techn. ±2.0 mm* *niw. precyz. ±0.7 mm*
Powiększenie lunety	*32×*	*26×*
Dokładność pomiaru odległ.	*20 mm*	*25 mm*
Zasięg pomiaru	*łaty techn. 1,5 – 100 m* *łaty precyz. 1,5 m – 100 m*	*łaty techn. 1,5 – 100 m* *łaty precyz. 1,5 – 100 m*
Kompensator	*15'/0,2"*	*15'/0,5"*
Masa instrumentu	*3,5 kg*	*3,2 kg*

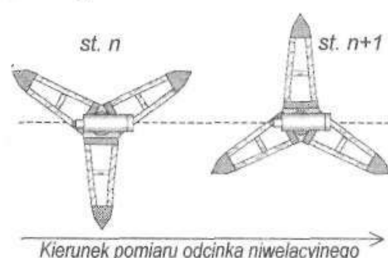
Firma Sokkia produkuje jeden typ technicznego niwelatora cyfrowego o symbolu SDL30, zaś firma Topcon trzy typy: precyzyjny DL101, półprecyzyjny DL102 i techniczny DL103. Szczegółowe zestawienie danych technicznych niwelatorów cyfrowych i innych instrumentów geodezyjnych można znaleźć w prospektach firmowych, zestawieniach publikowanych w czasopiśmie „Geodeta" i firmowych stronach internetowych polskich (np. http://geomatix.com.pl, http://www.topcon.com.pl, http://www.geo.pl) i wielu zagranicznych.



Rys. 6.13. Japońskie niwelatory cyfrowe: *a)* Topcon DL 101, 102; *b)* DL 103; *c)* Sokkia SDL 30

6.2. Niwelacja sieci osnowy podstawowej

Pomiary sieci niwelacyjnych klas I, II wykonuje się w kierunku głównym i powrotnym wzdłuż odcinków niwelacyjnych łączących dwa sąsiednie repery. Każdy odcinek powinien składać się z parzystej liczby stanowisk, dzięki czemu ta sama łata oznaczona numerem 1, ustawiona jako łata wstecz na reperze początkowym, będzie zarazem łatą w przód na reperze końcowym. Przy pomiarze różnicy wysokości odcinka w kierunku powrotnym należy rozpocząć pomiar od drugiej łaty (nr 2), dokonując go w innym dniu oraz o innej jego porze niż pomiar w kierunku głównym. Pomiar odcinka w jednym kierunku należy jednak prowadzić bez przerwy. Na każdym stanowisku wyznacza się dwukrotnie różnicę wysokości pomiędzy punktami wiążącymi przy wykorzystaniu obu podziałów łat. Nie stosuje się przy tym zmiany pozycji niwelatora dla przesunięcia w pionie osi celowej.



Rys. 6.14. Przemienne ustawianie statywu na kolejnych stanowiskach

Ustawienie statywu dokonane na twardym podłożu ma zapewnić bieg celowej na wysokości ok. 1,5 m ponad powierzchnią terenu płaskiego, natomiast w terenie falistym odległość ta nie może być mniejsza niż 0,8 m. Ze względu na refrakcję i wibrację celowa nie powinna przebiegać nad obiektami intensywnie wydzielającymi ciepło (np. asfalt) lub parę wodną. Położenie statywu na kolejnych stanowiskach powinno być przemienne (rys. 6.14) tzn. na każdym kolejnym stanowisku trzeba obrócić statyw o 180°. Należy także dokonać pomiaru długości celowych, przy czym ich różnica dla łaty wstecz i w przód nie może przekraczać: 0,4 m dla niwelacji klasy I oraz 0,5 m dla niwelacji klasy II.

Pomiar niwelacyjny należy wykonywać w godzinach rannych pół godziny po wschodzie słońca i w godzinach popołudniowych, kończąc pracę na pół godziny przed zachodem słońca. Jesienią przy zachmurzonym niebie można nie przerywać pracy w godzinach okołopołudniowych, lecz mierzyć przez cały dzień. Warunki atmosferyczne pomiaru powinny być korzystne, bez występowania wibracji, zapewniające dobrą i jednakową widoczność łat. Pomiar wykonuje się przy temperaturze mieszczącej się w zakresie od 0° do+25°C, podczas bezwietrznej pogody lub przy słabym wietrze (poniżej 6 m/sek.). Kliny niwelacyjne dostosowane długością do rodzaju podłoża wbija się na co najmniej 5 minut przed wykonaniem odczytów na łatach. Celowe do reperów ściennych powinny przebiegać prostopadle do ściany. Na pierwszym, a następnie na co czwartym stanowisku, należy wykonać pomiar temperatury powietrza, zaś zalecany jest także pomiar temperatury taśm inwarowych łat. Trzeba także notować czas rozpoczęcia i zakończenia pomiaru odcinka oraz czas ewentualnych przerw w jego pomiarze. Najważniejsze wymogi związane z pomiarem metodą niwelacji precyzyjnej zestawiono w tabeli 6.3.

W skład zespołu wykonującego niwelację precyzyjną wchodzą: kierownik zespołu, pełniący również funkcję obserwatora, protokolant i 2 – 4 pomiarowych. Po ustaleniu położenia stanowiska niwelatora i ustawieniu na nim instrumentu oraz wbiciu klinów dla łaty w przód i łaty wstecz, przy jednoczesnym zapewnieniu równych długości celowych, można przystąpić do wykonywania odczytów. Przed odczytami trzeba spoziomować niwelator przy użyciu libeli okrągłej, wycelować na odpowiednią łatę, nastawić ostrość i za pomocą leniwki naprowadzić kreskę pionową na łatę, zaś śrubą mikrometryczną wprowa-

dzić obraz kreski podziału łaty na środek rozwidlenia kreski poprzecznej. Potem należy odczytać i zanotować trzy pierwsze cyfry z łaty i kolejne cyfry z podziałki mikrometru.

Tabela 6.3. Wymagania związane z pomiarem sieci niwelacji klas I, II

Wymagania		Klasa I		Klasa II	
Zalecane długości celowych		8 – 35 m		8 – 40 m	
Różnica celowych na stanowisku		±0,4 m		±0,5 m	
Różnica s między teoretyczną i obserwowaną stałą łaty dla celowych		≤20 m	0,12 mm	≤20 m	0,14 mm
		>20 m	0,16 mm	>20 m	0,20 mm
Różnica n pomiędzy I i II pomiarem różnicy wysokości na stanowisku dla celowych		≤20 m	0,16 mm	≤20 m	0,18 mm
		>20 m	0,20 mm	>20 m	0,24 mm
Różnica ρ wyników pomiaru różnicy wysokości odcinka tam i z powrotem		$\leq 1{,}2\sqrt{R}$ mm		$\leq 1{,}5\sqrt{R}$ mm	
Suma różnic wysokości $\lambda=[\rho]$ dla linii niwelacyjnej w kierunku tam i z powrotem		$\leq 2{,}25\sqrt{L}$ mm		$\leq 3{,}00\sqrt{L}$ mm	
Odchyłka zamknięcia φ poligonu niwelacyjnego	z pomiaru	$\leq 2\sqrt{F}$ mm		$\leq 2\sqrt{F}$ mm	
	rozwarty			$\leq 3\sqrt{F}$ mm	

Oznaczenia:

s – stała łaty, czyli wartość przesunięcia odczytów z podziału kontrolnego i podziału głównego znajdujących się na tym samym poziomie,

R – długość odcinka niwelacji w km,

L – długość linii niwelacyjnej w km,

F – długość poligonu niwelacyjnego w km.

Odczyty i dane związane z pomiarem notujemy w dzienniku polowym, którego wzór przedstawia tabela 6.4.

Kolejność czynności związanych z odczytywaniem łat: wstecz i w przód na pojedynczym stanowisku niwelatora jest przy tym następująca:

A) Na stanowisku nieparzystym:
1. odczyt wstecz t_z na podziale zasadniczym,
2. odczyt w przód p_z na podziale zasadniczym,
3. odczyt w przód p_k na podziale kontrolnym,
4. odczyt wstecz t_k na podziale kontrolnym.

B) Na stanowisku parzystym:
1. odczyt w przód p_z na podziale zasadniczym,
2. odczyt wstecz t_z na podziale zasadniczym,
3. odczyt wstecz t_k na podziale kontrolnym,
4. odczyt w przód p_k na podziale kontrolnym.

Podczas niwelacji instrumentami samopoziomującymi można także stosować uproszczone postępowanie polegające na wykonaniu najpierw obu odczytów wstecz: t_z, t_k, a następnie pary odczytów w przód: p_k, p_z.

Kontrolą pomiaru na pojedynczym stanowisku jest sprawdzenie:

- zgodności różnic s_p obliczonych jako: $t_k - t_z$ oraz $p_k - p_z$ z wartością teoretyczną s_t przesunięcia względem siebie podziałów łaty,
- zgodności dwukrotnego pomiaru różnic wysokości n obliczonych jako: $t_z - p_z$; $t_k - p_k$..

Tabela 6.4. Dziennik pomiarowy niwelacji precyzyjnej

Str. 25

Odcinek nr 5					Od punktu BKV b. cechy do punktu BKVa AW 5094		Kierunek główny	Data pomiaru 21.10.2001 Godz. rozp. 14^{00} zak. 14^{45}	
Nr stan.	Stan. łaty		Kreski dalm. wstecz	Kreski dalm. w przód	Podział zasadniczy	Podział kontrolny	s_t / s_p / $h_z - h_k$	$[h_z - h_k]$	Uwagi, temperatura
	Rp	g	1652	4995	t_z 145082	t_k 751768			
1	K	d	1251	4595	p_z 479508	p_k 1086220			t_1 = +3°
		l	40,1	40,0	h_z × 665574	h_k × 665548	+ 026	+ 026	T = +3°
	K	g	1982	5357	t_z 164408	t_k 771240			t_2 = +3°
2	K	d	1306	4683	p_z 502030	p_k 1108850			Zachmurzenie całkowite, lekki wiatr, ruch średni.
		l	67,6	67,4	h_z × 662378	h_k × 662390	- 012	+ 014	
	K	g			t_z 188870	t_k 795548			
3	K	d		135,0	p_z 412412	p_k 1019100			
		l			h_z × 776458	h_k × 776448	+ 010	+ 024	
	K	g			t_z 198068	t_k 804742			
4	K	d		135,0	p_z 404050	p_k 1010686			
		l			h_z × 794018	h_k × 794056	- 038	- 014	
	K	g			t_z 204620	t_k 811290			
5	K	d		135,0	p_z 425170	p_k 1031823			
		l			h_z × 779450	h_k × 779462	- 012	- 026	
	K	g	1754	3248	t_z 160250	t_k 766918			t_1 = +3°
6	Rp	d	1450	2945	p_z 309638	p_k 916280			T = +3°
		l	30,4	30,3	h_z × 850612	h_k × 850638	- 026	- 052	t_2 = +2°
		g			t_z	t_k			
		d			p_z	p_k			
		l			h_z	h_k			
			0,6808		1061298	4701506			$T_{śr}$ = +3°
					2532808	6172964			$t_{śr}$ = +2,8°
Sumy:			0,34 km		× 8528490	× 8528542	- 052		
					$h_{śr}$ × 8528516	$h_{śr}$ w mm	× 264258		

Po zakończeniu pomiaru odcinka należy obliczyć:

1. różnice wysokości pomiędzy reperami wyznaczającymi odcinek z odczytów podziału zasadniczego i kontrolnego:
$$\Sigma h_z = \Sigma t_z - \Sigma p_z \text{ oraz } \Sigma h_k = \Sigma t_k - \Sigma p_k$$
2. Obliczyć sumę różnic wysokości $[n]$.
3. Sprawdzić spełnienie równania: $\Sigma h_z - \Sigma h_k = [n]$.
4. Obliczyć średnią różnicę wysokości odcinka: $h = \frac{1}{2}(\Sigma h_z + \Sigma h_k)$.
5. Obliczyć średnią długość R odcinka jako średnia z sum długości celowych z kierunku głównego i powrotnego.

6. Rozbieżność różnic wysokości reperów krańcowych odcinka ρ z pomiarów w kierunku głównym i powrotnym: $\rho = h_{gł} - h_{powr}$.
7. Średnią różnicę wysokości odcinka: $h = \frac{1}{2}(h_{gł} + h_{powr})$.

Przebieg pomiarów szczegółowej osnowy wysokościowej klas: III i IV oraz osnowy pomiarowej wykonywanych technologią niwelacji geometrycznej, technicznej został przedstawiony w podręczniku „*Geodezja I*". W tabeli 6.5 zestawiono wymogi dokładnościowe związane z pomiarem osnowy wysokościowej III i IV klasy.

Tabela 6.5. Wymagania związane z pomiarem sieci niwelacji klas III, IV

Wymagania	Klasa III	Klasa IV
Dopuszczalne długości celowych	do 50 m (75 m*)	8 – 40 m (75 m*)
Różnica celowych w przód i wstecz	±0,8 m	±0,8 m
Minimalna odległość celowej nad terenem	1,5 m (w terenie falistym 0,6 m)	1,5 m (w terenie falistym 0,6 m)
Dopuszczalny błąd wyznaczenia poprawki komparacyjnej łat	$\leqslant \pm 0{,}15$ mm/m	$\leqslant \pm 0{,}20$ mm/m
Różnica dwukrotnego wyznaczenia różnicy wysokości na pojedynczym stanowisku	±2 mm	±3 mm
Różnica ρ pomiaru tam i z powrotem różnicy wysokości odcinka o długości R	$\leqslant 6\sqrt{R}$ mm	$\leqslant 12\sqrt{R}$ mm
Odchyłka nawiązania f_l linii niwelacyjnej o długości L do punktów wyższych klas	$\leqslant 4\sqrt{L}$ mm	$\leqslant 10\sqrt{L}$ mm
Odchyłka zamknięcia f poligonu niwelacyjnego o długości obwodnicy F	$\leqslant 6\sqrt{F}$ mm	$\leqslant 12\sqrt{F}$ mm
Sprawdzenie stabilności punktów nawiązania. Wyznaczenie różnicy wysokości tych punktów poprzez pomiar kontrolny	$\leqslant 6\sqrt{R} + 2$ mm	$\leqslant 12\sqrt{R} + 3$ mm

* Wydłużenie celowej do 75 m jest dopuszczalne pod warunkiem zastosowania niwelatora o powiększeniu lunety nie mniejszym niż 30×.

ROZDZIAŁ 7: Podstawy rachunku wyrównawczego i metod obliczeń geodezyjnych

7.1. Błędy obserwacji geodezyjnych

Wyniki pomiarów geodezyjnych, zwane także *obserwacjami* lub częściej – *spostrzeżeniami*, oznaczane symbolami: $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$, nigdy nie są bezbłędne, lecz stanowią jedynie wartości przybliżone pewnych nieznanych wartości prawdziwych wielkości mierzonych. Spostrzeżenia obarczone są licznymi błędami wynikającymi z niedoskonałości przyrządów pomiarowych, zmysłów obserwatora oraz zmienności warunków atmosferycznych i środowiskowych podczas wykonywania pomiarów.

W zależności od źródeł powstawania i charakteru skażenia przez błędy pomiarowe rezultatów pomiarów, można dokonać podziału błędów na trzy grupy:

1. *Błędy grube* (omyłki) mają duże wartości liczbowe i są spowodowane niedyspozycją lub nieuwagą obserwatora, który z tych powodów może odczytać lub zapisać inny wynik niż wykazuje przyrząd. Typowymi przykładami błędów grubych mogą być: zanotowanie błędnej ilości przyłożeń taśmy wskutek zgubienia szpilki podczas bezpośredniego pomiaru odległości, przestawienie cyfr odczytu na limbusie teodolitu itp. Zastąpienie ręcznego notowania obserwacji w dziennikach polowych przez elektroniczny zapis danych pomiarowych w nośnikach pamięci znaczne zmniejsza prawdopodobieństwo popełniania błędów grubych.

2. *Błędy systematyczne* powstają wskutek działania ustalonych prawidłowości w określonych warunkach pomiaru. Ich źródła mogą wynikać z następujących przyczyn:
   - instrumentalnych, spowodowanych wadami instrumentów (przymiarów, dalmierzy, teodolitów, niwelatorów),
   - osobowych, związanych ze stałymi nawykami obserwatora, wykazującego skłonność do błędnego celowania lub tendencyjnego szacowania odczytów, zmierzającego do ich systematycznego zwiększania lub zmniejszania,
   - środowiskowych, wynikających z działania znanych praw związanych z określonymi warunkami pomiaru (np. nieuwzględnienie rozszerzalności termicznej taśmy, wpływ na pomiar kątów refrakcji atmosferycznej lub bocznego oświetlenia celu).

   Liczne znane błędy systematyczne są s t a ł e co do znaku i wartości liczbowej, jednakowo obarczając powtarzające się obserwacje np. błąd miejsca zera podczas pomiaru kątów pionowych lub błąd wynikający z używania nieskomparowanej taśmy, obarczający każde przyłożenie i wzrastający wprost proporcjonalnie do liczby jej przyłożeń. Istnieją także błędy systematyczne z m i e n n e np. sinusoidalny wpływ mimośrodu alidady.

   Błędy grube powinny być bezwzględnie wyeliminowane z materiału obserwacyjnego przed przystąpieniem do wyrównania spostrzeżeń, zaś błędy sys-

tematyczne usuwamy w miarę możliwości ich ujawnienia, co niestety nie zawsze jest wykonalne.

3. *Błędy przypadkowe* mają charakter losowy i w przeciwieństwie do wcześniej wymienionych błędów grubych i systematycznych, są niemożliwe do wyznaczenia i wyeliminowania ze względu na ich losową zmienność co do wartości liczbowej oraz znaku. Wynika to z nieznajomości wszystkich źródeł błędów lub funkcji wiążących błędy przypadkowe z ich przyczynami. Podczas pomiaru prawdopodobieństwo popełnienia błędów przypadkowych ze znakami plus i minus jest jednakowe. Błędy te, działając z różnym nasileniem, wynikają z mniej lub bardziej znanych przyczyn, trudnych do ścisłego określenia, takich jak niedoskonałości instrumentu i wzroku obserwatora, zmienne warunki zewnętrzne itp. Wartość osiąganych błędów przypadkowych można zmniejszyć poprzez zwiększanie liczby pomiarów, stosowanie dokładniejszych przyrządów i bardziej racjonalnych metod pracy, skracanie czasu trwania obserwacji, wybór korzystnych pór dnia, roku oraz stanu pogody, zapewniających dogodne warunki prac polowych. Zmniejszenie wpływu błędów przypadkowych na wyniki obserwacji osiągamy też poprzez tzw. *wyrównanie*, które doprowadza spostrzeżenia do wzajemnej matematycznej zgodności oraz umożliwia dokonanie oceny dokładności obserwacji po wyrównaniu.

Wartość prawdziwą wielkości mierzonej X można przedstawić jako sumę spostrzeżenia L_i stanowiącego wynik i-tego pomiaru oraz błędu prawdziwego ε_i, czyli:

$$X = L_i + \varepsilon_i \tag{7.1}$$

Błędy przypadkowe można uznać za zmienne losowe, do których stosują się zasady rachunku prawdopodobieństwa i teorii błędów. C. F. Gauss ustalił prawdopodobieństwo wystąpienia błędów przypadkowych w postaci zależności określanej jako *prawo błędów Gaussa-Laplace'a*:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\varepsilon^2} \tag{7.2}$$

gdzie:

$\varphi(\varepsilon)$ – funkcja określająca szybkość zmiany prawdopodobieństwa pojawienia się błędu ε;

ε – przypadkowy błąd prawdziwy spostrzeżenia;

h – parametr związany z warunkami wpływającymi na dokładność pomiaru, stały dla danego zespołu spostrzeżeń jednakowo dokładnych;

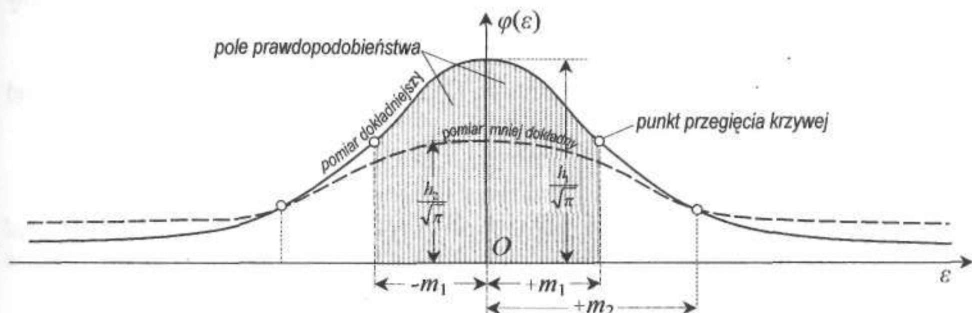
e – $e = 2{,}718\,281\,828...$ – liczba będąca podstawą logarytmów naturalnych

π – $\pi = 3{,}141\,592\,653...$ – liczba wyrażająca stosunek obwodu koła do jego średnicy.

Wykresem funkcji $\varphi(\varepsilon)$ dla określonej wartości parametru h jest *krzywa prawdopodobieństwa* popełnienia błędu przypadkowego, zwana też *krzywą de Moivre'a-Gaussa* (rys. 7.1). Na podstawie analizy przebiegu krzywej prawdopodobieństwa można wyciągnąć następujące wnioski:

- Najbardziej prawdopodobne jest pojawienie się błędu przypadkowego ε równego zero.

- Prawdopodobieństwo błędu mniejszego jest większe niż prawdopodobieństwo błędu większego.
- Prawdopodobieństwo błędów o tej samej wartości bezwzględnej, lecz z różnymi znakami jest jednakowe.
- Zwiększenie dokładności pomiaru wyrażone zwiększeniem wartości parametru *h* powoduje zmniejszenie prawdopodobieństwa pojawienia się błędów o dużych wartościach liczbowych.
- Przy zwiększaniu ilości spostrzeżeń *n* suma błędów przypadkowych [ε] dąży do zera.



Rys. 7.1. Krzywa prawdopodobieństwa (krzywa de Moivre'a-Gaussa)

Do oceny dokładności w geodezji korzystamy najczęściej z pojęcia *błędu średniego – m*. Prawdopodobieństwo jego nieprzekroczenia wynosi 0,68. Wynika stąd, że przeciętnie na trzy błędy przypadkowe obserwacji dwa są od błędu średniego mniejsze, zaś jeden większy Na wykresie krzywej prawdopodobieństwa wartość błędu średniego odpowiada odciętej punktu przegięcia krzywej (rys. 7.1). Prawdopodobieństwo pojawienia się w pomiarach błędu ε w przedziale $\pm m$ jest równe polu zawartemu pomiędzy krzywą Gaussa a liniami rzędnych wychodzącymi z punktów o odciętych $+m$ oraz $-m$ oraz osią ε. Na podstawie wartości błędów prawdziwych ε szeregu *n* spostrzeżeń jego błąd średni określa się na podstawie wzoru:

$$m = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \cdots + \varepsilon_n^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \tag{7.3}$$

Pomiędzy parametrem *h* a błędem średnim *m* zachodzi związek:

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \tag{7.4}$$

Do oceny dokładności może być również przydatny tzw. *błąd graniczny – g*, którego nazwa pochodzi stąd, że jego przekroczenie jest mało prawdopodobne. Błąd ten wyznacza największą wartość błędu, dopuszczalną dla danego pomiaru i przyjmowany jest zwykle jako trzykrotna wartość błędu średniego, czyli:

$$g = 3 \cdot m \tag{7.5}$$

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu większego od błędu granicznego jest niewielkie i wynosi 1:370. Oznacza to, że błąd ε większy od błędu granicznego g zdarza się tylko raz na 370 spostrzeżeń. Niekiedy zamiast błędu $3m$ w roli błędu granicznego przyjmowany jest także błąd równy podwójnej wartości błędu średniego ($2m$), którego przekroczenie zdarza się raz na 22 obserwacje.

Często do wyrażenia dokładności pomiaru określonym przyrządem lub metodą korzystamy z tzw. *błędu względnego*, który jest równy średniemu błędowi bezwzględnemu (absolutnemu) m, przypadającemu na całą mierzoną wielkość d i podzielonemu przez wynik pomiaru tej wielkości. Utworzony w ten sposób iloraz doprowadza się do ułamka z licznikiem równym jedności. Błąd względny jest wykorzystywany szczególnie do oceny dokładności pomiarów długości i pola powierzchni.

Przykład:

Średni błąd pomiaru taśmą odcinka o długości 100 m wynosi ±2 cm. Błąd względny tego pomiaru wyniesie zatem:

$$\frac{m}{d} = \frac{2\,\text{cm}}{10\,000\,\text{cm}} = 1:5\,000$$

Miarę dokładności pomiarów geodezyjnych może stanowić również *błąd przeciętny* równy średniej arytmetycznej sumy wartości bezwzględnych błędów przypadkowych.

7.2. Zasady obliczeń geodezyjnych

7.2.1. Zaokrąglanie i zapis liczb

1. Zaokrąglanie liczb wykonujemy według następujących reguł:
   - gdy następna cyfra za cyfrą zaokrąglaną jest większa od 5, to cyfrę tę zaokrąglamy w górę;
   - gdy następna cyfra za cyfrą zaokrąglaną jest mniejsza od 5, to cyfrę tę pozostawiamy bez zmiany;
   - gdy następna cyfra za cyfrą zaokrąglaną jest równa 5, zaś dalsze są zerami, to cyfrę tę zaokrąglamy do cyfry parzystej.
2. Liczbę całkowitą od ułamkowej oddzielamy przecinkiem (a nie kropką).
3. Liczby wielocyfrowe należy podzielić odstępami na grupy trzycyfrowe na lewo i prawo od przecinka dziesiętnego np. 25 347,523 375.
4. Dokonując zapisu liczby uwzględnia się wyłącznie *cyfry pewne*, czyli tylko te cyfry znaczące, spośród których ostatnia cyfra dziesiętna jest obarczona błędem przybliżenia nie większym niż pół jednostki ostatniego rzędu dziesiętnego np. dla liczby 228,326 błąd nie może przekraczać wartości ±0,005. *Cyframi znaczącymi* liczby przedstawionej w zapisie dziesiętnym są wszystkie cyfry z wyjątkiem początkowych zer (zer położonych na lewo od pierwszej cyfry różnej od zera).
5. W zapisie ułamków okresowych powtarzającą się część okresową liczby ujmuje się w nawias np. $\frac{10}{3}$=3,3(3).

7.2.2. Działania na liczbach przybliżonych (reguły Kryłowa – Bradisa)

1. Przy dodawaniu lub odejmowaniu liczb przybliżonych należy w wyniku zachować tyle znaków dziesiętnych, ile ich zawiera liczba o najmniejszej liczbie znaków dziesiętnych np. $12,4+65,23 \cong 77,6$.
2. Przy mnożeniu lub dzieleniu liczb przybliżonych należy w wyniku zachować tyle cyfr znaczących, ile ich zawiera liczba przybliżona o najmniejszej liczbie cyfr znaczących np. $0,075:112 \cong 0,000\,67$ lub $35,3 \cdot 1,345 = 47,5$.
3. Przy podnoszeniu liczby do potęgi drugiej lub trzeciej (podnoszeniu do kwadratu lub sześcianu) należy w wyniku zachować tyle cyfr znaczących, ile ich zawiera liczba potęgowana np. $10,2^2 \cong 104$.
4. Przy wyciąganiu pierwiastka drugiego lub trzeciego stopnia należy zachować w wyniku tyle cyfr znaczących, ile ich zawiera liczba pierwiastkowana np. $\sqrt{10,36} \cong 3,219$.
5. Liczby stanowiące pośrednie stadia obliczeń zapisujemy, uwzględniając o jedną cyfrę więcej niż wynika to z powyższych reguł. W rezultacie końcowym tę dodatkowa cyfrę odrzucamy lub zapisujemy mniejszym znakiem lub czcionką np. $158,74_3$.
6. Jeżeli niektóre dane zawierają więcej znaków dziesiętnych niż pozostałe dane w działaniach pierwszego stopnia (dodawanie, odejmowanie) lub więcej cyfr znaczących w działaniach drugiego i trzeciego stopnia (mnożenie, dzielenie, potęgowanie), wówczas należy je zaokrąglić zachowując o jedną cyfrę więcej niż wynika to z reguł 1 – 4.
7. Jeśli chcemy otrzymać wynik rachunku o k cyfrach, to do obliczeń należy brać dane z taką ilością cyfr, która zgodnie z regułami 1 – 4 daje w wyniku k+1 cyfr.

7.3. Prawo przenoszenia się błędów średnich

Błędy wielkości obserwowanych bezpośrednio powodują, że funkcje tych wielkości są także obarczone błędami. Z tego względu podczas projektowania metodyki pomiaru, dokonywania wstępnej oceny dokładności i przed dokonaniem wyrównania w ramach różnych zadań geodezyjnych często zachodzi potrzeba określenia dokładności funkcji wielkości obserwowanych. Na przykład jeśli znamy średnie błędy: pomiaru kąta pionowego m_α i odległości m_d, wtedy w oparciu o prawo podane niżej możemy określić średni błąd przewyższenia m_h w niwelacji trygonometrycznej, obliczanego ze znanego wzoru: $h = d \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$.

Do wyznaczenia średniego błędu funkcji wielkości obserwowanych niezależnych od siebie, których średnie błędy są znane, stosuje się sformułowane przez C. F. Gaussa prawo przenoszenia się błędów średnich. Innymi słowy prawo to przedstawia w jaki sposób średnie błędy: $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ wielkości $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$, będących zmiennymi niezależnymi zadanej funkcji: $F(L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n)$, „przenoszą się" na błąd tej funkcji m_F. Różniczkę zupełną funkcji F możemy zapisać jako:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial L_1} \cdot dL_1 + \frac{\partial F}{\partial L_2} \cdot dL_2 + \frac{\partial F}{\partial L_3} \cdot dL_3 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial L_n} \cdot dL_n$$

Zastępując różniczki zmiennych niezależnych: dL_1, dL_2, dL_3, ... , dL_n błędami prawdziwymi spostrzeżeń: ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n, oraz różniczkę dF – błędem prawdziwym tej funkcji oznaczonym symbolem ε_F, otrzymamy równanie:

$$\varepsilon_F = \frac{\partial F}{\partial L_1} \cdot \varepsilon_1 + \frac{\partial F}{\partial L_2} \cdot \varepsilon_2 + \frac{\partial F}{\partial L_3} \cdot \varepsilon_3 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial L_n} \cdot \varepsilon_n$$

Dla uproszczenia zapisu kolejne pochodne cząstkowe w powyższym wzorze oznaczmy tymczasowo symbolami: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, stąd:

$$\varepsilon_F = a_1 \cdot \varepsilon_1 + a_2 \cdot \varepsilon_2 + a_3 \cdot \varepsilon_3 + \ldots + a_n \cdot \varepsilon_n = [a\varepsilon]$$

Kwadrat średniego błędu funkcji F zgodnie z wzorem (7.3) wyniesie zatem:

$$m_F^2 = \frac{[\varepsilon_F \varepsilon_F]}{n} = \frac{[a\varepsilon]^2}{n}$$

Po rozpisaniu kwadratu sumy wyrażenie $[a\varepsilon]^2$ będzie zawierać szereg iloczynów typu $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j$, których suma po podzieleniu przez n dąży do zera, a więc na wartość wielkości m_F^2 wpływają w zasadzie tylko te składniki wyrażenia $[a\varepsilon]^2$, które zawierają błędy ε podniesione do kwadratu, a więc:

$$m_F^2 = a_1^2 \cdot \frac{[\varepsilon_1 \varepsilon_1]}{n} + a_2^2 \cdot \frac{[\varepsilon_2 \varepsilon_2]}{n} + a_3^2 \cdot \frac{[\varepsilon_3 \varepsilon_3]}{n} + \cdots + a_n^2 \cdot \frac{[\varepsilon_n \varepsilon_n]}{n}$$

Uwzględniając ponownie wzór (7.3) oraz zastępując wyrazy : a_1, a_2, a_3, ..., a_n pochodnymi cząstkowymi, zapiszemy ostatecznie formułę matematyczną *prawa przenoszenia się błędów średnich*:

$$m_F = \sqrt{[a^2 m^2]} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial L_1}\right)^2 \cdot m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2}\right)^2 \cdot m_2^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_3}\right)^2 \cdot m_3^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n}\right)^2 \cdot m_n^2} \qquad (7.6)$$

lub

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial L_1} \cdot m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2} \cdot m_2\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_3} \cdot m_3\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n} \cdot m_n\right)^2} \qquad (7.7)$$

Słownie można sformułować prawo zapisane wzorem (7.7) w sposób następujący:

Błąd średni funkcji obserwacji jest równy pierwiastkowi z sumy kwadratów pochodnych cząstkowych pomnożonych przez odpowiadające im średnie błędy zmiennych niezależnych.

Waga funkcji wyraża się wzorem:

$$p_F = \frac{m_0^2}{m_F^2} = \frac{m_0^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial L_1} \cdot m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2} \cdot m_2\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_3} \cdot m_3\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n} \cdot m_n\right)^2}} \qquad (7.8)$$

oraz

$$\frac{1}{p_F}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{1}{p_x}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{1}{py}+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{1}{p_z}+\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\cdot\frac{1}{p_u} \tag{7.9}$$

Dla ułatwienia rozwiązywania zadań z zakresu zastosowań prawa przenoszenia się błędów i związanego z tym wyznaczania pochodnych cząstkowych, podajemy w tabeli 7.1 zestawienie pochodnych funkcji, które często występują w analizach dokładności.

Tabela 7.1: Zestawienie pochodnych funkcji najczęściej występujących w zadaniach geodezyjnych

L.p.	Nazwa	Funkcja	Pochodna
1	Stała	$f(x) = c$	$c' = 0$
2	Funkcja złożona	$F(x) = g[f(x)]$, gdzie: $f(x) = u$	$F'(x) = g'(u)\cdot f'(x)$
3	Potęga	x^n	$n\cdot x^{n-1}$
4	Suma lub różnica funkcji	$f(x) \pm g(x) \pm h(x)$	$f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$
5	Iloczyn funkcji	$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
6	Iloraz funkcji	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
7	Odwrotność	$\frac{1}{x}$, $x\neq 0$	$-\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$
8	Funkcja odwrotna	$f\colon x\to y$ $g\colon y\to x$	$f'(x)=\frac{1}{g'(x)}$
9	Sinus	$\sin x$	$\cos x$
10	Cosinus	$\cos x$	$-\sin x$
11	Tangens	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$, $\cos x\neq 0$
12	Cotangens	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$, $\sin x\neq 0$
13	Arcus sinus	$\mathrm{arc\,sin}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\neq\pm 1$
14	Arcus cosinus	$\mathrm{arc\,cos}\, x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\neq\pm 1$
15	Arcus tangens	$\mathrm{arc\,tg}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
16	Arcus cotangens	$\mathrm{arc\,ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
17	Funkcja wykładnicza	a^x	$a^x\cdot\frac{1}{\log_a e}=a^x\ln a$
18	Funkcja logarytmiczna	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}$

7.4. Przykłady zastosowań prawa przenoszenia się błędów średnich

1. Obliczenie średniego błędu funkcji liniowej jednej zmiennej

Zgodnie z podaną wcześniej zasadą obliczenia błędu funkcji dla funkcji: $F(x) = a{\cdot}x$ otrzymamy:

$$m_F = \pm\, a{\cdot}m_x \tag{7.10}$$

2. Obliczenie średniego błędu sumy (różnicy) dwóch zmiennych

Błąd funkcji typu $F(x, y) = x \pm y$ wyraża się wzorem:

$$m_F = \pm\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \tag{7.11}$$

3. Obliczenie średniego błędu dowolnej funkcji liniowej

Błąd funkcji typu $F(x, y, z, ..., u) = ax \pm by + cz + \ldots + nu$ wyraża się wzorem:

$$m_F = \pm\sqrt{a^2m_x^2 + b^2m_y^2 + c^2m_z^2 + \cdots + n^2m_u^2} \tag{7.12}$$

4. Obliczenie średniego błędu średniej arytmetycznej spostrzeżeń bezpośrednich jednakowo dokładnych

Spostrzeżenia bezpośrednie jednakowo dokładne charakteryzują się jednakowymi błędami średnimi, a zatem: $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_n = m$

Po zastosowaniu prawa przenoszenia się błędów w odniesieniu do funkcji:

$$x = \frac{1}{n}\cdot(L_1+L_2+L_3+\ldots+L_n) = \frac{[L]}{n}$$

otrzymamy:

$$m_x^2 = \frac{m^2}{n}$$

stąd:

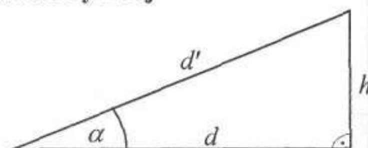
$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{7.13}$$

5. Obliczenie błędu przewyższenia w niwelacji trygonometrycznej

Funkcja: $h = d\cdot \mathrm{tg}\,\alpha$

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial h}{\partial d} = \mathrm{tg}\,\alpha; \quad \frac{\partial h}{\partial \alpha} = \frac{d}{\cos^2\alpha}$$



Rys. 7.2. Przewyższenie h

Wzór na obliczenie błędu funkcji:

$$m_h = \sqrt{\frac{d^2}{\cos^4\alpha}\cdot m_\alpha^2 + \mathrm{tg}^2\alpha\cdot m_d^2} \tag{7.14}$$

Obliczmy średni błąd przewyższenia h wyznaczonego trygonometrycznie dla następujących danych:

$d = 100$ m ; $m_d = \pm 0{,}02$ m; $\alpha = 10°$; $m_\alpha = \pm 1'$.

Formuła obliczeniowa na błąd przewyższenia po podstawieniu danych liczbowych:

$$m_h = \sqrt{\frac{100^2}{\cos^4 10°} \cdot \left(\frac{1'}{3438'}\right)^2 + \mathrm{tg}^2 10° \cdot (0{,}02)^2}$$

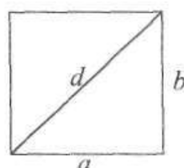
Uwaga: Stosując prawo przenoszenia się błędów, należy wyrażać błędy kątów w mierze łukowej, dzieląc błąd w mierze gradowej lub stopniowej przez właściwy zamiennik ρ !

Obliczenie błędu funkcji: $m_h = \sqrt{0{,}0008995 + 0{,}0000124} = \sqrt{0{,}0009119} = \pm 0{,}030$ m

Obliczenie przewyższenia i zestawienie wyników: h = 100 m · tg 10° = +17,633 m;

$h = +17{,}63_3$ m $\pm\ 0{,}03_0$ m

6. Obliczenie błędu długości przekątnej prostokąta



Rys. 7.3. Elementy prostokąta

Funkcja: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial d}{\partial a} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{d}\ ; \quad \frac{\partial d}{\partial b} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{d}$$

Wzór na obliczenie średniego błędu funkcji:

$$m_d = \frac{1}{d}\sqrt{a^2 \cdot m_a^2 + b^2 \cdot m_b^2} \tag{7.15}$$

Obliczyć średni błąd przekątnej d prostokąta, gdy znane są długości jego boków i ich średnie błędy: a = 100 m ; $m_a = \pm 0{,}02$ m; b = 50 m; $m_b = \pm 0{,}01$ m.

Rozwiązanie:

Formuła obliczeniowa po podstawieniu danych liczbowych:

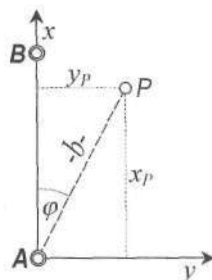
$$m_d = \frac{1}{111{,}803}\sqrt{100^2 \cdot 0{,}02^2 + 50^2 \cdot (0{,}01)^2}$$

Obliczenie błędu funkcji: $m_d = \frac{1}{111{,}803}\sqrt{4{,}00 + 0{,}25} = = \pm 0{,}01_8$ m

Obliczenie przekątnej i zestawienie wyników: $d = \sqrt{100^2 + 50^2} = 111{,}80_3$ m;

$d = 111{,}80_3$ m $\pm\ 0{,}01_8$ m

7. Obliczenie błędu położenia punktu zdjętego metodą biegunową



Rys. 7.4. Metoda biegunowa

Domiarami biegunowymi punktu P pomierzonymi ze stanowiska A i w nawiązaniu do punktu B, są: długość celowej b oraz kąt poziomy φ. Współrzędne prostokątne x_P, y_P punktu P w układzie osnowy pomiarowej, której bok wyznacza kierunek osi x, wynoszą:

$$x_P = b \cdot \cos\varphi \ ; \quad y_P = b \cdot \sin\varphi$$

Do powyższych funkcji zastosujmy prawo przenoszenia się błędów średnich:

$$m_x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial b}\cdot m_b\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot m_\varphi\right)^2 = \cos^2\varphi\cdot m_b{}^2 + b^2\cdot \sin^2\varphi\cdot m_\varphi{}^2$$

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial b}\cdot m_b\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot m_\varphi\right)^2 = \sin^2\varphi\cdot m_b{}^2 + b^2\cdot \cos^2\varphi\cdot m_\varphi{}^2$$

$$m_P^2 = m_x^2 + m_y^2 = m_b{}^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + b^2\, m_\varphi{}^2\cdot(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

Ponieważ: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

stąd:

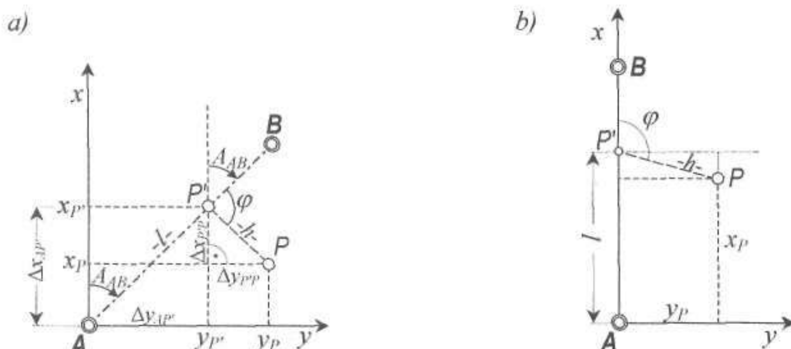
$$m_P = \sqrt{m_b^2 + b^2\cdot m_\varphi^2} \qquad (7.16)$$

Obliczyć średni błąd położenia punktu zdjętego metodą biegunową dla następujących danych: $b = 75$ m; $m_b = \pm 0{,}01$ m; $\varphi = 50^g$; $m_\varphi = \pm 1^c$.

Rozwiązanie:

$$m_P = \sqrt{(0{,}01)^2 + 75^2\cdot\left(\frac{1^c}{6366^c}\right)^2} = \pm 0{,}015 \text{ m}$$

8. Obliczenie błędu położenia punktu zdjętego metodą ortogonalną



Rys. 7.5. Metoda ortogonalna

Domiarami prostokątnymi punktu P pomierzonymi względem początku A linii pomiarowej są: odcięta l i rzędna h. Wskutek błędu wyznaczenia kąta prostego rzędna, zamiast biec w kierunku prostopadłym do linii pomiarowej, tworzy z nią pewien kąt φ bliski 90°. Rozpatrzmy najpierw przypadek ogólny, gdy azymutem linii AB jest kąt $A_{AB} = A$ (rys. 7.5 a). Współrzędne prostokątne x_P, y_P punktu P wynoszą:

$$x_P = x_A + l\cdot\cos A + h\cdot\cos(A+\varphi)\ ;$$
$$y_P = y_A + l\cdot\sin A + h\cdot\sin(A+\varphi)\ .$$

W przypadku szczególnym, gdy prosta AB jest równoległa do osi x, wtedy azymut A jest równy zero ($\cos A = 1$; $\sin A = 0$). Zapiszemy więc funkcje:

$$x_P = x_A + l + h\cdot\cos\varphi$$
$$y_P = y_A + h\cdot\sin\varphi$$

Zakładając bezbłędność punktów nawiązania i bezbłędność realizacji azymutu A zastosujemy do powyższych funkcji prawo przenoszenia się błędów średnich:

$$m_{x_P}^2 = \left(\frac{\partial x_P}{\partial l}\right)^2 \cdot m_l^2 + \left(\frac{\partial x_P}{\partial h}\right)^2 \cdot m_h^2 + \left(\frac{\partial x_P}{\partial \varphi}\right)^2 \cdot m_\varphi^2$$

$$m_{y_P}^2 = \left(\frac{\partial y_P}{\partial h}\right)^2 \cdot m_h^2 + \left(\frac{\partial y_P}{\partial \varphi}\right)^2 \cdot m_\varphi^2$$

$$m_{x_P}^2 = m_l^2 + \cos^2\varphi \cdot m_h^2 + h^2 \sin^2\varphi \cdot m_\varphi^2$$

$$m_{y_P}^2 = \sin^2\varphi \cdot m_h^2 + h^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot m_\varphi^2$$

Po uwzględnieniu $\varphi = 90°$ para powyższych wzorów przyjmie postać:

$$m_{x_P}^2 = m_l^2 + h^2 \cdot m_\varphi^2$$

$$m_{y_P}^2 = m_h^2$$

$$m_P^2 = \sqrt{m_l^2 + m_h^2 + h^2 m_\varphi^2} \tag{7.17}$$

Jeśli średnie błędy pomiaru rzędnej i odciętej są jednakowe, czyli: $m_l = m_h = m$, wtedy wzór (7.17) przyjmie nieco prostszą formę:

$$m_P^2 = \sqrt{2m^2 + h^2 m_\varphi^2} \tag{7.18}$$

Przykład:

Obliczyć średni błąd położenia punktu zdjętego metodą ortogonalną dla następujących danych: $l = 125{,}00$ m, $h = 25$ m; ; $m_\varphi = \pm 5'$, błąd względny pomiaru odciętej i rzędnej wynosi 1:2 000.

Rozwiązanie:

$$m_l = 125 \text{ m} : 2\,000 = \pm 0{,}063 \text{ m} \;;\; m_h = 25 \text{ m} : 2\,000 = \pm 0{,}013 \text{ m}$$

$$m_P = \sqrt{(0{,}063)^2 + (0{,}013)^2 + 25^2 \cdot \left(\frac{5'}{3438'}\right)^2} = \pm 0{,}074 \text{ m} \cong \pm 7 \text{ cm.}$$

9. Obliczenie błędu położenia punktu zdjętego metodą wcięcia kątowego w przód

Ze znanych punktów bazowych: A, B położonych na boku osnowy mierzymy kąty poziome: α, β do zdejmowanego punktu P. Współrzędne tego punktu możemy obliczyć, dodając do współrzędnych punktu A przyrosty współrzędnych wzdłuż boku AP. Zgodnie z rys. 7.6 długości boków trójkąta ABC określimy na podstawie twierdzenia sinusów:

$$a = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin\alpha \quad ; \quad b = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin\beta \,;$$

Uwzględniając powyższe wzory oraz związki:

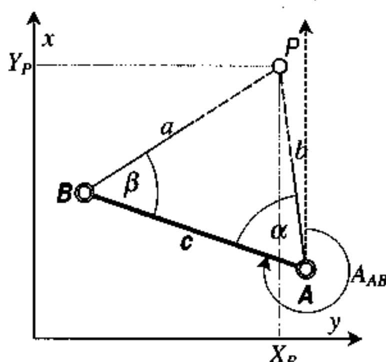
$$X_P = X_A + b \cdot \cos(A_{AB} + \alpha) \quad ; \quad Y_P = Y_A + +b \cdot \sin(A_{AB} + \alpha),$$

możemy zapisać funkcje na obliczenie współrzędnych punktu wcinanego, w których dla wygody zapisu wprowadźmy skrócony symbol A azymutu bazy wcięcia c, zamiast A_{AB}.

$$X_P = X_A + \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin\beta \cdot \cos(A + \alpha)$$

$$Y_P = Y_A + \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin\beta \cdot \sin(A + \alpha)$$

Do powyższych funkcji zastosujmy prawo przenoszenia się błędów średnich:



Rys. 7.6. Metoda wcięć kątowych

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -c \cdot \sin\beta \cdot \frac{\sin(A+\alpha)\cdot\sin(\alpha+\beta) + \cos(A+\alpha)\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} =$$

$$= -c \cdot \sin\beta \, \frac{\cos[(A+\alpha)-(\alpha+\beta)]}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -b \cdot \frac{\cos(A-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = c \cdot \cos(A+\alpha) \cdot \frac{\cos\beta\cdot\sin(\alpha+\beta) - \sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} =$$

$$= c \cdot \cos(A+\alpha) \, \frac{\sin[(\alpha+\beta)-\beta]}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = a \cdot \frac{\cos(A+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = c \cdot \sin\beta \cdot \frac{\cos(A+\alpha)\cdot\sin(\alpha+\beta) - \sin(A+\alpha)\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} =$$

$$= c \cdot \sin\beta \, \frac{-\{\sin[(A+\alpha)-(\alpha+\beta)]\}}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -b \cdot \frac{\sin(A-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = c \cdot \sin(A+\alpha) \cdot \frac{\cos\beta\cdot\sin(\alpha+\beta) - \sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} =$$

$$= c \cdot \cos(A+\alpha) \, \frac{\sin[(\alpha+\beta)-\beta]}{\sin^2(\alpha+\beta)} = a \cdot \frac{\sin(A+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$m_P^2 = b^2 \cdot \left(\frac{\cos(A-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2 m_\alpha^2 + a^2 \cdot \left(\frac{\cos(A+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2 m_\beta^2 + b^2 \cdot \left(\frac{\sin(A-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2 m_\alpha^2 +$$

$$+ a^2 \cdot \left(\frac{\sin(A+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2 m_\beta^2$$

stąd:

$$m_P^2 = \frac{b^2 \cdot m_\alpha^2 + a^2 \cdot m_\beta^2}{\sin^2(\alpha+\beta)} \tag{7.19}$$

Gdy kąty α, β zostały zmierzone z jednakową dokładnością, czyli $m_\alpha = m_\beta = m_{kt}$, wtedy błąd położenia punktu wyznaczonego wcięciem w przód obliczymy ze wzoru:

$$m_P = \frac{m_{kt}}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \sqrt{a^2+b^2} \tag{7.20}$$

Przykład:

Obliczyć średni błąd położenia punktu wyznaczonego wcięciem kątowym w przód dla następujących danych: $\alpha = 50^g$; $\beta = 80^g$; $X_A = Y_A = 100{,}00$ m; $X_B = 70{,}00$ m $Y_B = 140{,}00$ m; $m_{kt} = \pm 2^c$.

Rozwiązanie:

Po obliczeniu wcięcia otrzymamy współrzędne: $X_P = 47{,}15$ m; $X_P = 107{,}55$ m. Długości boków trójkąta wynoszą: $a = 39{,}68$ m; $b = 53{,}37$ m.

$$m_P = \frac{2^c}{6366^c} \cdot \frac{\sqrt{39{,}68^2 + 53{,}37^2}}{\sin 130^g} = \pm 0{,}02_3 \text{ m}$$

10. Obliczenie błędu położenia punktu zdjętego metodą wcięcia liniowego

Ze znanych punktów bazowych: A, B położonych na boku osnowy mierzymy odległości: a, b do zdejmowanego punktu P. Zgodnie z rys. 13.8 współrzędne tego punktu w lokalnym układzie bazy wcięcia można określić następująco:

$$x_P = q \quad ; \quad y_P = h$$

Z trójkąta ABP wynikają znane zależności podane także w ust. 9.4:

$$h^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2 \quad , \quad p + q = c\,,$$

$$p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \quad \text{oraz} \quad q = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$$

Funkcje wyrażające współrzędne punktu wcinanego mają więc postać:

$$x_P = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \quad ; \quad y_P = \sqrt{b^2 - q^2} = \frac{1}{2c}\sqrt{4b^2c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)}$$

Po zróżniczkowaniu powyższych zależności, zastosowaniu prawa przenoszenia się błędów i dokonaniu odpowiednich przekształceń można uzyskać wzór:

$$m_P = \pm \frac{a \cdot b}{c \cdot h}\sqrt{m_a^2 + m_b^2} \tag{7.21}$$

Przykład:

Obliczyć średni błąd położenia punktu wciętego liniowo dla danych:

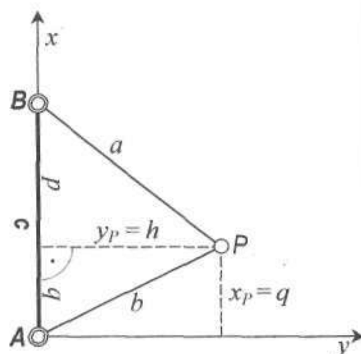
$a = 50$ m; $b = 40$ m; $X_A = Y_A = 100{,}00$ m; $X_B = 70{,}00$ m $Y_B = 140{,}00$ m; $m_a = m_b = \pm 0{,}02$ m.

Rozwiązanie:

Po obliczeniu wcięcia otrzymamy współrzędne: $X_P = 61{,}07$ m; $X_P = 90{,}80$ m. Obliczenie długości elementów ΔABP: podstawa trójkąta: $c = 50{,}00$ m; wysokość trójkąta: $h = 36{,}66$ m; rzuty boków na podstawę: $p = 34{,}00$ m; $q = 16$ m.

Po podstawieniu do wzoru (13.25) otrzymamy:

$$m_P = \pm \frac{50 \cdot 40}{50 \cdot 36{,}66} \cdot 0{,}02\sqrt{2} = \pm 0{,}03_1 \text{ m.}$$



Rys. 7.7. Metoda wcięć liniowych

7.5. Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich

7.5.1. Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich jednakowo dokładnych

Głównymi zadaniami procesu wyrównania są: określenie najbardziej prawdopodobnych wartości wyników pomiaru (spostrzeżeń), szukanych wielkości (niewiadomych) oraz dokonanie oceny dokładności dotyczącej zarówno materiału obserwacyjnego jak i wielkości wyrównanych. Spostrzeżenia jednorodne, wykonane tym samym przyrządem i metodą pomiaru, w identycznych warunkach środowiska, przez tego samego obserwatora noszą nazwę *spostrzeżeń jednakowo dokładnych*. Wszystkie te spostrzeżenia, tworzą określony zbiór: $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ i mają charakter spostrzeżeń typowych, a więc charakteryzują się jednakowymi błędami średnimi, spełniającymi równość:

$$m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_n = m$$

Problem wyrównania wystąpi wtedy, gdy ilość n spostrzeżeń niezależnych od siebie uzyskanych z pomiaru, jest większa niż ilość u spostrzeżeń niezbędnych do rozwiązania danego zadania geodezyjnego ($n > u$). Liczbę naturalną, będącą różnicą $n-u$, określamy jako ilość *spostrzeżeń nadliczbowych* n_n, czyli $n_n = n - u$.

Zgodnie z zależnością wynikającą z wzoru (7.1):

$$\varepsilon_i = X - L_i \tag{7.22}$$

spostrzeżenia L różnią się od ich nieznanych wartości prawdziwych X o wartość błędu prawdziwego ε, natomiast w wyniku procesu wyrównania uzyskujemy poprawki v, które dodane do spostrzeżeń dają w efekcie spostrzeżenia wyrównane L_i+v_i. Dobór poprawek powinien następować według reguły, która w możliwie najmniejszym stopniu zmieni wartości spostrzeżeń uzyskane z pomiaru. Problematykę rozwiązania sposobu obliczania poprawek v realizuje się w oparciu o *teorię najmniejszych kwadratów* podaną przez C. F. Gaussa, w myśl której najbardziej prawdopodobne rozłożenie błędów obserwacji jednakowo dokładnych, zgodne z rozkładem normalnym, następuje wtedy, gdy suma kwadratów poprawek osiąga wartość najmniejszą (minimum):

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2 = [vv] = \text{minimum} \tag{7.23}$$

Obserwacje: L_1, L_2, L_3, ..., L_n , otrzymane w wyniku porównania wielkości mierzonej z podziałką przyrządu mierniczego podczas wielokrotnych pomiarów tej samej wielkości mierzonej, stanowiącej niewiadomą, nazywamy *spostrzeżeniami bezpośrednimi*. Niezależnie od zwiększania liczby pomiarów n nieznana wartość prawdziwa X tej wielkości, której bezpośrednio dotyczą pomiary, nie daje się określić. Poszukujemy zatem jej najbardziej prawdopodobnej wartości x, którą zgodnie z przedstawioną dalej zasadą wyrównania (7.25), jest dla spostrzeżeń bezpośrednich *średnia arytmetyczna* x, spełniająca związek:

$$x = L_i + v_i \tag{7.24}$$

Uwzględnienie zależności (7.24) i zasady najmniejszych kwadratów poprawek (7.23) prowadzi do wzoru na zwykłą średnią arytmetyczną:

$$[vv] = (x - L_1)^2 + (x - L_2)^2 + (x - L_3)^2 + \ldots + (x - L_n)^2 = n \cdot x^2 - 2x \cdot [L] + [LL]$$

Ostatni zapis w powyższym równaniu przedstawia funkcję typu: $y = ax^2+bx+c$, będącą trójmianem kwadratowym, w którym: $a = n$, $b=-2[L]$. Minimum tej funkcji występuje dla wartości $x_{min.} = -\dfrac{b}{2a}$, a więc po podstawieniu do tego wzoru wyżej zapisanych oznaczeń odpowiednich współczynników otrzymamy wzór (7.25) na średnią arytmetyczną. Wzór ten możemy także uzyskać, znajdując minimum poprzez określenie pierwszej pochodnej funkcji wyrażającej wielkość $[vv]$ i przyrównanie tej pochodnej do zera.

$$\frac{d[vv]}{dx} = 2(x-L_1)+2(x-L_2)+2(x-L_3)+\ldots+2(x-L_n) = 0$$

$$x = \frac{[L]}{n} = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n}{n} \tag{7.25}$$

Średnia arytmetyczna obliczona dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych jest równa ich sumie podzielonej przez liczbę pomiarów.

Niekiedy dla uniknięcia operowania w rachunku dużymi liczbami wygodniej jest przeprowadzać obliczenie średniej arytmetycznej za pomocą tzw. wartości przybliżonej x_0 i korzystać ze wzoru (7.25 a) otrzymanego po przekształceniu wzoru (7.25):

$$x = x_0 + \frac{[\Delta L]}{n} \tag{7.25 a}$$

W powyższym wzorze wielkość x_0 może mieć dowolną wartość, jednak jako x_0 dla wygody obliczeń najprościej jest przyjąć najmniejsze ze spostrzeżeń, ponieważ wtedy $\Delta L \geqslant 0$. Wielkości oznaczone symbolem ΔL stanowią różnice pomiędzy wartością przybliżoną x_0 a każdym ze spostrzeżeń:

$$\Delta L_i = L_i - x_0 \tag{7.26}$$

Po wyznaczeniu średniej arytmetycznej, obliczamy poprawki poszczególnych spostrzeżeń, które zgodnie ze wzorem (7.24) wyniosą:

$$v_i = x - L_i \tag{7.27}$$

Suma poprawek spełni więc zależność: $[v] = n \cdot x - [L]$, a stąd po uwzględnieniu (7.25):

$$[v] = 0 \tag{7.28}$$

Wzór (7.28) jest wykorzystywany do kontroli obliczenia średniej arytmetycznej i poprawek. Następnie w oparciu o ich znane wartości można dokonać oceny dokładności pomiaru i wielkości wyrównanych, obejmującej w tym przypadku obliczenie średniego błędu pojedynczego spostrzeżenia i średniego błędu średniej arytmetycznej. Dla określenia wzorów służących do wyznaczenia tych błędów skorzystamy z zależności: (7.22) i (7.24), na podstawie których można napisać:

$$L_i = X - \varepsilon_i = x - v_i$$

a więc:

$$\varepsilon_i = X - x + v_i \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_i^2 = (X-x)^2 - 2(X-x)v_i + v_i^2$$

Zgodnie z wzorem (7.3) kwadrat błędu średniego wyniesie:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{n(X-x)^2 - 2(X-x)[v] + [vv]}{n}$$

Po uwzględnieniu zależności (7.13) i (7.28) oraz przyjęciu założenia, że średni błąd średniej arytmetycznej m_x jest w przybliżeniu równy różnicy $X - x$ otrzymamy:

$$m^2 = m_x^2 + \frac{[vv]}{n} = \frac{m^2}{n} + \frac{[vv]}{n}$$

skąd:

$$nm^2 = m^2 + [vv]$$

Średni błąd pojedynczego spostrzeżenia wynosi więc:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{7.29}$$

Po ponownym uwzględnieniu wzoru (7.13) określimy średni błąd średniej arytmetycznej m_x, który można zapisać w postaci:

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \tag{7.30}$$

Uwaga: Ocena dokładności przeprowadzana dla małej liczby obserwacji nadliczbowych jest mało wiarygodna.

Kontrolę wyrównania, zwaną *kontrolą ogólną* przeprowadza się w oparciu o wzór:

$$[vv] = [(\Delta L)^2] - \frac{[\Delta L]^2}{n} \tag{7.31}$$

Przykład:

Wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość długości odcinka *AB* pomierzonego czterokrotnie z jednakową dokładnością.

A d_{AB} B

I. 154,152 m
II. 154,147 m
III. 154,155 m
IV. 154,150 m

$n = 4$
$u = 1$
$n_n = 3$

Tabela 7.2. Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich jednakowo dokładnych

Nr	Spostrzeżenia L_i [m]	Różnice $\Delta L_i = L_i - x_0$ [mm]	Poprawki $v_i = x - L_i$ [mm]	vv	Obliczenia
1	154,152	+5	-1	1	$n = 4$; $x = 616{,}604$ m : 4 = **154,151 m**
2	154,147	0	+4	16	$x_0 = 154{,}147$ m; $x = 154{,}147 \text{ m} + \frac{16 \text{ mm}}{4}$
3	154,155	+8	-4	16	$x = 154{,}147$ m + 0,004 m = **154,151 m**
4	154,150	+3	+1	1	$m = \sqrt{\frac{34}{3}} = \pm 3{,}4$ mm ; $m_x = \pm \frac{3{,}4}{\sqrt{4}} = \pm 1{,}7$ mm
Suma	616,604	+16	0	34	

Kontrola ogólna: $[vv] = [(\Delta L)^2] - \frac{[\Delta L]^2}{n} = 98 - 16^2{:}4 = 98 - 64 = 34.$

7.5.2. Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich niejednakowo dokładnych

Wyniki pomiarów, dla których nie jest spełnione przynajmniej jedno z wcześniej wymienionych założeń (ten sam przyrząd i metoda pomiaru, dokonanego w identycznych warunkach środowiska, przez tego samego obserwatora), nazywamy *spostrzeżeniami niejednakowo dokładnymi* (różnodokładnymi). Dla ilustracji tego pojęcia można wymienić pomiary tej samej długości różnymi przymiarami lub instrumentami np. drutami Jäderina, taśmą, dalmierzem optycznym, dalmierzem elektromagnetycznym. Dla zróżnicowania dokładności spostrzeżeń niejednakowo dokładnych przypisujemy każdemu z nich pewną dodatnią i niemianowaną liczbę p, zwaną *wagą*, określającą stopień naszego zaufania do danej obserwacji. Spostrzeżenie dokładniejsze uzyskuje większą wagę niż spostrzeżenie uzyskane z pomiaru mniej dokładnego. W szczególności wśród pomiarów niejednakowo dokładnych wyróżniamy spostrzeżenie o wadze równej jedności, niekoniecznie występujące w danym zbiorze obserwacji, które nosi nazwę *spostrzeżenia typowego*, zaś średni błąd m_0 tego spostrzeżenia nazywamy *średnim błędem jednostkowym*. Wszystkie spostrzeżenia jednakowo dokładne mają charakter spostrzeżeń typowych, a więc ich wagi są równe jedności, natomiast wagi obserwacji niejednakowo dokładnych są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów ich błędów średnich, co wyraża się wzorem:

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots : p_n = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} : \frac{1}{m_3^2} : \cdots : \frac{1}{m_n^2} \tag{7.32}$$

Dla i-tego spostrzeżenia oraz spostrzeżenia typowego można więc zapisać proporcję:

$$p_i : p_0 = \frac{1}{m_i^2} : \frac{1}{m_0^2}$$

Biorąc pod uwagę, że dla spostrzeżenia typowego $p_0 = 1$, otrzymamy zatem wzór na obliczenie wagi i-tego spostrzeżenia:

$$p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2} \tag{7.33}$$

Na podstawie przekształconego wzoru (7.33) można też zapisać zależność:

$$m_0 = m_i \sqrt{p_i} \tag{7.34}$$

lub

$$m_i = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} \tag{7.34 a}$$

Niekiedy zamiast wag korzysta się z pojęcia tzw. *błędności*, które są odwrotnościami wag. Dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych o znanych wagach: $p_1, p_2, p_3,\ldots, p_n$ lub błędach średnich $m_1, m_2, m_3,\ldots, m_n$ podstawowy warunek teorii najmniejszych kwadratów przyjmie postać:

$$p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + p_3v_3^2 + \cdots + p_nv_n^2 = [pvv] = \text{minimum} \tag{7.35}$$

lub

$$\left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{m_3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{v_n}{m_n}\right)^2 = \left[\frac{vv}{mm}\right] = \text{minimum} \tag{7.36}$$

Na podstawie wzoru (7.27) na obliczenie poprawek, czyli: $v_i = x - L_i$, można zapisać funkcję [pvv], która podobnie jak poprzednio jest również trójmianem kwadratowym typu: $y=ax^2+bx+c$, osiągającym minimum dla wartości $x_{min.} = -\dfrac{b}{2a}$.

$$[pvv] = p_1(x-L_1)^2+p_1(x-L_1)^2+p_1(x-L_1)^2+\ \ldots\ +p_1(x-L_1)^2 = [p]x^2-2x[pL]+[pLL]$$

Biorąc pod uwagę, że współczynniki trójmianu wynoszą: $a = [p]$; $b = -2[pL]$, najprawdopodobniejszą wartością, spełniającą warunek $[pvv]$ = min. dla zbioru spostrzeżeń bezpośrednich niejednakowo dokładnych $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$, którym przyporządkowano wagi: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, jest *średnia arytmetyczna ogólna (ważona)* obliczona na podstawie wzoru:

$$x = \frac{[pL]}{[p]} = \frac{p_1L_1 + p_2L_2 + p_3L_3 + \ldots + p_nL_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n} \tag{7.37}$$

Średnia arytmetyczna ogólna (ważona) jest równa sumie iloczynów spostrzeżeń i odpowiadających im wag podzielonej przez sumę wag.

Wzór (7.37) można także otrzymać inaczej, określając minimum funkcji $[pvv]$ poprzez utworzenie pierwszej pochodnej funkcji $[pvv]$ względem zmiennej x i przyrównanie jej do zera. Podobnie jak w wypadku zwykłej średniej arytmetycznej do obliczenia średniej arytmetycznej ogólnej można zastosować sposób polegający na wykorzystaniu wartości przybliżonej x_0:

$$x = x_0 + \frac{[p\Delta L]}{[p]} \tag{7.37 a}$$

Kontrolę obliczenia średniej stanowi zerowanie się sumy iloczynów wag i poprawek obliczonych według wzoru (7.27):

$$[pv] = 0 \tag{7.38}$$

Średni błąd m_0 typowego spostrzeżenia (średni błąd jednostkowy) określimy w oparciu o zmodyfikowany wzór (7.29), który dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych przyjmie postać:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \tag{7.39}$$

Biorąc pod uwagę, że błąd każdego ze spostrzeżeń wyraża się wzorem (7.34 a), w wyniku zastosowania prawa przenoszenia się błędów średnich w odniesieniu do funkcji zapisanej wzorem (7.37), można określić formułę na wyznaczenie średniego błędu średniej arytmetycznej ogólnej, która po dokonaniu odpowiednich przekształceń przyjmie postać:

$$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} \tag{7.40}$$

Kontrola ogólna wyrównania spostrzeżeń bezpośrednich niejednakowo dokładnych opiera się na zależności:

$$[pvv] = [p(\Delta L)^2] - \frac{[p\Delta L]^2}{[p]} \tag{7.41}$$

Zgodnie z wzorem (7.32) waga p_x średniej arytmetycznej ogólnej wynosi:

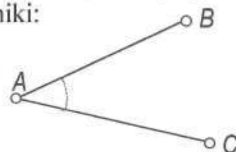
$$p_x = \frac{m_0^2}{m_x^2} = [p] \tag{7.42}$$

W analogiczny sposób można określić wagę zwykłej średniej arytmetycznej obliczanej dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych, dla której $p_x = n$.

Przykład:

Wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość kąta ABC, który pomierzono czterokrotnie teodolitami o różnej dokładności, uzyskując wyniki:

1. 44°15′20″ z błędem ±20″
2. 44°14′58″ z błędem ±10″
3. 44°15′05″ z błędem ±2″
4. 44°15′10″ z błędem ±6″



Dla zróżnicowania dokładności spostrzeżeń obliczymy ich wagi na podstawie wzoru (7.32), przyjmując tymczasowo wartość średniego błędu jednostkowego: $m_0 = \pm 10''$.

Tabela 7.3. Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich niejednakowo dokładnych

Nr	Obserwacje L_i	Błędy średnie m_i	Wagi p_i	Różnice $\Delta L_i = L_i - x_0$	$p \cdot \Delta L$	Poprawki $v_i = x - L_i$	pv	pvv	Obliczenia
1	44°15′20″	±20″	0,25	22″	5,50	-15,2	-3,8	57,76	$m_0 = \pm 10''$; $x_0 = 44°14'58''$
2	44°14′58″	±10″	1,00	0	0	+6,8	+6,8	46,24	$x = 44°14'58'' + \frac{38,78}{5,69} =$
3	44°15′05″	±5″	4	7″	28,00	-0,2	-0,8	0,16	**$= 44°15'04_8''$**
4	44°15′10″	±15″	0,44	12″	5,28	-5,2	-2,3	11,96	$m_0 = \sqrt{\frac{116,12}{3}} = \pm 6,2''$
Suma	×	×	5,69	×	38,78	×	-0,1	116,12	$m_x = \pm 2,6''$

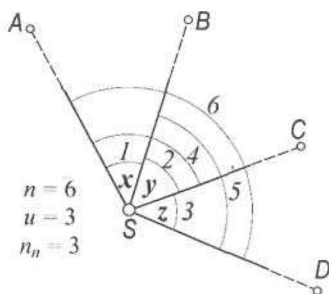
Kontrola ogólna: $[pvv] = [p(\Delta L)^2] - \frac{[p\Delta L]^2}{[p]} = 380,36 - 38,78^2 : 5,69 = 116,06.$

Uwaga: *Powyższy przykład ma charakter dydaktyczny, zaś w praktyce tego typu pomiar jest mało realny.*

7.6. Wyrównanie spostrzeżeń pośredniczących

Istnieje wiele zadań geodezyjnych, w ramach których bezpośredniemu pomiarowi podlegają wielkości służące do rachunkowego (pośredniego) wyznaczenia innych poszukiwanych wielkości, stanowiących niewiadome. Jednym z wielu przykładów może być konstrukcja kątowego wcięcia w przód, polegającego na rozwiązaniu trójkąta wcięcia, w którym bezpośrednio mierzy się kąty poziome przy podstawie utworzonej przez dwa punkty o znanych współrzędnych, a następnie w oparciu o wielkości dane i pomierzone określa się pośrednio współrzędne X, Y punktu wcinanego.

Spostrzeżenia: L_1, L_2, L_3, ..., L_n, które nie odnoszą się bezpośrednio do wielkości szukanych, lecz służą do wyznaczenia niewiadomych za pomocą ustalonych związków funkcyjnych, noszą nazwę *spostrzeżeń pośredniczących.*



Rys. 7.8. Przykład spostrzeżeń pośredniczących i niewiadomych

W rachunku wyrównawczym zakładamy, że funkcje: F_1, F_2, F_3, ..., F_n, zachodzące pomiędzy nieznanymi wartościami prawdziwymi spostrzeżeń: A_1, A_2, A_3,..., A_n a prawdziwymi niewiadomymi: X, Y, Z,... zachodzą także między wartościami wyrównanymi (najbardziej prawdopodobnymi) tych wielkości.

Przykładem prostego zadania, w którym występują spostrzeżenia pośredniczące i obserwacje nadliczbowe może być pomiar kątów w pęku czterech celowych wychodzących ze stanowiska S (rys. 7.8).

W powyższym zadaniu występują trzy spostrzeżenia nadliczbowe, ponieważ do jego rozwiązania, polegającego na określeniu wzajemnego położenia czterech kierunków, niezbędne jest pomierzenie tylko trzech kątów np. kątów: *1, 2, 3*, których wartości prawdziwe mogą stanowić niewiadome: X, Y, Z. Pomiędzy wartościami prawdziwymi spostrzeżeń: A_1, A_2, A_3,..., A_6 a niewiadomymi można zapisać następujące związki funkcyjne:

$$A_1 = X$$
$$A_2 = Y$$
$$A_3 = Z$$
$$A_4 = X+Y$$
$$A_5 = Y+Z$$
$$A_6 = X+Y+Z$$

Ponieważ wyznaczenie wartości prawdziwych A mierzonych wielkości nie jest możliwe, toteż trzeba je zastąpić najprawdopodobniejszymi wartościami spostrzeżeń wyrównanych $L+v$, uzyskiwanych w wyniku procesu wyrównawczego. Dostarcza on poprawek (błędów pozornych) v, które dodane do spostrzeżeń powodują spełnienie przez spostrzeżenia poprawione (wyrównane) $L+v$ i najprawdopodobniejsze wartości niewiadomych: x, y, z, tych samych funkcji F_1, F_2, F_3,...F_n, które wiążą z sobą także wartości prawdziwe spostrzeżeń: A_1, A_2, A_3,...A_n z wartościami prawdziwymi niewiadomych: X, Y, Z, ... Dla każdego spośród n spostrzeżeń, których wartości prawdziwe spełniają zależności funkcyjne typu: $A_i = F_i(X, Y, Z,...)$, można więc zapisać analogiczne związki, zwane *równaniami obserwacyjnymi*:

$$L_1 + v_1 = F_1(x, y, z, ...)$$
$$L_2 + v_2 = F_2(x, y, z, ...)$$

$$L_3 + v_3 = F_3(x, y, z, \ldots) \tag{7.43}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_n + v_n = F_n(x, y, z, \ldots)$$

Kolejnym etapem wyrównania jest przekształcenie układu *n* równań obserwacyjnych do układu *n równań błędów* (poprawek) w postaci:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz + \ldots + l_1 \\ v_2 &= a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz + \ldots + l_2 \\ v_3 &= a_3 dx + b_3 dy + c_3 dz + \ldots + l_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= a_n dx + b_n dy + c_n dz + \ldots + l_n \end{aligned} \tag{7.44}$$

W równaniach tych zamiast niewiadomych $x, y, z, \ldots, u$, będących przeważnie dużymi liczbami, wprowadza się niewielkie liczbowo poprawki niewiadomych: $dx, dy, dz, \ldots, du$, które spełniają zależności:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + dx \\ y &= y_0 + dy \\ z &= z_0 + dz \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u &= u_0 + du \end{aligned} \tag{7.45}$$

Jeśli funkcje $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ mają charakter nieliniowy, wówczas w ramach utworzenia układu równań błędów (7.44) trzeba je doprowadzić do postaci liniowej poprzez rozwinięcie funkcji w szeregi Taylora (z odrzuceniem wyrazów rzędu wyższego niż pierwszy):

$$F_i(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz, \ldots) \cong$$

$$\cong F_i(x_0, y_0, z_0, \ldots) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)_0 dz + \cdots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial u}\right)_0 du \tag{7.46}$$

Współczynniki $a_i, b_i, c_i, \ldots$ przy niewiadomych $dx, dy, dz, \ldots$, występujące w równaniach błędów są równe pochodnym cząstkowym funkcji $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ względem poszczególnych niewiadomych, których wartość jest obliczana po podstawieniu do funkcji pochodnych przybliżonych wartości niewiadomych $x_0, y_0, z_0, \ldots$, czyli:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0 = a_i, \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0 = b_i, \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)_0 = c_i, \cdots \tag{7.47}$$

Wyrazy wolne l równań błędów powstaną jako różnice przybliżonych wartości funkcji $F(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ oraz spostrzeżeń L. Dla i-tego równania błędów wyraz wolny l_i wyniesie więc:

$$l_i = F_i(x_0, y_0, z_0, \ldots) - L_i \tag{7.48}$$

Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych równań poprawek trzeba wykonywać bardzo starannie, ponieważ ewentualne omyłki można wykryć dopiero po obliczeniu niewiadomych i spostrzeżeń wyrównanych, podczas kontroli generalnej. Wiąże się to z koniecznością poprawienia równań błędów i powtórzenia dużej partii obliczeń.

W układzie n równań błędów występuje $n+u$ nieznanych wielkości, tj. n poprawek: $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ oraz u niewiadomych: $dx, dy, dz, \ldots du$, a więc układu tego nie da się rozwiązać bez dodatkowego warunku. Do określenia tych wielkości jest więc konieczne wprowadzenie zasady najmniejszych kwadratów, która przyjmie postać: $[vv]$ = min. dla

spostrzeżeń pośredniczących jednakowo dokładnych lub $[pvv]$ = min. dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych. W tym celu za pomocą równań (7.44) zapiszemy funkcję $\Phi = [vv]$ (lub dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych $\Phi = [pvv]$).

$$\Phi = [vv] = (a_1dx + b_1 dy + c_1 dz+\ldots+ l_1)^2+ (a_2dx + b_2 dy + c_2 dz+\ldots+ l_2)^2 + \\ +(a_3dx + b_3 dy + c_3 dz+\ldots+ l_3)^2 +\ldots+ (a_n dx + b_n dy + c_n dz+\ldots+ l_n)^2$$

Po uporządkowaniu powyższego równania względem poszczególnych zmiennych oraz wprowadzeniu symboli sumowych typu:

$[aa] = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots a_n^2$; $[ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_nb_n \ldots$itd. otrzymamy:

$$\Phi = [vv] = [aa]dx^2 +2[ab]dx\,dy +2[ac]dx\,dz +\ldots+2[al]dx + 2[bc]dy\,dz+\ldots+[bb]dy^2+ \\ \ldots+2[bl]dy+\ldots+[cc]dz^2+\ldots+2[cl]dz+\ldots+[ll]$$

Warunkiem koniecznym, dla osiągnięcia minimum przez funkcję Φ, jest zerowanie się jej wszystkich pochodnych cząstkowych względem poszczególnych zmiennych. Można udowodnić, że jest to zarazem także warunek wystarczający.

$$\frac{\partial[vv]}{\partial dx} = 0\ ;\ \frac{\partial[vv]}{\partial dy} = 0\ ;\ \frac{\partial[vv]}{\partial dz} = 0\ ,\ldots$$

Pochodna funkcji Φ względem niewiadomej dx przyrównana do zera przyjmie postać równania:

$$\frac{\partial[vv]}{\partial dx} = 2[aa]dx+2[ab]dy+2[ac]dz+\ldots+2[al]=0$$

po zestawieniu pozostałych równań i podzieleniu ich przez 2 otrzymamy układ u liniowych *równań normalnych*, zawierający u niewiadomych:

$$\begin{aligned} &[aa]dx + [ab]dy + [ac]dz +\ldots+[al] = 0 \\ &[ab]dx + [bb]dy + [bc]dz +\ldots+[bl] = 0 \\ &[ac]dx + [bc]dy + [cc]dz +\ldots+ [cl] = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7.49}$$

Podczas wyrównania spostrzeżeń niejednakowo dokładnych we współczynnikach równań normalnych należy uwzględnić wagi p. Współczynniki przy niewiadomych w równaniach normalnych mają wtedy postać: $[paa]$, $[pab]$, $[pac]$, … itd. Układ równań normalnych przyjmie formę:

$$\begin{aligned} &[paa]dx + [pab]dy + [pac]dz +\ldots+[pal] = 0 \\ &[pab]dx + [pbb]dy + [pbc]dz +\ldots+[pbl] = 0 \\ &[pac]dx + [pbc]dy + [pcc]dz +\ldots+ [pcl] = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7.49 a}$$

Układ równań normalnych jest *układem symetrycznym*, tj. charakteryzującym się identycznym następstwem w poziomie i w pionie jednakowych współczynników przy niewiadomych. Oś symetrii układu symetrycznego stanowi linia łącząca jednoimienne współczynniki: $[aa]$, $[bb]$,$[cc]$,…, zwana *przekątną główną*.

Jednakowa ilość równań i niewiadomych pozwala na jednoznaczne obliczenie wartości liczbowych niewiadomych dx, dy ,dz,… za pomocą wybranego algorytmu obliczeniowego. Spośród różnych algorytmów najczęściej stosowane są: algorytm Gaussa, polegający na kolejnych redukcjach niewiadomych i algorytm Banachiewicza, oparty na algebrze krakowianowej. Do rozwiązywania układów symetrycznych możliwe jest również wykorzystanie rachunku wyznacznikowego lub macierzowego, o czym będzie szerzej mowa w rozdziale 8.

Po rozwiązaniu układu równań normalnych uzyskujemy wartości poprawek niewiadomych: dx, dy, dz,..., które zgodnie z zależnościami (7.45) dodajemy do przybliżonych wartości niewiadomych x_0, y_0, z_0,..., dzięki czemu otrzymamy najbardziej prawdopodobne (wyrównane) wartości niewiadomych x, y, z,.... W przypadku nieliniowości funkcji (7.43) proces iteracyjny rozwiązania równań będzie tym krótszy, im bardziej przyjęte wartości x_0, y_0, z_0,... będą bliższe niewiadomym wyrównanym.

Kolejnym etapem wyrównania jest obliczenie poprawek spostrzeżeń v otrzymywanych z równań błędów (7.44), po podstawieniu do nich poprawek niewiadomych dx, dy, dz,.... Następny krok stanowi poprawienie spostrzeżeń L poprzez dodanie do nich poprawek v, co w efekcie daje wartości spostrzeżeń wyrównanych $(L+v)$.

Kontrola ogólna wyrównania spostrzeżeń pośredniczących jednakowo dokładnych wymaga wcześniejszego obliczenia wartości $[vv]$ na podstawie realizacji równań (7.44), a następnie ponownym jej obliczeniu z zależności:

$$[al]dx + [bl]dy + [cl]dz + \ldots + [ll] = [vv] \tag{7.50}$$

Kontrolę stanowi zgodność obu wyników obliczeń $[vv]$. Dla spostrzeżeń pośredniczących niejednakowo dokładnych analogiczny wzór kontroli ogólnej przyjmie postać:

$$[pal]dx + [pbl]dy + [pcl]dz + \ldots + [pll] = [pvv] \tag{7.50a}$$

W charakterze kontroli można także wykorzystywać związki:

- dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych:

$$[lv] = [vv];\ [av] = 0;\ [bv] = 0;\ [cv] = 0;\ \ldots \tag{7.51}$$

- dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych:

$$[plv] = [pvv];\ [pav] = 0;\ [pbv] = 0;\ [pcv] = 0;\ \ldots \tag{7.51a}$$

Kontrola generalna (ostateczna) wyrównania spostrzeżeń pośredniczących polega na podstawieniu wartości niewiadomych do równań wyjściowych, czyli równań obserwacyjnych (7.43) i sprawdzeniu ich spełnienia. Dopuszczalne są niezgodności wynikające tylko z zaokrągleń podczas rachunku. Brak zgodności w kontroli generalnej może świadczyć między innymi o nieprawidłowościach w zestawieniu równań poprawek, czego konsekwencją jest niestety konieczność powtórzenia całego wyrównania.

Końcowy etap wyrównania spostrzeżeń pośredniczących stanowi ocena dokładności polegająca na obliczeniu średnich błędów obserwacji, niewiadomych i położenia punktów. Dodatkową ilustracją graficzną dokładności położenia poszczególnych punktów sieci może stanowić wykreślenie dla nich elips błędów. Możliwe jest również obliczenie błędów funkcji niewiadomych i spostrzeżeń wyrównanych. Dokładniejsze informacje na ten temat są podawane w podręcznikach rachunku wyrównawczego.

Na podstawie znanych wartości poprawek v można określić średni błąd pojedynczego spostrzeżenia, który dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych wyraża się wzorem:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} \tag{7.52}$$

Dla określenia średniego błędu spostrzeżenia typowego szeregu spostrzeżeń niejednakowo dokładnych posługujemy się wzorem:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} \tag{7.52a}$$

Jak wiemy różnica: $n - u$ odpowiadą ilości spostrzeżeń nadliczbowych n_n. Przypomnijmy, że podczas wyrównania spostrzeżeń bezpośrednich, gdzie występuje tylko jedna niewiadoma ($u = 1$), analogiczna różnica we wzorze na błąd średni jednostkowy, odpowiadająca ilości spostrzeżeń nadliczbowych wynosi $n - 1$ (por. wzory: 7.29 i 7.39).

Do określenia średnich błędów niewiadomych konieczne jest wyznaczenie tzw. *współczynników wagowych Q*. Jednym ze sposobów ich wyznaczenia jest rozwiązanie podobnego do układu równań normalnych, specyficznego układu równań zwanych *równaniami wag* lub *równaniami Hansena*. Łączna ilość tych równań wynosi u^2. Dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych i trzech niewiadomych (u=3) układ równań wag przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
[aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13} &= 1\\
[ab]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13} &= 0\\
[ac]Q_{11} + [bc]Q_{12} + [cc]Q_{13} &= 0\\[4pt]
[aa]Q_{21} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} &= 0\\
[ab]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{23} &= 1\\
[ac]Q_{21} + [bc]Q_{22} + [cc]Q_{23} &= 0\\[4pt]
[aa]Q_{31} + [ab]Q_{32} + [ac]Q_{33} &= 0\\
[ab]Q_{31} + [bb]Q_{32} + [bc]Q_{33} &= 0\\
[ac]Q_{31} + [bc]Q_{32} + [cc]Q_{33} &= 1
\end{aligned} \tag{7.53}$$

Własnością współczynników wagowych jest równość współczynników o jednakowych wskaźnikach, niezależnie od kolejności ich zapisu, czyli: $Q_{ij} = Q_{ji}$, stąd ilość niewiadomych w układzie równań wag zamiast u^2 wynosi $^1/_2\, u(u+1)$. Prawa strona równań wag jest dla większości z nich równa zero, natomiast jedynka występuje w tych równaniach, w których kwadratowe współczynniki równań normalnych spotykają się w tym samym iloczynie z współczynnikami wagowymi o identycznych wskaźnikach np. $[aa]Q_{11}$, $[bb]Q_{22}$, $[cc]Q_{33}$. Do wyznaczenia współczynników Q stosuje się podobne algorytmy i metody, które wcześniej są wykorzystywane do rozwiązywania układów równań normalnych.

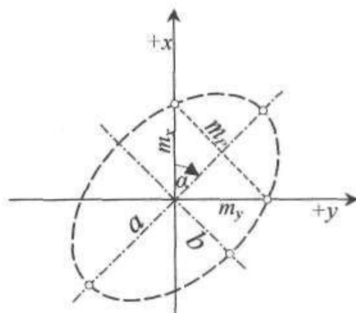
Średnie błędy poszczególnych niewiadomych określają wzory:

$$m_x = m_0\sqrt{Q_{11}}\,; \qquad m_y = m_0\sqrt{Q_{22}}\,; \qquad m_z = m_0\sqrt{Q_{33}} \tag{7.54}$$

Ocena dokładności osnów geodezyjnych opiera się przeważnie na wyznaczeniu po wyrównaniu średnich błędów: m_x, m_y współrzędnych punktów wyznaczanych, stanowiących niewiadome w metodzie pośredniczącej oraz średniego błędu położenia punktu obliczanego na podstawie wzoru:

$$m_P = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \tag{7.55}$$

Wielkości m_x, m_y m_P nie pozwalają jednak na stwierdzenie, w którym kierunku wystąpią błędy: maksymalny i minimalny. Określenie wartości ukierunkowanych błędów oznaczonych na rys. 7.9 symbolami a, b^* w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach oraz kąta kierunkowego α, jaki odcinek a (dłuższa półoś) tworzy z dodatnim kierunkiem osi x, jest wyznaczeniem parametrów elipsy błędów danego punktu sieci tj. wielkości półosi i ich orientacji. Ich wartości można obliczyć na podstawie współczynników wagowych związanych z rozpatrywanym punktem P: Q_{xx}, Q_{xy}, Q_{yy} i średni błąd jednostkowy m_0 w oparciu o wzory:



Rys. 7.9. Elipsa błędów

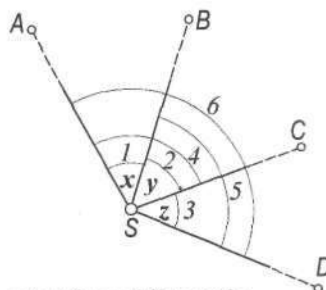
$$\begin{cases} a^2 = m_0^2(\cos^2\alpha \cdot Q_{xx} + \sin^2\alpha \cdot Q_{yy} + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot Q_{xy}) \\ b^2 = m_0^2(\cos^2\alpha \cdot Q_{yy} + \sin^2\alpha \cdot Q_{xx} - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot Q_{xy}) \\ \mathrm{tg}\, 2\alpha = \dfrac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \end{cases} \tag{7.56}$$

Przykład:

Wyrównać metodą pośredniczącą jednakowo dokładne kąty pomierzone na pojedynczym stanowisku pomiarowym S.

Dane:

Nr kąta	Wartość kąta		
	g	c	cc
1	40	00	05
2	50	00	03
3	55	00	02
4	90	00	05
5	105	00	00
6	145	00	02



1. Wybór niewiadomych i określenie ich wartości przybliżonych:
   $x_0 = 40^g00^c00^{cc}$; $y_0 = 50^g00^c00^{cc}$; $z_0 = 55^g00^c00^{cc}$
2. Zestawienie równań obserwacyjnych i równań błędów:

Równania obserwacyjne:	Równania błędów:
$L_1+v_1 = x$	$v_1 = dx \quad -5$
$L_2+v_2 = y$	$v_2 = dy \quad -3$
$L_3+v_3 = z$	$v_3 = dz \quad -2$
$L_4+v_4 = x + y$	$v_4 = dx + dy \quad -5$
$L_5+v_5 = y + z$	$v_5 = dy + dz$
$L_6+v_6 = x + y + z$	$v_6 = dx + dy + dz \quad -2$

* Stosuje się również oznaczenia: m_a, m_b.

Stabelaryzowane równania błędów:

Nr poprawki	Współczynniki przy niewiadomych			Wyrazy wolne	Sumy
	a	*b*	*c*	*l*	*s*
1	+1	•	•	-5	-4
2	•	+1	•	-3	-2
3	•	•	+1	-2	-1
4	+1	+1	•	-5	-3
5	•	+1	+1	0	+2
6	+1	+1	+1	-2	+1
Sumy Σ	+3	+4	+3	-17	+7

3. Zestawienie równań normalnych w formie tabelarycznej:

Ozn.	a]	b]	c]	l]	s]
[a	3,00	2,00	1,00	-12,00	-6,00
[b	2,00	4,00	2,00	-10,00	-2,00
[c	1,00	2,00	3,00	-4,00	+2,00
[l	-12,00	-10,00	-4,00	+67,00	+41,00
[s	-6,00	-2,00	+2,00	+41,00	+35,00

4. Obliczenie przyrostów niewiadomych:

$dx = +3{,}5^{cc}$; $dy = +1{,}00^{cc}$; $dz = -0{,}5^{cc}$

5. Sprawdzenie poprawności rozwiązania układu równań normalnych:

Kontrolne równanie sumowe układu równań normalnych: $6dx+8dy+6dz-26=0$

$$6\cdot 3{,}5+8\cdot 1+6\cdot(-0{,}5)-26=21+8-3-26=0$$

6. Obliczenie poprawek:

$$v_1 = dx \qquad -5 = -1{,}5^{cc}$$
$$v_2 = \qquad dy \qquad -3 = -2{,}0^{cc}$$
$$v_3 = \qquad\qquad dz \quad -2 = -2{,}5^{cc}$$
$$v_4 = dx + dy \qquad -5 = -0{,}5^{cc}$$
$$v_5 = \qquad dy + dz \qquad = +0{,}5^{cc}$$
$$v_6 = dx + dy + dz \quad -2 = +2{,}0^{cc}$$

$$[vv] = 17{,}00$$

7. Kontrola ogólna:

$$[vv] = [al]dx + [bl]dy + [cl]dz + [ll] = -12\cdot 3{,}5 - 10\cdot 1 - 4\cdot(-0{,}5) + 67 = -42-10+2+67=17$$

8. Obliczenie niewiadomych:

$$x = x_0 + dx = 40^g00^c00^{cc}+3{,}5^{cc} = 40^g00^c03{,}5^{cc};$$
$$y = y_0 + dy = 50^g00^c00^{cc}+1{,}0^{cc} = 50^g00^c01{,}0^{cc};$$
$$z = z_0 + dz = 55^g00^c00^{cc}-0{,}5^{cc} = 54^g99^c99{,}5^{cc}$$

9. Spostrzeżenia wyrównane :

$$L_1 + v_1 = 40^g00^c05^{cc}-1{,}5^{cc} = 40^g00^c03{,}5^{cc}$$
$$L_2 + v_2 = 50^g00^c03^{cc}-2{,}0^{cc} = 50^g00^c01{,}0^{cc}$$
$$L_3 + v_3 = 55^g00^c02^{cc}-2{,}5^{cc} = 54^g99^c99{,}5^{cc}$$
$$L_4 + v_4 = 90^g00^c05^{cc}-0{,}5^{cc} = 90^g00^c04{,}5^{cc}$$
$$L_5 + v_5 = 105^g00^c00^{cc}+0{,}5^{cc} = 105^g00^c00{,}5^{cc}$$
$$L_6 + v_6 = 145^g00^c02^{cc}+2{,}0^{cc} = 145^g00^c04{,}0^{cc}$$

10. Kontrola generalna:

$L_1 + v_1 = x \quad = 40^g 00^c 03{,}5^{cc}$
$L_2 + v_2 = y \quad = 50^g 00^c 01{,}0^{cc}$
$L_3 + v_3 = z \quad = 54^g 99^c 99{,}5^{cc}$
$L_4 + v_4 = x + y \quad = 90^g 00^c 04{,}5^{cc}$
$L_5 + v_5 = y + z \quad = 105^g 00^c 00{,}5^{cc}$
$L_6 + v_6 = x + y + z \quad = 145^g 00^c 04{,}0^{cc}$

11. Ocena dokładności:

Średni błąd pojedynczego kąta: $m = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{n-u}} = \pm\sqrt{\dfrac{17{,}00}{6-3}} = \pm\, 2{,}4^{cc}$

Współczynniki wagowe:
$Q_{11} = 0{,}50\ ;\quad Q_{12} = -0{,}25\ ;\quad Q_{13} = 0$
$Q_{21} = -0{,}25\ ;\quad Q_{22} = 0{,}50\ ;\quad Q_{23} = -0{,}25$
$Q_{31} = 0;\quad Q_{32} = -0{,}25\ ;\quad Q_{33} = 0{,}50$

Średnie błędy niewiadomych:

$m_x = m\sqrt{Q_{11}} = \pm 1{,}7^{cc};\quad m_y = m\sqrt{Q_{22}} = \pm 1{,}7^{cc};\quad m_z = m\sqrt{Q_{33}} = \pm 1{,}7^{cc}.$

7.7. Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych (metoda warunkowa)

Spostrzeżeniami zawarunkowanymi nazywamy wyniki pomiarów geodezyjnych, odnoszące się do takich wielkości, których wartości prawdziwe muszą spełniać z góry wiadome i ściśle określone równania matematyczne, zwane *warunkami*.

Podczas układania równań warunkowych należy przestrzegać następujących zasad:

1. Ilość warunków r musi być równa ilości spostrzeżeń nadliczbowych n_n.
2. Warunki należy układać tak, aby liczba zawartych w nich spostrzeżeń była jak najmniejsza, lecz jednocześnie w układzie równań warunkowych muszą wystąpić wszystkie spostrzeżenia danego zadania.
3. Warunki mają być niezależne od siebie tzn. takie, aby żadnego z nich nie można było wyliczyć z pozostałych równań warunkowych.

Prostymi przykładami równań warunkowych są: warunek sumy kątów w trójkącie lub dowolnym wieloboku zamkniętym, warunek sumy kątów równej 360° dla kątów zamykających horyzont, zerowanie się sumy różnic wysokości w ciągu niwelacyjnym zamkniętym itp. Liczba warunków jest zawsze mniejsza od liczby n, czyli ilości spostrzeżeń ($r<n$), ponieważ w przeciwnym przypadku wielkości, występujące w równaniach jako niewiadome, dałoby się wyznaczyć na podstawie równań warunkowych, a więc nie byłoby potrzeby ich pomiaru.

W ramach wyrównania spostrzeżeń zawarunkowanych przyjmowane jest założenie, że równania warunkowe muszą spełniać nie tylko wartości prawdziwe mierzonych wielkości, lecz także spostrzeżenia wyrównane ($L+v$). W postaci ogólnej równania warunkowe można przedstawić jako równość funkcji spostrzeżeń wyrównanych f i określonych wartości liczbowych w. Układ r równań można zapiszemy następująco:

$$\left.\begin{aligned} f_1(L_1+v_1, L_2+v_2, L_3+v_3 \ldots, L_n+v_n) &= w_1 \\ f_2(L_1+v_1, L_2+v_2, L_3+v_3 \ldots, L_n+v_n) &= w_2 \\ f_3(L_1+v_1, L_2+v_2, L_3+v_3 \ldots, L_n+v_n) &= w_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(L_1+v_1, L_2+v_2, L_3+v_3 \ldots, L_n+v_n) &= w_r \end{aligned}\right\}\ r \text{ równań} \qquad (7.57)$$

W przypadku, gdy funkcje: $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_r$, występujące w równaniach warunkowych są funkcjami nieliniowymi, należy je doprowadzić do postaci liniowej, rozwijając funkcję w szereg Taylora z pominięciem wyrazów o potędze wyższej niż pierwsza.

Przekształcony w ten sposób układ warunkowych określany jako układ *równań odchyłek* można zapisać następująco:

$$\left.\begin{array}{l} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n + \omega_a = 0 \\ b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + \ldots + b_nv_n + \omega_b = 0 \\ c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \ldots + c_nv_n + \omega_c = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 + \ldots + r_nv_n + \omega_r = 0 \end{array}\right\} r \text{ równań} \tag{7.58}$$

lub w formie skróconej:

$$[av] + \omega_a = 0;\ [bv] + \omega_b = 0;\ [cv] + \omega_c = 0;\ \ldots;\ [rv] + \omega_r = 0 \tag{7.58a}$$

Współczynniki: $a, b, c, \ldots$ obecne w układzie (7.58) przy poprawkach stanowią pochodne cząstkowe funkcji: $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_r$ względem poszczególnych spostrzeżeń: L_1, L_2, L_3, $\ldots L_n$. Do pochodnych tych jako nowych funkcji podstawiamy rezultaty pomiarów L, uzyskując zamiast funkcji pochodnych konkretne wartości liczbowe.

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial L_1}\right)_0 = a_1;\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial L_2}\right)_0 = a_2;\cdots\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial L_1}\right)_0 = b_1;\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial L_2}\right)_0 = b_2;\cdots \text{ itd.}$$

Występujące w układzie (7.58) wyrazy wolne ω, zwane *odchyłkami*, obliczymy jako różnice wyrazów wolnych w wyjściowych równaniach warunkowych (7.57) i występujących w nich funkcji f, do których podobnie jak poprzednio podstawimy wartości spostrzeżeń L. Zgodnie z powyższą zasadą odchyłka j-tego równania, obliczona jako różnica wartości praktycznej i teoretycznej, wyniesie:

$$\omega_j = f_j(L_1, L_2, L_3, \ldots L_n) - w_j \tag{7.59}$$

Układ (7.58) złożony z r równań warunkowych zawiera n nieznanych poprawek spostrzeżeń, przy czym $r<n$, a więc jest układem niedookreślonym, w którym nie można jednoznacznie uzyskać niewiadomych: $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ bez wprowadzenia dodatkowego założenia. Założeniem tym jest realizacja przez poprawki zasady najmniejszej sumy kwadratów błędów pozornych: $[vv]$ = min. lub $[pvv]$ = min. Oprócz równań warunkowych błędy pozorne v otrzymywane w toku wyrównania spostrzeżeń zawarunkowanych muszą więc dodatkowo spełniać powyższą zasadę, co pozwala na sformułowanie ogólnego warunku, w oparciu o funkcję Ψ zwaną *funkcją Lagrange'a*, która dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych przyjmie postać:

$$\begin{array}{l} \Psi=[pvv]-2k_a(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\ldots+a_nv_n+\omega_a)-2k_b(b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\ldots+b_nv_n+\omega_b)+ \\ -2k_c(c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\ldots+c_nv_n+\omega_c)-\ldots-2k_r(r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3+\ldots+r_nv_n+\omega_r)=\text{minimum} \end{array} \tag{7.60}$$

czyli:

$$\begin{array}{l} \Psi=p_1v_1^2+p_1v_1^2+p_1v_1^2+\ldots p_1v_1^2-2k_a(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\ldots+a_nv_n+\omega_a)+ \\ -2k_b(b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\ldots+b_nv_n+\omega_b)-2k_c(c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\ldots+c_nv_n+\omega_c)-\ldots \\ \ldots-2k_r(r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3+\ldots+r_nv_n+\omega_r) = \text{minimum} \end{array}$$

Należy zauważyć, że funkcja Ψ jest w rzeczywistości równa $[pvv]$, ponieważ w równaniu (7.60) wewnątrz nawiasów znajdują się lewe strony równań odchyłek, które zgodnie zależnościami (7.58) są równe zero.

Nowe niewiadome: $k_a, k_b, k_c, \ldots, k_r$, występujące w zapisie funkcji Ψ, są nieoznaczonymi współczynnikami, noszącymi nazwę *korelat*. Ich wartości zostaną określone w dalszym toku postępowania, podczas rozwiązania specyficznego układu równań, zwa-

nego *układem równań normalnych korelat*. Układ ten powstaje jako efekt końcowy przekształcenia równań poprawek wyrażonych przez korelaty, utworzonych po zastosowaniu warunku minimum funkcji Ψ, czyli obliczeniu i przyrównaniu do zera jej pochodnych cząstkowych względem poszczególnych poprawek.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v_1} = 2p_1v_1 - 2k_a a_1 - 2k_b b_1 - 2k_c c_1 \ldots - 2k_r r_1 = 0$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial v_2} = 2p_2v_2 - 2k_a a_2 - 2k_b b_2 - 2k_c c_2 \ldots - 2k_r r_2 = 0$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial v_3} = 2p_3v_3 - 2k_a a_3 - 2k_b b_3 - 2k_c c_3 \ldots - 2k_r r_3 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial v_n} = 2p_nv_n - 2k_a a_n - 2k_b b_n - 2k_c c_n \ldots - 2k_r r_n = 0$$

Po przekształceniu powyższych związków otrzymamy dla spostrzeżeń zawarunkowanych, niejednakowo dokładnych następujący układ n równań, zwany *układem równań błędów wyrażonych przez korelaty*. Układ ten przypomina układ równań błędów (7.44) metody pośredniczącej, lecz tu nie występują wyrazy wolne.

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1}{p_1}k_a + \frac{b_1}{p_1}k_b + \frac{c_1}{p_1}k_c + \ldots + \frac{r_1}{p_1}k_r \\ v_2 &= \frac{a_2}{p_2}k_a + \frac{b_2}{p_2}k_b + \frac{c_2}{p_2}k_c + \ldots + \frac{r_2}{p_2}k_r \\ v_3 &= \frac{a_3}{p_3}k_a + \frac{b_3}{p_3}k_b + \frac{c_3}{p_3}k_c + \ldots + \frac{r_3}{p_3}k_r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= \frac{a_n}{p_n}k_a + \frac{b_n}{p_n}k_b + \frac{c_n}{p_n}k_c + \ldots + \frac{r_n}{p_n}k_r \end{aligned}\right\} n \text{ równań} \qquad (7.61)$$

Dla obserwacji jednakowo dokładnych wagi p wszystkich spostrzeżeń są równe 1, toteż prawe strony równań układu równań błędów dla tych spostrzeżeń nie zawierają wag, lecz sumy iloczynów współczynników $a, b, c, \ldots$ i korelat. Przykładowe równanie poprawki i-tego spostrzeżenia jednakowo dokładnego zapiszemy więc następująco:

$$v_i = a_i k_a + b_i k_b + c_i k_c + \ldots + r_i k_r \qquad (7.61\ a)$$

Powyższego układu równań nie da się rozwiązać, ponieważ n równań zawiera $n + r$ nieznanych wielkości (tj. n – poprawek i r – korelat). W celu wyeliminowania poprawek z układu równań odchyłek wprowadzamy do tych równań zależności (7.61). Przykładowo dla pierwszego równania układu (7.58), czyli $[av] + \omega_a = 0$, otrzymamy:

$$a_1\left(\frac{a_1}{p_1}k_a + \frac{b_1}{p_1}k_b + \frac{c_1}{p_1}k_c + \ldots + \frac{r_1}{p_1}k_r\right) + \quad a_2\left(\frac{a_2}{p_2}k_a + \frac{b_2}{p_2}k_b + \frac{c_2}{p_2}k_c + \ldots + \frac{r_2}{p_2}k_r\right) + \ldots$$
$$\ldots + a_n\left(\frac{a_n}{p_n}k_a + \frac{b_n}{p_n}k_b + \frac{c_n}{p_n}k_c + \ldots + \frac{r_n}{p_n}k_r\right) + \omega_a = 0$$

Po wymnożeniu wyrazów w nawiasach, pogrupowaniu poszczególnych wyrazów względem korelat oraz wprowadzeniu znanych symboli sumowych otrzymamy pierwsze równanie układu *równań normalnych korelat*. Podobnie możemy uzyskać pozostałe równania układu, który zapisany już w całości przybierze następującą postać:

$$\left.\begin{array}{l}\left[\frac{aa}{p}\right]\cdot k_a+\left[\frac{ab}{p}\right]\cdot k_b+\left[\frac{ac}{p}\right]\cdot k_c+\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]\cdot k_r+\omega_a=0\\ \left[\frac{ab}{p}\right]\cdot k_a+\left[\frac{bb}{p}\right]\cdot k_b+\left[\frac{bc}{p}\right]\cdot k_c+\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]\cdot k_r+\omega_b=0\\ \left[\frac{ac}{p}\right]\cdot k_a+\left[\frac{bc}{p}\right]\cdot k_b+\left[\frac{cc}{p}\right]\cdot k_c+\cdots+\left[\frac{cr}{p}\right]\cdot k_r+\omega_c=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left[\frac{ar}{p}\right]\cdot k_a+\left[\frac{br}{p}\right]\cdot k_b+\left[\frac{cr}{p}\right]\cdot k_c+\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]\cdot k_r+\omega_r=0\end{array}\right\} r \text{ równań} \tag{7.62}$$

Symetryczny układ równań normalnych korelat, zawierający r równań i tyle samo niewiadomych, można rozwiązać za pomocą typowych algorytmów, które były także stosowane do rozwiązywania równań normalnych metody pośredniczącej. Dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych układ równań normalnych korelat nie zawiera wag.

Po obliczeniu wartości korelat: k_a, k_b, k_c, ... k_r, podstawiamy je do układu równań błędów wyrażonych przez korelaty (7.61), co pozwoli na wyznaczenie poprawek v niezbędnych do wyrównania spostrzeżeń L.

Podobnie jak podczas wyrównania spostrzeżeń pośredniczących do sprawdzenia obliczeń wykorzystujemy kontrolę ogólną, która polega na dwukrotnym obliczeniu wartości sumy pvv (lub $[vv]$). Pierwsze obliczenie wykonujemy na podstawie wartości poprawek otrzymanych z układu (7.60), natomiast drugie – na podstawie wzoru:

$$[pvv] = -[\omega \cdot k] \tag{7.63}$$

który dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych przyjmie postać:

$$[vv] = -[\omega \cdot k] \tag{7.63 a}$$

Wzór (7.63) wyprowadzimy dodając stronami równania układu (7.61), z których każde będzie wcześniej pomnożone obustronnie przez odpowiedni iloczyn wag i poprawek: $p_i v_i$.

Kontrola generalna wyrównania polega na sprawdzeniu spełnienia wyjściowych warunków (7.57) po podstawieniu do nich spostrzeżeń wyrównanych (L+v).

Ocena dokładności spostrzeżeń zawarunkowanych polega przede wszystkim na obliczeniu średniego błędu pojedynczego spostrzeżenia m lub spostrzeżenia typowego m_0 na podstawie wzorów:

dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych: $$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{r}} \tag{7.64}$$

lub dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych: $$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} \tag{7.64 a}$$

Średnie błędy poszczególnych spostrzeżeń niejednakowo dokładnych otrzymamy jako:

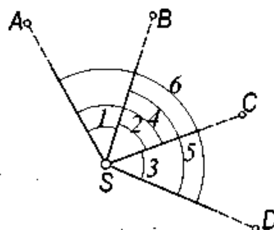
$$m_i = \pm \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} \tag{7.65}$$

Przykład:

Wykonać wyrównanie metodą warunkową kątów pomierzonych z jednakową dokładnością na pojedynczym stanowisku pomiarowym S wg danych z zadania obliczonego wcześniej metodą pośredniczącą.

Dane:

Nr kąta	Wartość kąta g	c	cc
1	40	00	05
2	50	00	03
3	55	00	02
4	90	00	05
5	105	00	00
6	145	00	02



$n=6$; $u=3$; $n_n=r=3$

1. Ułożenie równań warunkowych:
   $L_1+v_1+L_2+v_2=L_4+v_4$
   $L_2+v_2+L_3+v_3=L_5+v_5$
   $L_1+v_1+L_2+v_2+L_3+v_3=L_6+v_6$

2. Obliczenie odchyłek:
   $\omega_a=L_1+L_2-L_4=+3^{cc}$
   $\omega_b=L_2+L_3-L_5=+5^{cc}$
   $\omega_c=L_1+L_2+L_3-L_6=+8^{cc}$

3. Zestawienie równań odchyłek:
   $v_1+v_2 \quad -v_4 \quad +3=0$
   $v_2+v_3 \quad -v_5 \quad +5=0$
   $v_1+v_2+v_3 \quad -v_6 \quad +8=0$

Ozn.	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	ω	s
a	+1	+1	•	-1	•	•	+3	+4
b	•	+1	+1	•	-1	•	+5	+6
c	+1	+1	+1	•	•	-1	+8	+10
Σ	+2	+3	+2	-1	-1	-1	+16	+20

4. Zestawienie równań normalnych korelat:

$[aa]=3 \quad [ab]=1 \quad [ac]=2$
$[ab]=1 \quad [bb]=3 \quad [bc]=2$
$[ac]=2 \quad [bc]=2 \quad [cc]=4$
$[a\Sigma]=6 \quad [b\Sigma]=6 \quad [c\Sigma]=8$

$3k_a + k_b + 2k_c + 3 = 0$
$k_a + 3k_b + 2k_c + 5 = 0$
$2k_a + 2k_b + 4k_c + 3 = 0$

5. Rozwiązanie równań normalnych korelat:
   $k_a=+0{,}5 \quad k_b=-0{,}5 \quad k_c=-2{,}0$

6. Wyznaczenie równań poprawek wyrażonych przez korelaty i poprawek:

$v_1 = -1,5^{cc}$
$v_2 = -2,0^{cc}$
$v_3 = -2,5^{cc}$
$v_4 = -0,5^{cc}$
$v_5 = +0,5^{cc}$
$v_6 = +2,0^{cc}$
$[vv] = 17$

Ozn.	k_a=+0,5	k_b=-0,5	k_b=-2,0	v
v_1	+1		+1	-1,5
v_2	+1	+1	+1	-2,0
v_3	•	+1	+1	-2,5
v_4	-1	•	•	-0,5
v_5	•	-1	•	+0,5
v_6	•	•	-1	+2,0

7. Kontrola ogólna:

$[vv] = -[\omega \cdot k] = -(3 \cdot 0,5 - 5 \cdot 0,5 - 8 \cdot 2) = 17$

8. Spostrzeżenia wyrównane:

$L_1 + v_1 = 40^g00^c05^{cc} - 1,5^{cc} = 40^g00^c03,5^{cc}$
$L_2 + v_2 = 50^g00^c03^{cc} - 2,0^{cc} = 50^g00^c01,0^{cc}$
$L_3 + v_3 = 55^g00^c02^{cc} - 2,5^{cc} = 54^g99^c99,5^{cc}$
$L_4 + v_4 = 90^g00^c05^{cc} - 0,5^{cc} = 90^g00^c04,5^{cc}$
$L_5 + v_5 = 105^g00^c00^{cc} + 0,5^{cc} = 105^g00^c00,5^{cc}$
$L_6 + v_6 = 145^g00^c02^{cc} + 2,0^{cc} = 145^g00^c04,0^{cc}$

9. Kontrola generalna:

$L_1+v_1+L_2+v_2 = 90^g00^c04,5^{cc} = L_4+v_4$
$L_2+v_2+L_3+v_3 = 105^g00^c00,5^{cc} = L_5+v_5$
$L_1+v_1+L_2+v_2+L_3+v_3 = 145^g00^c04,0^{cc} = L_6+v_6$

10. Obliczenie średniego błędu pojedynczego spostrzeżenia:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{17,00}{3}} = \pm 2,4^{cc}$$

Zestawiając rezultaty wyrównania tego samego zadania obydwiema metodami: pośredniczącą i warunkową, możemy stwierdzić, że metody te, dając identyczne wyniki wyrównania obserwacji, są matematycznie równorzędne.

Równorzędność obu metod nasuwa problem ustalenia kryterium dokonania wyboru metody wyrównania. Przy tradycyjnych metodach wykonywania obliczeń głównym kryterium wyboru była ilość równań normalnych, niezbędnych do rozwiązania danego zadania. Ze względów ekonomicznych preferowana była ta metoda, która prowadziła do mniejszej liczby równań normalnych. W metodzie pośredniczącej liczba ta jest równa liczbie niewiadomych u, natomiast w metodzie warunkowej ilość równań normalnych jest równa liczbie warunków r, która jak wiemy jest tożsama z ilością spostrzeżeń nadliczbowych, czyli: $r = n - u$, a stąd:

$$u = n - r \tag{7.66}$$

Biorąc pod uwagę kryterium liczby równań normalnych, wybierzemy metodę pośredniczącą w przypadku gdy $r > u$, zaś po uwzględnieniu zależności (7.66) otrzymamy nierówność: $r > n - r$, czyli $2r > n$, a więc:

- wybierzemy metodę pośredniczącą, gdy:

$$r > \frac{n}{2}. \tag{7.67}$$

Jeżeli $r < u$, to mniej równań normalnych wystąpi w metodzie warunkowej, zaś po uwzględnieniu wzoru (7.66) nierówność ta może być zapisana jako: $r < n - r$, a więc:

- wybierzemy metodę warunkową, gdy:

$$r < \frac{n}{2}. \tag{7.68}$$

Przy zastosowaniu współczesnej techniki obliczeniowej różnice w ilości równań normalnych obu metod nie mają istotnego znaczenia dla procesu rachunkowego, toteż w ramach układania komputerowych programów obliczeniowych z reguły wykorzystuje się wyrównanie metodą pośredniczącą, która zapewnia lepszą jednolitość i przejrzystość postępowania oraz wygodniejszą ocenę dokładności.

Rozdział 8: Elementy rachunku wyznacznikowego i macierzowego

A. WYZNACZNIKI

8.1. Pojęcie tablicy liczbowej i wyznacznika

Wyznacznik określany jest jako liczba przyporządkowana w określony sposób danej *kwadratowej tablicy liczbowej*. Tablica ta posiadająca jednakową liczbę wierszy – w i kolumn – k równą naturalnej liczbie n ($w=k=n$), obejmuje n^2 elementów liczbowych i jest tablicą kwadratową n-tego stopnia.

a)

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

lub

b)

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & n_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & n_n \end{Vmatrix}$$

Rys. 8.1. Oznaczenia elementów tablicy kwadratowej

Dla odróżnienia tablicy liczbowej od wyznacznika, tablicę ujmujemy z boków linią podwójną, zaś wyznacznik – linią pojedynczą. Podobnie jak w omówionych dalej macierzach poszczególne elementy tablicy, możemy oznaczać jej symbolem np. a i wskaźnikami: 1) wiersza, 2) kolumny (rys. 8.1 a) lub w każdej kolumnie stosować inne symbole literowe, przy których umieszcza się tylko wskaźnik wiersza (rys. 8.1 b). Stopień n liczbowej tablicy kwadratowej określają jej wymiary, czyli ilość k zawartych w niej kolumn lub ilość w wierszy ($n = w = k$).

przekątna główna

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{Vmatrix}$$

tablica 3 stopnia — tablica 2 stopnia

Rys. 8.2. Stopnie i przekątne główne tablic

W tablicy kwadratowej wyróżniamy *przekątną główną* złożoną z elementów przekątnych, biegnącą od narożnego, lewego górnego elementu do ostatniego, prawego dolnego elementu. Wskaźniki wierszy i kolumn elementów przekątnych, oznaczane zgodnie z rys. 8.1 a, są jednakowe np. $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots a_{nn}$.

Iloczynem składowym tablicy nazywamy iloczyn, w którym każdy element pochodzi z innej kolumny i innego wiersza. Zapis iloczynów najwygodniej jest prowadzić kolumnami na zasadzie: pierwszy element 1 kolumny × drugi element 2 kolumny × trzeci element 3 kolumny itd.

Dla tablic drugiego i trzeciego stopnia można zestawić następujące iloczyny składowe:

- $\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}$ $a_1 \cdot b_2$ oraz $a_2 \cdot b_1$ (2 iloczyny),
- $\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}$ $a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$; $a_1 \cdot b_3 \cdot c_2$; $a_2 \cdot b_1 \cdot c_3$; $a_2 \cdot b_3 \cdot c_1$; $a_3 \cdot b_1 \cdot c_2$; $a_3 \cdot b_2 \cdot c_1$ (6 iloczynów).

Tablica n-tego stopnia umożliwia utworzenie $n!$ (n silnia) iloczynów składowych.

Do ścisłego zdefiniowania pojęcia wyznacznika konieczne jest wprowadzenie pojęcia tzw. *współczynnika inwersyjnego k*, który może przybierać tylko dwie wartości: +1 lub −1. *Inwersja* (nieuporządkowanie) w ciągu liczb jest to fakt występowania liczb większych przed mniejszymi. Ilość inwersji (*inv*) w ciągu liczb naturalnych jest równa ilości zdarzeń, kiedy liczba większa jest poprzedzona liczbą mniejszą np. ciąg: 1, 5, 3, 2, 4 zawiera 4 inwersje (5 przed 3, 3 przed 2, 5 przed 2, 5 przed 4). Przy obliczaniu współczynnika inwersyjnego liczba *inv* stanowi wykładnik potęgi przy podstawie −1.

Współczynnik k wynosi zatem:

$$k = -1^{inv} \tag{8.1}$$

- $k = +1$, gdy liczba *inv* jest parzysta;
- $k = -1$, gdy liczba *inv* jest nieparzysta.

Każdemu iloczynowi składowemu tablicy odpowiada określony współczynnik k, zależny od ilości inwersji w ciągu liczb naturalnych utworzonym ze wskaźników elementów danego iloczynu. Iloczyny składowe tablicy 3 stopnia zawierają ilości inwersji podane w tabeli 8.1:

Tabela 8.1. Inwersje iloczynów składowych tablicy trzeciego stopnia

L.p.	Iloczyn składowy	Inwersje	Ilość inwersji	Współczynnik inwersyjny k
1	$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3$	brak	0	$(-1)^0 = +1$
2	$a_1 \cdot b_3 \cdot c_2$	2 przed 3	1	$(-1)^1 = -1$
3	$a_2 \cdot b_1 \cdot c_3$	1 przed 2	1	$(-1)^1 = -1$
4	$a_2 \cdot b_3 \cdot c_1$	1 przed 2; 2 przed 3	2	$(-1)^2 = +1$
5	$a_3 \cdot b_1 \cdot c_2$	1 przed 3; 1 przed 2	2	$(-1)^2 = +1$
6	$a_3 \cdot b_2 \cdot c_1$	1 przed 2; 2 przed 3; 1 przed 3	3	$(-1)^3 = -1$

Wyznacznikiem (determinantem) tablicy kwadratowej nazywamy liczbę uzyskaną jako sumę wszystkich iloczynów składowych tablicy, pomnożonych przez ich współczynniki inwersyjne.

$$d = \Sigma a_x \cdot b_y \cdot c_z \cdot \ldots \cdot n_n \cdot (-1)^{inv}, \tag{8.2}$$
$$x \neq y \neq z \neq \ldots \neq n.$$

Najczęściej dla wyznaczników stosuje się oznaczenia: *d, D, Δ, δ, det, Det*, którym może także towarzyszyć symbol tablicy kwadratowej lub macierzy np. *det A*.

8.2. Obliczanie wartości wyznaczników drugiego i trzeciego stopnia

Wyznacznik drugiego stopnia obliczamy ze wzoru:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \tag{8.3}$$

Przy obliczaniu wyznacznika drugiego stopnia występują dwa iloczyny, zawierające elementy zlokalizowane na przekątnych tabeli. Pierwszy iloczyn utworzony z elementów na przekątnej głównej nie ma inwersji, a więc występuje ze znakiem plus, natomiast drugi iloczyn zawiera jedną inwersję, toteż jest opatrzony znakiem minus.

Dla wyznacznika trzeciego stopnia otrzymamy:

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 \tag{8.4}$$

Obliczanie wyznacznika trzeciego stopnia ułatwia *schemat Sarrusa* (rys. 8.3), który tworzymy, dopisując pod tablicą wyznacznika jego pierwszy i drugi wiersz. Następnie łączymy elementy dwoma typami przekątnych. Pierwszy z nich tworzą przekątne równoległe do przekątnej głównej tablicy. Łączą one elementy, których iloczyny mają współczynnik inwersji +1. Drugi typ przekątnych, biegnących w lewo od prawego górnego elementu, łączy elementy, tworzące iloczyny z współczynnikiem inwersji −1.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_3$$

−1 +1

Rys. 8.3. Schemat Sarrusa do obliczenia wyznacznika trzeciego stopnia

<u>Przykład</u>:

Obliczyć wyznaczniki drugiego i trzeciego stopnia:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 22\,;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \end{matrix} = 3 \cdot 12 \cdot 7 + 4 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \cdot 8 - 3 \cdot 12 \cdot 1 - 8 \cdot 5 \cdot 3 - 7 \cdot 6 \cdot 4 = 36$$

−1 +1

Wygodny sposób obliczenia wyznacznika trzeciego stopnia został również opracowany przez S. Hausbrandta:

$$d=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{b_2}\cdot\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} \tag{8.5}$$

Obliczenie wyznacznika D według wzoru (8.5) rozpoczyna się od obliczenia wartości „małych" wyznaczników drugiego stopnia, które następnie umożliwią określenie wartości „dużego" wyznacznika. Po jej pomnożeniu przez odwrotność środkowego elementu (b_2) uzyskamy ostateczną wartość wyznacznika trzeciego stopnia.

Przykład:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}=\frac{1}{12}\cdot\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}=\frac{1}{12}\cdot\begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 8 & 44 \end{vmatrix}=\frac{1}{12}\cdot 432=36$$

8.3. Minory i kofaktory

Zapis wzoru (8.4) można zmienić po odpowiednim zgrupowaniu iloczynów składowych i wyłączeniu przed nawias elementów: a_1, a_2, a_3:

$$d=a_1\cdot b_2\cdot c_3-a_1\cdot b_3\cdot c_2-a_2\cdot b_1\cdot c_3+a_2\cdot b_3\cdot c_1+a_3\cdot b_1\cdot c_2-a_3\cdot b_2\cdot c_1=$$
$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(-b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

Wyrażenia w nawiasach można zapisać jako wyznaczniki drugiego stopnia:

$$d=+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdot a_1-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdot a_2+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot a_3 \tag{8.6}$$

a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3

a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3

a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3

Rys. 8.4. Schemat tworzenia minorów

Zauważmy, że wyznaczniki zamieszczone w powyższym wzorze powstają z wyznacznika wyjściowego, jeśli wykreślimy z niego wiersz i kolumnę, na przecięciu których znajduje się element występujący jako czynnik za wyznacznikiem.

Znak plus lub minus stojący przed wyznacznikiem można określić ze wzoru: $(-1)^{j+i}$, gdzie j oznacza numer wiersza, zaś i numer kolumny czynnika związanego z danym wyznacznikiem. Jeśli suma $j+i$ stanowiąca wykładnik potęgi przy podstawie -1 jest parzysta, wtedy przed wyznacznikiem wystąpi znak plus, zaś dla potęgi nieparzystej otrzymamy znak minus np. dla elementu a_1 $j=1$; $i=1$, a więc wyznacznikowi występującemu jako czynnik przy elemencie a_1 odpowiada znak plus, natomiast dla a_2 $j=2$; $i=1$, a zatem wyznacznik otrzymuje znak minus.

Analogiczne wyznaczniki zwane *minorami* wraz z przyporządkowanymi do nich znakami można zapisać dla wszystkich elementów wyjściowego wyznacznika, w wyniku czego po ich stabelaryzowaniu w porządku zgodnym z tabelą wyjściową powstanie tzw. *tabela kofaktorów*.

Minorem z danego wyznacznika d, przyporządkowanym jego ji-temu elementowi nazywamy wyznacznik, którego tablica powstaje z tablicy wyjściowej poprzez skreślenie j-tego wiersza oraz i-tej kolumny, w których znajduje się rozpatrywany element.

Kofaktorem (dopełnieniem algebraicznym) wyznacznika d, przyporządkowanym ji-temu elementowi, nazywamy iloczyn jego minora przez minus jedność podniesioną do potęgi $j+i$, czyli sumy wskaźników wiersza i kolumny danego elementu.

Wyznacznikowi trzeciego stopnia $d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ odpowiada tabela kofaktorów D:

$$D \equiv \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{Vmatrix} \tag{8.7}$$

Elementy tej tablicy, czyli poszczególne kofaktory obliczymy jako wyznaczniki drugiego stopnia:

$$\begin{aligned}
A_1 &= +\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad C_1 = +\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}; \\
A_2 &= -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad B_2 = +\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}; \\
A_3 &= +\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad C_3 = +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Przykład:

Zestawić tabelę kofaktorów D dla wyznacznika $d = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}; \qquad D \equiv \begin{Vmatrix} 44 & -20 & 8 \\ -27 & 18 & -9 \\ 12 & -12 & 12 \end{Vmatrix}$$

Iloczyny jednoimiennych wierszy lub jednoimiennych kolumn wyznacznika wyjściowego d oraz jego wyznacznika kofaktorów D są równe wartości wyznacznika d.

Iloczyny dwóch różnoimiennych wierszy lub dwóch różnoimiennych kolumn wyznaczników: wyjściowego d oraz kofaktorów D są równe zero.

oraz
$$\begin{cases} d = [a \cdot A] = [b \cdot B] = [c \cdot C] = \ldots = [n \cdot N] \\ d = [d_{(1)} \cdot D_{(1)}] = [d_{(2)} \cdot D_{(2)}] = [d_{(3)} \cdot D_{(3)}] = \ldots = [d_{(n)} \cdot D_{(n)}] \end{cases} \tag{8.9}$$

oraz
$$\begin{cases} [a \cdot B] = [b \cdot A] = [c \cdot A] = \ldots = [n \cdot M] = 0 \\ d = [d_{(1)} \cdot D_{(2)}] = [d_{(2)} \cdot D_{(1)}] = [d_{(2)} \cdot D_{(3)}] = \ldots = [d_{(n-1)} \cdot D_{(n)}] = 0 \end{cases} \tag{8.10}$$

Słuszność powyższych twierdzeń można sprawdzić na dowolnej parze kolumn i wierszy wyznaczników *d, D* z uprzednio podanego przykładu:

$$[a \cdot A] = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 44 \\ -27 \\ 12 \end{bmatrix} = 3 \cdot 44 + 4 \cdot (-27) + 1 \cdot 12 = 132 - 108 + 12 = 36$$

$$[d_{(2)} \cdot D_{(2)}] = [4 \;\; 12 \;\; 8] \cdot [-27 \;\; 18 \;\; -9] = 4 \cdot (-27) + 12 \cdot 18 + 8 \cdot (-9) = -108 + 216 - 72 = 36$$

$$[c \cdot A] = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 44 \\ -27 \\ 12 \end{bmatrix} = 3 \cdot 44 - 8 \cdot 27 + 7 \cdot 12 = 132 - 216 + 84 = 0$$

$$[d_{(2)} \cdot D_{(3)}] = [4 \;\; 12 \;\; 8] \cdot [12 \;\; -12 \;\; 12] = 48 - 144 + 96 = 0$$

8.4. Własności wyznaczników

1. Jeżeli dowolna kolumna lub wiersz wyznacznika zawiera same zera, wtedy wartość liczbowa tego wyznacznika jest równa zero.
   Przykłady:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

   Obliczenie wykonano według rozwinięcia pierwszego wiersza.

2. Wartość wyznacznika jest równa zero, gdy elementy dwóch jego kolumn lub dwóch wierszy są:
   - jednakowe,
   - proporcjonalne do siebie,
   - kombinacją liniową innych kolumn lub wierszy tego wyznacznika.

   Przykłady:

1) $$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 12 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 36 + 0 - 36 = 0$$

   Wyznacznik zawiera dwie jednakowe kolumny. Obliczenie wykonano według rozwinięcia drugiego wiersza.

2) $$\begin{vmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 4 & 12 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 0 + 16 = 0$$

Wyjściowy wyznacznik zawiera wiersze (pierwszy i trzeci) o elementach proporcjonalnych. Obliczenie wykonano według rozwinięcia pierwszej kolumny.

3) $$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 4 \\ 5 & 18 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 5 & 18 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 18 \end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 36+48-84=0$$

Wyznacznik zawiera wiersz trzeci, będący sumą wiersza pierwszego i drugiego. Obliczenie wykonano wg rozwinięcia trzeciej kolumny.

3. Pomnożenie lub podzielenie dowolnego wiersza albo kolumny wyznacznika przez tę samą liczbę powoduje uzyskanie wartości równej wartości wyznacznika pierwotnego pomnożonej lub podzielonej przez tę liczbę. Odwrotność wspólnego podzielnika wszystkich elementów dowolnego wiersza lub kolumny można wyłączyć poza tabelę wyznacznika.

Przykłady:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 36; \quad d' = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 33-30+6 = 9$$

Elementy środkowego wiersza wyznacznika d zostały podzielone przez 4.

$$d' = \frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\,d$$

Wyznacznik d' powstał z wyznacznika d po podzieleniu elementów drugiego wiersza przez 4.

4. Przestawienie dwóch sąsiednich wierszy lub dwóch sąsiednich kolumn wyznacznika powoduje zmianę znaku jego wartości na znak przeciwny.

Przykład:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 4 & 12 & 8 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 7\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = -12+60-84 = -36$$

W wyznaczniku d z poprzedniego przykładu przestawieniu uległy wiersze: drugi i trzeci.

5. Przestawienie kolumny lub wiersza o wskaźniku k na miejsce j, bez zmiany wzajemnego ustawienia pozostałych kolumn (wierszy), powoduje wymnożenie wartości wyznacznika przez współczynnik $(-1)^{k-j}$.

Przykład:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 36; \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 12-60+84 = 36$$

Zamieniono pozycję trzeciego wiersza (k=3) na pozycję pierwszego wiersza (j=1). Pozostałe wiersze uległy przesunięciu w dół o jeden wiersz.

6. Transpoza wyznacznika, czyli zamiana jego kolumn na wiersze nie zmienia wartości wyznacznika.

Przykład:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 132-108+12 = 36$$

7. Jeżeli do elementów jednego wiersza (kolumny) tabeli wyznacznika dodamy elementy drugiego wiersza (kolumny) pomnożone przez jednakowy współczynnik, to wartość wyznacznika nie zmieni się.

Przykład:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 36; \quad \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4+1 & 12+2 & 8+1 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 14 & 9 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot53-6\cdot26+3\cdot11 = 36$$

Do elementów drugiego wiersza dodano elementy pierwszego wiersza pomnożone przez $\frac{1}{3}$.

8. Wyznacznik tabeli otrzymanej z iloczynów kolumn lub wierszy jednej tabeli przez kolumny lub wiersze drugiej tabeli jest równy iloczynowi wyznaczników tych tabel. Iloczyny można otrzymać mnożąc: kolumny przez kolumny, kolumny przez wiersze, wiersze przez kolumny, wiersze przez wiersze obydwu tabel.

Przykład:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 36 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 25$$

Zestawiamy tabelę δ otrzymaną z pomnożenia wierszy tabeli ***d*** przez kolumny tabeli Δ i obliczamy jej wyznacznik δ.

$$\delta = \begin{vmatrix} -18 & 30 & 9 \\ -36 & 52 & 28 \\ -12 & 13 & 21 \end{vmatrix} = 900 \quad ; \quad d\cdot\Delta = 36\cdot25 = 900$$

8.5. Obliczanie wyznaczników wyższych stopni

Spośród wielu metod obliczania wartości wyznaczników wyższych stopni ograniczymy się do omówienia jednej z nich polegającej na zamianie tablicy wyznacznika na iloczyn dwóch tablic trójkątnych. *Tablicami trójkątnymi* nazywamy tablice, w których nad lub pod przekątną główną tablicy występują tylko elementy zerowe, zaś elementy przekątne są różne od zera np.

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

W dalszym ciągu rozważań będziemy rozpatrywać tablice trójkątne o elementach zerowych występujących pod przekątną główną. Ważną własnością tablicy trójkątnej jest to, że wartość jej wyznacznika jest równa iloczynowi jej elementów przekątnych.

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & n_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & \dots & n_2 \\ 0 & 0 & c_3 & \dots & n_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 \cdot \ldots \cdot n_n$$

Obliczenie wyznacznika d polega na rozkładzie jego tablicy na dwie tablice trójkątne **g**, **h**, których wyznaczniki g, h spełniają równanie:

$$d = g \cdot h \tag{8.11}$$

Zgodnie z powyższym wzorem iloczyn wartości liczbowych wyznaczników tablic trójkątnych **g**, **h** jest równy wartości wyznacznika d z tablicy **a**. Po dokonaniu rozkładu tablicy **a** na czynniki **g**, **h** wartość jej wyznacznika d obliczymy na podstawie iloczynu elementów przekątnych obu tablic **g**, **h**.

$$d = g_{11} \cdot h_{11} \cdot g_{22} \cdot h_{22} \cdot g_{33} \cdot h_{33} \cdot \ldots g_{nn} \cdot h_{nn} \tag{8.12}$$

Podczas zestawienia równań liniowych, w których jako niewiadome wystąpią poszukiwane elementy tablic **g**, **h** okazuje się, że niewiadomych jest o n więcej niż równań, a więc dla ułatwienia rachunku wartości n elementów przekątnych tablicy **h** można przyjąć jako równe +1. Innym usprawnieniem obliczeń może być zastosowanie schematu tzw. *tabel zerujących*, opracowanego przez S. Hausbrandta (rys. 8.5).

$$\frac{\|\mathbf{a}\| \;\vdots\; \|-\mathbf{1}\|}{\|\mathbf{g}\| \;\vdots\; \|\mathbf{h}\|} =$$

a_1	b_1	c_1	...	n_1	-1	0	0	...	0
a_2	b_2	c_2	...	n_2	0	-1	0	...	0
a_3	b_3	c_3	...	n_3	0	0	-1	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
a_n	b_n	c_n	...	n_n	0	0	0	...	-1
g_{11}	g_{12}	g_{13}	...	g_{1n}	+1	h_{12}	h_{13}	...	h_{1n}
0	g_{22}	g_{23}	...	g_{2n}	0	+1	h_{23}	...	h_{2n}
0	0	g_{33}	...	g_{3n}	0	0	+1	...	h_{3n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	0	...	g_{nn}	0	0	0	...	+1

Tabela **L** Tabela **P**

Rys. 8.5. Schemat tabel zerujących do rozkładu tablicy wyznacznika na tablice trójkątne

Zgodnie z nazwą „tabele zerujące", obliczenie brakujących elementów polega na mnożeniu przez siebie poszczególnych kolumn tabel pionowych **L**, **P** i przyrównywaniu

kolejnych iloczynów do zera. Tworząc iloczyny pierwszej kolumny ($\mathbf{L}_1$) tabeli **L** przez kolejne kolumny tabeli **P** ($\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, ..., $\mathbf{P}_n$) uzyskamy równania liniowe potrzebne do wyznaczenia elementów pierwszej kolumny tablicy **g** oraz pierwszego wiersza tablicy **h**. Mnożąc drugą kolumnę tabeli **L** przez poszczególne kolumny tabeli **P** otrzymamy elementy drugiej kolumny tablicy **g** i drugiego wiersza tablicy **h** itd. Obecnie ustalimy przebieg działań w tabelach zerujących, uzupełnionych dla kontroli rachunku o kolumny sumowe, w celu obliczenia wyznacznika czwartego stopnia (rys. 8.6):

a_1	b_1	c_1	d_1	s_1	-1	0	0	0	-1
a_2	b_2	c_2	d_2	s_2	0	-1	0	0	-1
a_3	b_3	c_3	d_3	s_3	0	0	-1	0	-1
a_4	b_4	c_4	d_4	s_4	0	0	0	-1	-1
g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{1s}	+1	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{1s}
0	g_{22}	g_{23}	g_{24}	g_{2s}	0	+1	h_{23}	h_{24}	h_{2s}
0	0	g_{33}	g_{34}	g_{3s}	0	0	+1	h_{34}	h_{3s}
0	0	0	g_{44}	g_{4s}	0	0	0	+1	+1

= 0

Tabela **L** Tabela **P**

Rys. 8.6. Schemat tabeli zerującej do obliczenia wyznacznika czwartego stopnia

Tabela 8.2. Obliczanie elementów tablic trójkątnych ***g***, ***h***

Iloczyn kolumn	Równanie	Element szukany
$L_1 \cdot P_2$	$-a_2+g_{11} \cdot h_{12}=0$	h_{12}
$L_1 \cdot P_3$	$-a_3+g_{11} \cdot h_{13}=0$	h_{13}
$L_1 \cdot P_4$	$-a_4+g_{11} \cdot h_{14}=0$	h_{14}
$L_1 \cdot P_s$	$-(a_1+a_2+a_3+a_4)+g_{11} \cdot h_{1s}=0$	h_{1s}
$L_2 \cdot P_2$	$-b_2+g_{12} \cdot h_{12}+g_{22}=0$	g_{22}
$L_2 \cdot P_3$	$-b_3+g_{12} \cdot h_{13}+g_{22} \cdot h_{23}=0$	h_{23}
$L_2 \cdot P_4$	$-b_4+g_{12} \cdot h_{14}+g_{22} \cdot h_{24}=0$	h_{24}
$L_2 \cdot P_s$	$-(b_1+b_2+b_3+b_4)+g_{12} \cdot h_{1s}+g_{22} \cdot h_{2s}=0$	h_{2s}
$L_3 \cdot P_2$	$-c_2+g_{13} \cdot h_{12}+g_{23}=0$	g_{23}
$L_3 \cdot P_3$	$-c_3+g_{13} \cdot h_{13}+g_{23} \cdot h_{23}+g_{33}=0$	g_{33}
$L_3 \cdot P_4$	$-c_4+g_{13} \cdot h_{14}+g_{23} \cdot h_{24}+g_{33} \cdot h_{34}=0$	h_{34}
$L_3 \cdot P_s$	$-(c_1+c_2+c_3+c_4)+g_{13} \cdot h_{1s}+g_{23} \cdot h_{2s}+g_{33} \cdot h_{3s}=0$	h_{3s}
$L_4 \cdot P_2$	$-d_2+g_{14} \cdot h_{12}+g_{24}=0$	g_{24}
$L_4 \cdot P_3$	$-d_3+g_{14} \cdot h_{13}+g_{24} \cdot h_{23}+g_{34}=0$	g_{34}
$L_4 \cdot P_4$	$-d_4+g_{14} \cdot h_{14}+g_{24} \cdot h_{24}+g_{34} \cdot h_{34}+g_{44}=0$	g_{44}
$L_4 \cdot P_s$	$-(d_1+d_2+d_3+d_4)+g_{14} \cdot h_{1s}+g_{24} \cdot h_{2s}+g_{34} \cdot h_{3s}+g_{44}=0$	Kontrola

Na podstawie iloczynów kolumn: $\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{P}_1 = \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{P}_1 = \mathbf{L}_3 \cdot \mathbf{P}_1 = \mathbf{L}_4 \cdot \mathbf{P}_1 = 0$ uzyskujemy równania: $-a_1+g_{11}=0$; $-b_1+g_{12}=0$; $-c_1+g_{13}=0$; $-d_1+g_{14}=0$; $-s_1+g_{1s}=0$, z których wynika, że pierwszy wiersz tablicy **g** jest identyczny z pierwszym wierszem wyjściowej

tablicy **a**. Podczas obliczeń można więc od razu dokonać wpisu elementów pierwszego wiersza tablicy **g** i zrezygnować z tworzenia iloczynów z udziałem pierwszej kolumny tabeli **P**. Równania potrzebne do obliczenia pozostałych elementów tablic trójkątnych zestawiono w tabeli 8.2.

Przykład:

2	-3	0	3	2	-1	0	0	0	-1
4	-2	-1	6	7	0	-1	0	0	-1
-2	15	-4	-5	4	0	0	-1	0	-1
4	-6	2	12	12	0	0	0	-1	-1
2	-3	0	3	2	+1	2	-1	2	4
0	4	-1	0	3	0	+1	3	0	4
0	0	-1	-2	-3	0	0	+1	-2	-1
0	0	0	2	2	0	0	0	+1	+1

$$d = 2 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot 2 = -16$$

8.6. Zastosowanie wyznaczników do rozwiązywania układów równań liniowych

Układ n równań, w którym niewiadome występują w pierwszej potędze, zaś w żadnym jednomianie nie występuje iloczyn lub iloraz niewiadomych, nosi nazwę *układu równań liniowych*. Ogólnie układ n równań o n niewiadomych zapisuje się następująco:

$$\begin{array}{l} a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+ \dots n_1x_n = l_1 \\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+ \dots n_2x_n = l_2 \\ a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3+ \dots n_3x_n = l_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx_1+b_nx_2+c_nx_3+ \dots n_nx_n = l_n \end{array} \quad (8.13)$$

Symbole a_i, b_i, c_i, ... n_i oznaczają współczynniki przy niewiadomych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, zaś $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ – są wyrazami wolnymi równań.

Z układu wyrażonego równaniami (8.13) można utworzyć następujące tablice liczbowe:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & n_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & n_n \end{Vmatrix} ; \quad \begin{Vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \dots \\ l_n \end{Vmatrix} ; \quad \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} ; \quad \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & n_1 & -l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & n_2 & -l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & n_3 & -l_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & n_n & -l_n \end{Vmatrix}$$

tablica współczynników (podstawowa) tablica wyrazów wolnych tablica niewiadomych tablica układu równań

8.6.1. Rozwiązanie układu równań za pomocą kofaktorów

Wyznacznik $d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & n_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & n_n \end{vmatrix}$ obliczony z tablicy podstawowej nosi nazwę *wyznacznika podstawowego* układu. Odpowiada mu tablica kofaktorów:

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \cdots & N_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \cdots & N_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \cdots & N_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n & B_n & C_n & \cdots & N_n \end{Vmatrix}$$

Układ równań liniowych daje się rozwiązać, jeśli wyznacznik podstawowy jest różny od zera ($d \neq 0$).

Niewiadome obliczymy ze wzorów:

$$x_1 = \frac{[lA]}{d};\quad x_2 = \frac{[lB]}{d};\quad x_3 = \frac{[lC]}{d};\quad \cdots; x_{n1} = \frac{[lN]}{d} \tag{8.14}$$

Niewiadome są obliczane z iloczynu kolumny wyrazów wolnych i odpowiedniej kolumny tablicy kofaktorów podzielonego przez wyznacznik podstawowy.

<u>Przykład</u>:

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 \quad &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \quad ; \quad \|D\| = \begin{Vmatrix} 12 & -3 & -6 \\ -4 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Wyznacznik podstawowy — Tabela kofaktorów

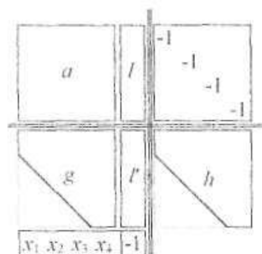
$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{12} \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 12 & -3 & -6 \\ -4 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 \\ +1 \\ -1 \end{Vmatrix}$$

$$x_1 = -2;\ x_2 = +1;\ x_3 = -1.$$

8.6.2. Rozwiązanie układów równań za pomocą tabel zerujących

Omówiony wcześniej sposób rozkładu tablicy **a** na dwie tablice trójkątne **g**, **h**, za pomocą tabel zerujących, może być również wykorzystany do rozwiązywania układu n równań liniowych. Schemat układu tablic zestawionych w tym celu został pokazany na rys. 8.7. W lewym górnym bloku tabeli zapisujemy tablicę **a** utworzoną przez współczynniki przy niewiadomych, dostawiając do niej z prawej strony kolumnę wyrazów wolnych **l**. Wymiary tego bloku obejmują więc $n+1$ kolumn, n wierszy. Prawą górną część tabeli utworzy tablica z elementami przekątnymi równymi -1. Tablica trójkątna **g** z wtórną ko-

lumną wyrazów wolnych l', dla których obliczymy nieznane elementy umiejscowione ponad przekątną główną tabeli **g** i w kolumnie **l'**, znajdą się w lewej dolnej części tabeli zerującej. Elementy tablicy **g** z kolumną **l'** utworzą tabelę współczynników i wyrazów wolnych zredukowanego układu równań, równoważnego układowi pierwotnemu. Elementy trójkątnej tablicy **h**, położone w prawej dolnej części tabeli zerującej, określamy sposobem omówionym uprzednio w ust. 8.5.



Rys. 8.7. Schemat tabeli zerującej do rozwiązywania układu równan liniowych

Po dokonaniu rozkładu można obliczyć niewiadome rozwiązując układ zredukowany. W tym celu dopisujemy u dołu lewej części tabeli **g** wiersz z miejscami na wpis n niewiadomych i końcowym elementem -1, znajdującym się pod kolumną **l'**. Iloczyny tego wiersza z kolejnymi wierszami układu trójkątnego powinny się zerować. Obliczenie rozpoczyna się od ostatniego wiersza układu zredukowanego, dając ostatnią niewiadomą x_n i w miarę obliczania kolejnych niewiadomych postępuje stopniowo ku górze. Jako ostatnia zostanie obliczona niewiadoma x_1.

Przykład:
Za pomocą tabeli zerującej rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3 &= 1 \\ x_1+4x_2 &= 2 \\ x_1-2x_2+3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

1	2	-1	1	3	-1	0	0	-1
1	4	0	2	7	0	-1	0	-1
1	-2	3	-7	-5	0	0	-1	-1
1	2	-1	1	3	1	1	1	3
0	2	1	1	4	0	1	-2	-1
0	0	6	-6	0	0	0	1	1
-2	**+1**	**-1**	-1					
x_1	x_2	x_3						

B. MACIERZE

8.7. Wiadomości wprowadzające

Zespoły liczb ujętych w prostokątne tabele, dla których ustalono pewne działania matematyczne np. dodawanie, odejmowanie, mnożenie itp. noszą nazwę *liczb zespołowych*. Do liczb tych zalicza się macierze i krakowiany, zaś w celu ich odróżnienia tabele liczbowe ujmuje się w odmienne nawiasy. Dla krakowianów stosuje się nawiasy klamrowe, natomiast dla macierzy – nawiasy półokrągłe lub kwadratowe np.:

$$\underset{\text{krakowian}}{\begin{Bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{Bmatrix}} \qquad \underset{\text{macierz}}{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}} \text{ lub } \underset{\text{macierz}}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}}$$

Zarówno krakowiany jak i macierze mogą być oznaczane symbolami literowymi, które w druku oznacza się czcionką pogrubioną, zaś w zapisie odręcznym - podkreśleniem symbolu np. **a**; **b**, **c** lub $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$.

Macierz jest to zespół liczb ujętych w prostokątną tabelę, podlegający działaniom macierzowym. Składa się ona z poszczególnych liczb zwanych *elementami macierzy*, rozmieszczonych w w wierszach i k kolumnach. Liczby (w, k) stanowią *wymiary macierzy*. Położenie elementu a_{ji} macierzy **a** w tabeli jest określane za pomocą *wskaźników*: 1) wiersza – j oraz 2) kolumny – i. Ogólny zapis macierzy **a** zawierającej w wierszy i k kolumn jest następujący:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{w1} & a_{w2} & \cdots & a_{wk} \end{bmatrix} \qquad \text{element } a_{ji} \qquad \text{np. } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 1{,}5 \\ 2{,}5 & -1{,}5 & 3 & 2{,}5 \\ -3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

(wskaźnik kolumny – i; wskaźnik wiersza – j)

Pojedyncze wiersze macierzy **a**, również będące macierzami, oznaczamy symbolem macierzy i numerem wiersza wziętym w nawias np.

$$\mathbf{a}_{(2)} = [\,2 \quad 4 \quad 2 \quad 1{,}5\,]$$

Pojedyncze kolumny tej macierzy oznaczą się podobnie, lecz wskaźnika kolumny nie umieszcza się w nawiasie np.:

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1{,}5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

8.8. Rodzaje macierzy:

1. *Macierz jednoelementowa* jest macierzą złożoną z pojedynczego elementu: np. $[-3]$;
2. *Macierz jednokolumnowa* jest macierzą posiadającą jedną kolumnę, zaś dowolną liczbę wierszy.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ w – dowolne, $k=1$;

3. *Macierz jednowierszowa* składa się z jednego wiersza, zaś dowolnej liczby kolumn.
   $[3\ \ -2\ \ 1]$ $w=1$, k - dowolne;
4. *Macierz kwadratowa* jest macierzą o jednakowej liczbie wierszy i kolumn.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$ $w = k$;

przekątna główna 3; 8; 3 – elementy przekątne

5. *Macierz trójkątna* jest macierzą kwadratową, w której pod lub nad przekątną główną występują tylko elementy zerowe.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

6. *Macierz przekątna* jest to macierz kwadratowa zawierająca na przekątnej głównej elementy niezerowe, zaś poza przekątną główną same elementy zerowe.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7. *Macierz jednostkowa* **E** jest macierzą przekątną o zmiennych wymiarach, zawierającą na przekątnej głównej same jedynki. W szczególności macierzą jednostkową może być macierz z jednym elementem równym 1. Wymiary macierzy **E** należy dostosować do wykonywanego działania np. iloczynu.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = [1]$$

8. *Macierz zerowa* jest to macierz, w której niezależnie od rozmiarów wszystkie elementy są równe zero.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0} = [0]$$

9. *Macierz symetryczna* jest to macierz kwadratowa, której elementy są ułożone symetrycznie względem przekątnej głównej. Elementy kolejnych wierszy tej macierzy są równe elementom kolejnych kolumn. W macierzy tej elementy spełniają więc warunek: $a_{ji}=a_{ij}$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

10. *Macierz transponowana* a^T (transpoza) powstaje z macierzy wyjściowej a poprzez zamianę kolejnych wierszy na kolejne kolumny.

$$\text{Gdy} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \text{ to } \quad \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Macierz symetryczna jest równa swej transpozie. Symbolem transpozy jest litera „T" lub gwiazdka umieszczana jako indeks górny przy symbolu macierzy wyjściowej np. a^T lub a^*.

8.9. Równość macierzy, dodawanie i odejmowanie macierzy, mnożenie macierzy przez liczbę

Równość macierzy

Dwie macierze są równe wtedy, gdy każdy element jednej macierzy jest równy odpowiadającemu mu położeniem elementowi drugiej macierzy . Obie macierze muszą zatem mieć jednakowe wymiary.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{9} & \sin 30^\circ & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0{,}5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Z powyższego zapisu wynikają równości algebraiczne: $x=1$; $y=2$; $u=3$; $v=4$.

Dodawanie i odejmowanie macierzy

Dodawanie (odejmowanie) dwóch macierzy polega na dodaniu (odjęciu) elementów obu macierzy o takim samym położeniu. Działanie to jest wykonalne tylko wtedy, gdy macierze te mają jednakowe wymiary.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy przez liczbę

Iloczyn macierzy przez liczbę jest równy macierzy powstałej w wyniku pomnożenia każdego elementu macierzy wyjściowej przez tę liczbę. Iloczyn ten jest przemienny.

$$2\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 5\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 5\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}\cdot 2=\begin{bmatrix}6 & 2 & 10\\ 2 & 8 & 6\end{bmatrix}$$

Z powyższego określenia wynika także możliwość wyłączenia poza nawias macierzy wspólnego podzielnika wszystkich jej elementów.

8.10. Iloczyn macierzy

Mnożenie dwóch macierzy polega na mnożeniu kolejnych wierszy pierwszego czynnika przez kolejne kolumny drugiego czynnika i zapisywaniu wyników w poszczególnych wierszach iloczynu.

Iloczynem **a·b** macierzy **a** przez macierz **b** nazywamy macierz **c**, której element c_{ji} położony w j-tym wierszu oraz i-tej kolumnie powstaje przez sumomnożenie elementów j-tego wiersza macierzy **a** przez elementy i-tej kolumny macierzy **b**. W skrócie definicję iloczynu można zapisać:

Jeżeli: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{c}$,

to: $c_{ji}=\mathbf{a}_{(j)}\cdot\mathbf{b}_i$ (8.15)

Wykonalność mnożenia: Mnożenie dwóch macierzy jest wykonalne tylko wtedy, gdy macierz **a** posiada tyle kolumn, ile wierszy zawiera macierz **b**. Liczba wierszy macierzy **a** i liczba kolumn macierzy **b** mogą być dowolne.

Wymiary iloczynu: Macierz **c** ma tyle wierszy, ile ich posiada macierz **a** oraz tyle kolumn, ile kolumn ma macierz **b**.

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix} \quad (8.16)$$

Pierwszy wiersz iloczynu $\mathbf{c}_{(1)}$:

$c_{11}=\mathbf{a}_{(1)}\cdot\mathbf{b}_1=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}$; $c_{12}=\mathbf{a}_{(1)}\cdot\mathbf{b}_2=a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}$; $c_{13}=\mathbf{a}_{(1)}\cdot\mathbf{b}_3=a_{11}\cdot b_{13}+a_{12}\cdot b_{23}$;

Drugi wiersz iloczynu $\mathbf{c}_{(2)}$:

$c_{21}=\mathbf{a}_{(2)}\cdot\mathbf{b}_1=a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}$; $c_{22}=\mathbf{a}_{(2)}\cdot\mathbf{b}_2=a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}$; $c_{23}=\mathbf{a}_{(2)}\cdot\mathbf{b}_3=a_{21}\cdot b_{13}+a_{22}\cdot b_{23}$;

Trzeci wiersz iloczynu $\mathbf{c}_{(3)}$:

$c_{31}=\mathbf{a}_{(3)}\cdot\mathbf{b}_1=a_{31}\cdot b_{11}+a_{32}\cdot b_{21}$; $c_{32}=\mathbf{a}_{(3)}\cdot\mathbf{b}_2=a_{31}\cdot b_{12}+a_{32}\cdot b_{22}$; $c_{33}=\mathbf{a}_{(3)}\cdot\mathbf{b}_3=a_{31}\cdot b_{13}+a_{32}\cdot b_{23}$

Przykłady:

1) $$\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28 & 34 & 50\\ 20 & 8 & 4\\ 1 & 8 & 15\end{bmatrix};$$

2) $$\begin{bmatrix}2 & -2\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ 14\\ 14\end{bmatrix};$$

3) $$\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 12 & 9 & -3\\ 4 & 8 & 6 & -2\\ 10 & 20 & 15 & -5\end{bmatrix}$$

Własności iloczynu macierzy

1) Pomnożenie i przedmnożenie macierzy a przez wymiarowo dobraną macierz jednostkową **E** nie zmienia wartości macierzy **a**, jednak wymaga użycia różnych macierzy jednostkowych.

Przykład:

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 5 & -2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 5 & -2 & 4\end{bmatrix} \text{ oraz } \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 5 & -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 5 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \qquad \mathbf{E} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

2) Iloczyn macierzy **a·b** jest nieprzemienny, czyli nie równa się iloczynowi **b·a**.

Przykład:

$$\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28 & 34 & 50\\ 20 & 8 & 4\\ -1 & 8 & 15\end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 32\\ 18 & 34\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \qquad \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{c} \neq \mathbf{d}$$

Istnienie iloczynu macierzy **a·b** nie pociąga za sobą istnienia iloczynu **b·a**, bo po zamianie czynników może się okazać, że iloczyn jest niewykonalny. Może on nie spełniać warunku równości liczby kolumn pierwszego czynnika i liczby wierszy drugiego czynnika.

Przykład:

$$\begin{bmatrix}2 & -2\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ 14\\ 14\end{bmatrix} \quad ; \quad \text{Iloczyn } \begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -2\\ 3 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} \text{ nie istnieje.}$$

3) Iloczyn jednakowych macierzy (kwadrat macierzy) istnieje tylko dla macierzy kwadratowej, natomiast każdą macierz można przedmnożyć ($\mathbf{a}^T\cdot\mathbf{a}$) lub pomnożyć ($\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}^T$) przez jej transpozę. Iloczyn $\mathbf{a}^T\cdot\mathbf{a}$ nazywany jest *iloczynem symetrycznym*, ponieważ wynik tego mnożenia jest macierzą symetryczną.

Przykład:

$$\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 5\\ 1 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & 33\\ 33 & 98\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

4) Iloczyn *n* macierzy polega na wymnożeniu dwóch pierwszych macierzy, a następnie uzyskanego iloczynu przez macierz trzecią, itd., czyli: $\{[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}]\cdot\mathbf{d}\}\cdot\mathbf{e}\ldots$. Iloczyn *n* macierzy jest wykonalny, jeśli każda następna macierz ma tyle wierszy, ile poprzedzająca ją macierz posiada kolumn. W iloczynie *n* macierzy dowolną liczbę macierzy można połączyć lub rozłączyć.

$$\{[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}]\cdot\mathbf{d}\}\cdot\mathbf{e}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}) \qquad (8.17)$$

8.11. Odwrotność macierzy

8.11.1. Pojęcie odwrotności macierzy

W rachunku macierzowym dla dowolnej macierzy **a** mogą być obliczone (jeśli istnieją) dwie odwrotności: lewostronna $\mathbf{a}_L^{-1}$, spełniająca związek :

$$\mathbf{a}_L^{-1} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E} \tag{8.18}$$

i prawostronna $\mathbf{a}_P^{-1}$, wyznaczana według wzoru:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_P^{-1} = \mathbf{E} \tag{8.19}$$

Na podstawie wzorów podanych wyżej można sformułować następujące określenia odwrotności macierzy:

Odwrotnością lewostronną macierzy **a** jest taka macierz $\mathbf{a}_L^{-1}$, która przedmnożona przez macierz wyjściową **a** daje w wyniku macierz jednostkową **E**.

Odwrotnością prawostronną macierzy **a** jest taka macierz $\mathbf{a}_P^{-1}$, która pomnożona przez macierz wyjściową **a** daje w wyniku macierz jednostkową **E**.

Macierz pionowa tj. taka dla której $w>k$, posiada tylko odwrotność lewostronną, zaś macierz pozioma ($w<k$) – tylko prawostronną. Odwrotność macierzy **a**, czyli macierz $\mathbf{a}^{-1}$, ma takie same wymiary jak jej transpoza $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$.

W praktyce zajmujemy się przeważnie odwrotnościami macierzy kwadratowych. Dla **macierzy kwadratowej** o niezerowym wyznaczniku tabeli macierzy wyjściowej obie odwrotności: lewostronna i prawostronna są równe, a więc:

$$\mathbf{a}_L^{-1} = \mathbf{a}_P^{-1} = \mathbf{a}^{-1} \tag{8.20}$$

Elementy odwrotności macierzy **a** można wyznaczyć z iloczynu macierzowego na podstawie zależności: (8.18), (8.19). W tym przypadku iloczyny poszczególnych wierszy i kolumn tworzą układy równań liniowych w których niewiadomymi są szukane elementy odwrotności. Przy obliczeniach kalkulatorem jest to jednak kłopotliwe i pracochłonne, ponieważ dla macierzy kwadratowej o n kolumnach i n wierszach trzeba znaleźć n^2 niewiadomych. Znacznie łatwiej można określić odwrotność macierzy w oparciu o poznane wcześniej zasady rachunku wyznacznikowego.

8.11.2. Obliczenie odwrotności macierzy kwadratowej za pomocą wyznaczników

Odwrotność macierzy kwadratowej **a** jest równa iloczynowi odwrotności wyznacznika d tej macierzy przez transponowaną macierz kofaktorów $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ macierzy wyjściowej **a**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

macierz **A** utworzona z tabeli kofaktorów — transpoza macierzy **A**

$$\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{d} \cdot \mathbf{A}^{T} = \frac{1}{d} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.21}$$

Przykłady:
W oparciu o tabelę kofaktorów obliczyć odwrotności dwu macierzy kwadratowych: **a** oraz **b**:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Macierze kofaktorów: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

Wyznaczniki tabel macierzy: $d_{\mathbf{a}} = 1$; $d_{\mathbf{b}} = 6$

Odwrotności macierzy: $\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b}^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 8 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

8.11.3. Obliczenie odwrotności macierzy symetrycznej za pomocą rozkładu na czynniki trójkątne

Obliczenie odwrotności macierzy symetrycznej **N** metodą rozkładu na czynniki trójkątne obejmuje następujące czynności:

1. Rozkład macierzy **N** na czynniki trójkątne $\mathbf{r}^T$ i $\mathbf{r}$.
2. Obliczenie odwrotności $\mathbf{r}^{-1}$ czynnika trójkątnego **r**.
3. Obliczenie odwrotności macierzy wyjściowej **N** jako iloczynu macierzy: $\mathbf{r}^{-1}$ oraz $(\mathbf{r}^{-1})^T$.

Macierz symetryczną **N** można rozłożyć na dwa specyficzne czynniki trójkątne, z których pierwszy $\mathbf{r}^T$ stanowi transpozę drugiego czynnika **r**. Zachodzi więc związek:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{r} \tag{8.22}$$

$$\underset{\mathbf{N}}{\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & \cdots & N_{1n} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & \cdots & N_{2n} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & \cdots & N_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n1} & N_{n2} & N_{n3} & \cdots & N_{nn} \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{r}^T}{\begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{r}}{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}}$$

Poszukiwane elementy macierzy **r** znajdziemy z zależności, wynikających z zasad iloczynu macierzowego:

$$\mathbf{r}^T_{(1)} \cdot \mathbf{r}_1 = N_{11} \quad ; \quad r_{11}^2 = N_{11} \qquad r_{11} = \sqrt{N_{11}}\ ;$$

$$\mathbf{r}^T_{(1)} \cdot \mathbf{r}_2 = N_{12} \quad ; \quad r_{11} \cdot r_{12} = N_{12} \qquad r_{12} = \frac{N_{12}}{r_{11}}\ ;$$

$$\mathbf{r}^T_{(1)} \cdot \mathbf{r}_3 = N_{13} \quad ; \quad r_{11} \cdot r_{13} = N_{13} \qquad r_{13} = \frac{N_{13}}{r_{11}}\ ;$$

....

$$\mathbf{r}^T_{(1)} \cdot \mathbf{r}_n = N_{1n} \quad ; \quad r_{11} \cdot r_{1n} = N_{1n} \qquad r_{1n} = \frac{N_{1n}}{r_{11}}\ ;$$

Z powyższego zapisu wynika następujący sposób obliczenia elementów pierwszego wiersza macierzy **r** :

Element r_{11} jest równy pierwiastkowi z odpowiadającego mu położeniem elementu (N_{11}) macierzy **N**.

$$r_{11} = \sqrt{N_{11}} \tag{8.23}$$

Dalsze elementy pierwszego wiersza macierzy **r** obliczamy jako iloraz elementu N_{1i} o tym samym położeniu co szukany element r_{1i} przez element r_{11}, czyli:

$$r_{1i} = \frac{N_{1i}}{r_{11}} \tag{8.24}$$

Obliczenie elementów drugiego wiersza macierzy **r** wynika z następujących działań:

$$\mathbf{r}^T_{(2)} \cdot \mathbf{r}_2 = N_{22} \quad ; \quad r_{22}^2 = N_{22} - r_{12}^2 \qquad r_{22} = \sqrt{N_{22} - r_{12}^2}\ ;$$

$$\mathbf{r}^T_{(2)} \cdot \mathbf{r}_3 = N_{23} \quad ; \quad r_{12} \cdot r_{13} + r_{22} \cdot r_{23} = N_{23} \qquad r_{23} = \frac{N_{23} - r_{12} \cdot r_{13}}{r_{22}}\ ;$$

....

$$\mathbf{r}^T_{(2)} \cdot \mathbf{r}_n = N_{2n} \quad ; \quad r_{12} \cdot r_{1n} + r_{22} \cdot r_{2n} = N_{2n} \qquad r_{2n} = \frac{N_{2n} - r_{12} \cdot r_{1n}}{r_{22}}\ ;$$

Dla trzeciego wiersza otrzymamy:

$$\mathbf{r}^T_{(3)} \cdot \mathbf{r}_3 = N_{33} \quad ; \quad r_{33}^2 = N_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2 \qquad r_{33} = \sqrt{N_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2}\ ;$$

....

$$\mathbf{r}^T_{(3)} \cdot \mathbf{r}_n = N_{3n}\ ;\ r_{13} \cdot r_{1n} + r_{23} \cdot r_{2n} + r_{33} \cdot r_{3n} = N_{3n} \qquad r_{3n} = \frac{N_{3n} - r_{13} \cdot r_{1n} - r_{23} \cdot r_{2n}}{r_{33}}\ ;$$

Powyższy sposób postępowania i jego kontynuowanie dla następnych elementów pozwala na sformułowanie zasad ogólnych obliczania elementów macierzy **r**, wśród których wyróżniamy elementy przekątne i elementy położone ponad przekątną główną.

Dla elementu przekątnego r_{jj} w j-tym wierszu napiszemy:

$$r_{jj} = \sqrt{N_{jj} - (r_{1j}^2 + r_{2j}^2 + r_{3j}^2 + \cdots + r_{j-1,j}^2)} \tag{8.25}$$

Element przekątny r_{jj} macierzy **r** jest równy pierwiastkowi z elementu N_{jj} macierzy wyjściowej **N**, który odpowiada położeniem elementowi szukanemu, pomniejszonego o sumę kwadratów elementów macierzy **r** położonych nad elementem szukanym.

Element r_{ji} znajdujący się nad przekątną główną ($j < i$) w j-tym wierszu oraz i-tej kolumnie wyniesie:

$$r_{ji} = \frac{N_{ji} - (r_{1\,j-1} \cdot r_{1\,i} + r_{2\,j-1} \cdot r_{2\,i} + \cdots + r_{j-1\,j-1} \cdot r_{j-1\,i})}{r_{jj}} \tag{8.26}$$

Element r_{ji} położony nad przekątną główną macierzy **r** jest równy ilorazowi różnicy elementu N_{ji} macierzy wyjściowej **N**, który odpowiada położeniem elementowi szukanemu, i sumy iloczynów elementów macierzy **r** położonych nad elementem przekątnym r_{jj} i nad elementem szukanym, przez element przekątny macierzy **r** znajdujący się w tym samym wierszu co element szukany.

Po dokonani rozkładu macierzy **N** na czynniki $\mathbf{r}^T$, **r** obliczamy elementy r' odwrotności $\mathbf{r}^{-1}$ macierzy **r** z zależności:

$$\mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{E} \tag{8.27}$$

Pełny zapis powyższej formuły przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} & \cdots & r'_{1n} \\ 0 & r'_{22} & r'_{23} & \cdots & r'_{2n} \\ 0 & 0 & r'_{33} & \cdots & r'_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r'_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}^{-1} \quad \cdot \quad \mathbf{r} \quad = \quad \mathbf{E}$$

Z mnożenia jednoimiennych wierszy macierzy $\mathbf{r}^{-1}$ i kolumn macierzy **r** wynika ogólna prawidłowość: elementy przekątne macierzy $\mathbf{r}^{-1}$ są odwrotnościami odpowiednich elementów przekątnych macierzy **r**:

$$r'_{jj} = \frac{1}{r_{jj}} \tag{8.28}$$

Obliczanie elementów macierzy trójkątnej należy rozpocząć właśnie od elementów przekątnych. Zależność ta wynika stąd, że iloczyny jednoimiennych wierszy macierzy **r** i kolumn macierzy $\mathbf{r}^{-1}$ są równe elementom przekątnym macierzy **E**, czyli jedności.

Pozostałe iloczyny wierszy i kolumn są równe zero, ponieważ poza przekątną główną macierzy **E** występują wyłącznie elementy zerowe. Każdy iloczyn $\mathbf{r}_{(j)}^{-1} \cdot \mathbf{r}_i$ ($j < i$) pozwala na wyznaczenie kolejnego elementu r'_{ji} macierzy $\mathbf{r}^{-1}$ z równania z jedną niewiadomą.

Po określeniu odwrotności $\mathbf{r}^{-1}$ macierzy **r** można następnie obliczyć elementy odwrotności $\mathbf{N}^{-1}$ macierzy wyjściowej **N** ze wzoru:

$$\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{r}^{-1} \cdot (\mathbf{r}^{-1})^T \tag{8.29}$$

Przykład:

Stosując metodę rozkładu na czynniki trójkątne obliczyć odwrotność macierzy **N**.

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Obliczenie macierzy **r**: $$\mathbf{r}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Sprawdzenie: $$\mathbf{r}^T\cdot\mathbf{r}=\mathbf{N}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&5&-2\\-1&-2&2\end{bmatrix}$$

Obliczenie odwrotności macierzy **r**: $$\mathbf{r}^{-1}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Obliczenie odwrotności macierzy **N**:

$$\mathbf{N}^{-1}=\mathbf{r}^{-1}\cdot(\mathbf{r}^{-1})^T=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-2&1\\-2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

Sprawdzenie:

$$\mathbf{N}^{-1}\cdot\mathbf{N}=\mathbf{E}=\begin{bmatrix}6&-2&1\\-2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&5&-2\\-1&-2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

8.12. Zastosowanie odwrotności macierzy do rozwiązywania układów równań liniowych

Niech będzie dany układ n równań o n niewiadomych:

$$\begin{aligned}a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+\ \dots\ n_1x_n&=l_1\\a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+\ \dots\ n_2x_n&=l_2\\a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3+\ \dots\ n_3x_n&=l_3\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\\a_nx_1+b_nx_2+c_nx_3+\ \dots\ n_nx_n&=l_n\end{aligned}$$

Z powyższego układu można utworzyć następujące macierze:

$$\mathbf{a}=\underbrace{\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1&\cdots&n_1\\a_2&b_2&c_2&\cdots&n_2\\a_3&b_3&c_3&\cdots&n_3\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_n&b_n&c_n&\cdots&n_n\end{bmatrix}}_{\text{macierz współczynników}}\ ;\quad \mathbf{l}=\underbrace{\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\l_3\\\dots\\l_n\end{bmatrix}}_{\text{macierz wyrazów wolnych}}\ ;\quad \mathbf{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\dots\\x_n\end{bmatrix}}_{\text{macierz niewiadomych}}$$

Zapis układu równań w postaci macierzowej jest następujący:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{l} \tag{8.30}$$

Obliczenie odwrotności $\mathbf{a}^{-1}$ macierzy **a** pozwala na wyznaczenie niewiadomych ze wzoru:

$$\mathbf{x}=\mathbf{a}^{-1}\cdot\mathbf{l} \tag{8.31}$$

Z wzoru (8.31) wynika, że macierz niewiadomych jest równa odwrotności macierzy współczynników pomnożonej przez macierz wyrazów wolnych. Wyznaczenie niewia-

domych układu równań liniowych za pomocą odwrotności macierzy współczynników nosi nazwę *metody nieoznaczonej* rozwiązania układu.

Uwaga! Wzór (8.31) dotyczy układu, w którym wyrazy wolne występują po **prawej** stronie równań.

Przykład:

Wykorzystując odwrotność macierzy współczynników rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3 &= 1 \\ x_1+4x_2 &= 2 \\ x_1-2x_2+3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Kontrolne równanie sumowe: $3x_1+4x_2+2x_3=-4$

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{l}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{a}^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{a}^{-1}\cdot\mathbf{l}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1=-2;\ x_2=+1;\ x_3=-1.$$

Sprawdzenie rozwiązania poprzez podstawienie niewiadomych do równania sumowego: $3\cdot(-2)+4\cdot 1+2\cdot(-1)=-4$.

8.13. Zarys wyrównania spostrzeżeń pośredniczących w ujęciu macierzowym

Z układu równań poprawek dla n spostrzeżeń i u niewiadomych:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1dx+b_1dy+c_1dz+\ldots+k_1du+l_1 \\ v_2 &= a_2dx+b_2dy+c_2dz+\ldots+k_2du+l_2 \\ v_3 &= a_3dx+b_3dy+c_3dz+\ldots+k_3du+l_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= a_ndx+b_ndy+c_ndz+\ldots+k_ndu+l_n \end{aligned}$$

można wyodrębnić następujące macierze o wymiarach:

1. Macierz współczynników równań poprawek: $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & k_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & k_n \end{bmatrix}_{u,n}$

2. Macierz niewiadomych: $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \vdots \\ du \end{bmatrix}_{1,u}$

3. Macierz wyrazów wolnych równań poprawek: $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \dots \\ l_n \end{bmatrix}_{1,n}$

4. Macierz poprawek: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}_{1,n}$

5. Macierz wag (dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych) $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}_{n,n}$

Po wprowadzeniu powyższych oznaczeń zapis macierzowy układu równań poprawek przedstawia wzór:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{l} \tag{8.32}$$

Po uwzględnieniu warunku najmniejszej sumy kwadratów poprawek, czyli: $[vv]$ = minimum – dla spostrzeżeń pośredniczących jednakowo dokładnych lub [pvv] = minimum – dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych, zostaje utworzony układ równań normalnych, którego ogólny zapis przedstawia się następująco:

Dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych

$[aa]dx+[ab]dy+[ac]dz+\ldots+[ak]du+[al]=0$
$[ab]dx+[bb]dy+[bc]dz+\ldots+[bk]du+[bl]=0$
$[ac]dx+[bc]dy+[cc]dz+\ldots+[ck]du+[cl]=0$
....
$[ak]dx+[bk]dy+[ck]dz+\ldots+[kk]du+[kl]=0$

Dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych

$[paa]dx+[pab]dy+[pac]dz+\ldots+[pak]du+[pal] = 0$
$[pab]dx+[pbb]dy+[pbc]dz+\ldots+[pbk]du+[pbl] = 0$
$[pac]dx+[pbc]dy+[pcc]dz+\ldots+[pck]du+[pcl] = 0$
....
$[pak]dx+[pkb]dy+[pck]dz+\ldots+[pkk]du+[pkl] = 0$

W ujęciu macierzowym układ równań normalnych przyjmie postać:

- dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych: $(\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0}$ (8.33)
- dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych: $(\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0}$ (8.33 a)

Macierz powstająca z iloczynu $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a}$ lub $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}$ jest symetryczną macierzą **N** współczynników równań normalnych, przy czym:

$$\mathbf{N} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & \cdots & [ak] \\ [ab] & [bb] & [bc] & \cdots & [bk] \\ [ac] & [bc] & [cc] & \cdots & [ck] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [ak] & [bk] & [ck] & \cdots & [kk] \end{bmatrix} \tag{8.34}$$

lub dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych:

$$\mathbf{N} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{a} = \begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] & \cdots & [pak] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] & \cdots & [pbk] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] & \cdots & [pck] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [pak] & [pbk] & [pck] & \cdots & [pkk] \end{bmatrix} \qquad (8.34\ a)$$

Z iloczynu $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{l}$ powstaje natomiast jednokolumnowa macierz **L** wyrazów wolnych równań normalnych dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych.

$$\mathbf{L} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{l} = \begin{bmatrix} [al] \\ [bl] \\ [cl] \\ \vdots \\ [kl] \end{bmatrix} \qquad (8.35)$$

Dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych macierz wyrazów wolnych utworzona na podstawie iloczynu $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{l}$ wyniesie:

$$\mathbf{L} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{l} = \begin{bmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ [pcl] \\ \vdots \\ [pkl] \end{bmatrix} \qquad (8.35\ a)$$

Uwzględniając powyższe oznaczenia macierzowe możemy więc zapisać równania normalne jako:

$$(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{a})\cdot\mathbf{x} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{l} = \mathbf{0} \qquad (8.36)$$

lub

$$(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})\cdot\mathbf{x} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{l} = \mathbf{0} \qquad (8.36\ a)$$

zaś po uwzględnieniu oznaczeń macierzy **N**, **L** można uprościć zapis w postaci:

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{L} = \mathbf{0} \qquad (8.37)$$

Zgodnie z wzorem (8.31) rozwiązanie układu równań normalnych otrzymamy na podstawie równania:

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1}\cdot\mathbf{L} \qquad (8.38)$$

Znak minus, który pojawił się w powyższym wzorze wynika stąd, że wyrazy wolne równań normalnych występują po ich lewej stronie.

Po obliczeniu niewiadomych i ich podstawieniu do wzoru (8.32) określimy poprawki v, a następnie spostrzeżenia wyrównane $L + v$. Należy także obliczyć ostateczne wartości niewiadomych:

$$x = x_0 + dx;\ y = y_0 + dy;\ z = z_0 + dz;\ \ldots \qquad (8.39)$$

Po obliczeniu poprawek v należy dokonać tzw. *kontroli ogólnej*, sprawdzając spełnienie równości:

$$[vv] = [al]dx + [bl]dy + [cl]dz + \ldots + [kl]du + [ll] = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} \qquad (8.40)$$

lub

$$[pvv] = [pal]dx + [pbl]dy + [pcl]dz + \ldots + [pkl]du + [pll] = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} \qquad (8.40\ a)$$

Kontrola ostateczna (generalna) polega na podstawieniu niewiadomych do równań obserwacyjnych i sprawdzeniu ich spełnienia.

Ostatni etap wyrównania stanowi *ocena dokładności*. Obejmuje ona obliczenie średniego błędu pojedynczego spostrzeżenia m_0 oraz średnich błędów niewiadomych: m_x, m_y, m_z,... . Średni błąd typowego spostrzeżenia jest określony wzorem:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} \tag{8.41}$$

Symetryczna macierz $\mathbf{N}^{-1}$, wykorzystywana do obliczenia niewiadomych, jest zarazem macierzą tzw. *współczynników wagowych Q* potrzebnych do obliczenia średnich błędów niewiadomych (po wyrównaniu) na podstawie następujących wzorów:

$$m_x = m_0\sqrt{Q_{11}}\ ;\quad m_y = m_0\sqrt{Q_{22}}\ ;\quad m_z = m_0\sqrt{Q_{33}}\ ... \tag{8.42}$$

Współczynniki Q_{11}, Q_{22}, Q_{33},...są elementami przekątnymi macierzy $\mathbf{N}^{-1}$:

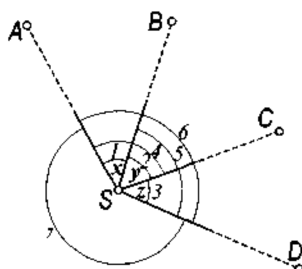
$$(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})^{-1} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \cdots & Q_{1u} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \cdots & Q_{2u} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & \cdots & Q_{3u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{u1} & Q_{u2} & Q_{u3} & \cdots & Q_{uu} \end{bmatrix} \tag{8.43}$$

Bardziej szczegółowo zagadnienie oceny dokładności jest omawiane na wykładach i w podręcznikach rachunku wyrównawczego.

<u>Przykład</u>:

Wyrównać jednakowo dokładne kąty pomierzone na pojedynczym stanowisku obserwacyjnym S do punktów A, B, C, D.

Nr kąta	Wartość kąta		
	g	c	cc
1	40	00	05
2	50	00	03
3	55	00	02
4	90	00	05
5	105	00	00
6	145	00	02
7	254	99	95



1. Wyznaczenie przybliżonych wartości niewiadomych:
   $x_0 = 40^g00^c00^{cc}$; $y_0 = 50^g00^c00^{cc}$; $z_0 = 55^g00^c00^{cc}$
2. Zestawienie równań obserwacyjnych i równań błędów:

Równania obserwacyjne:	Równania błędów:
$L_1+v_1 = x$	$v_1 = dx \qquad -5$
$L_2+v_2 = y$	$v_2 = dy \qquad -3$
$L_3+v_3 = z$	$v_3 = dz \qquad -2$
$L_4+v_4 = x + y$	$v_4 = dx + dy \qquad -5$
$L_5+v_5 = y + z$	$v_5 = dy + dz$
$L_6+v_6 = x + y + z$	$v_6 = dx + dy + dz \qquad -2$
$L_7+v_7 = -x - y - z + 400^g$	$v_7 = -dx - dy - dz \qquad +5$

3. Zapis równań poprawek w formie macierzowej:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \\ +5 \end{bmatrix}$$

4. Równania normalne w formie macierzowej:

$$(\mathbf{a}^T\cdot\mathbf{a})\cdot\mathbf{x} + \mathbf{a}^T\cdot\mathbf{l} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot\mathbf{x} + \begin{bmatrix} -17 \\ -15 \\ -9 \end{bmatrix} = 0$$

5. Obliczenie niewiadomych:

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1}\cdot\mathbf{L} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1{,}375 & -0{,}75 & -0{,}125 \\ -0{,}75 & 1{,}5 & -0{,}75 \\ -0{,}125 & -0{,}75 & 1{,}375 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -17 \\ -15 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$dx = +3\tfrac{2}{3} = 3{,}67^{cc}\ ;\ dy = +1{,}00^{cc}\ ;\ dz = -\tfrac{1}{3} = -0{,}33^{cc}$$

6. Sprawdzenie rozwiązania równań normalnych:
   Równanie sumowe układu równań normalnych: $9dx+11dy+9dz-41=0$

$$9\cdot3\tfrac{2}{3} + 11\cdot1 + 9\cdot(-\tfrac{1}{3}) - 41 = 33+11-3-41 = 0$$

7. Obliczenie poprawek:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3\frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \\ +5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}67 \\ 1 \\ -0{,}33 \\ 4{,}67 \\ 0{,}67 \\ 4{,}33 \\ -4{,}33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \\ +5 \end{bmatrix} = \overset{[cc]}{\begin{bmatrix} -1{,}33 \\ -2 \\ -2{,}33 \\ -0{,}33 \\ 0{,}67 \\ 2{,}33 \\ 0{,}67 \end{bmatrix}}$$

8. Kontrola ogólna: $[vv] = 17{,}66(6)$

$$\mathbf{l}^T\cdot\mathbf{l} + \mathbf{l}^T\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = 92 - 74{,}33(3) = 17{,}66(6)$$

9. Wyznaczenie niewiadomych, kąty wyrównane i kontrola ostateczna:

$x = (1)+v_1 = 40{,}0003_7^g$
$y = (2)+v_2 = 50{,}0001_0^g$
$z = (3)+v_1 = 54{,}9999_7^g$

$(4)+v_3 = 90{,}0004_7^g$ $\quad x + y = 90{,}0004_7^g$
$(5)+v_5 = 105{,}0000_7^g$ $\quad y + z = 105{,}0000_7^g$
$(6)+v_6 = 145{,}0004_3^g$ $\quad x + y + z = 145{,}0004_4$
$(7)+v_7 = 254{,}9995_7^g$ $\quad 400^g - (x+y+z) = 254{,}9995_6$

10. Ocena dokładności:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} = \pm\sqrt{\frac{17,67}{7-3}} = \pm 2,1^{cc}$$

$$\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0,4583 & -0,25 & -0,0417 \\ -0,25 & 0,5 & -0,25 \\ -0,0417 & -0,25 & 0,4583 \end{bmatrix}$$

$$m_x = m_0\sqrt{Q_{11}} = \pm 2,1^{cc}\sqrt{0,4583} = \pm 1,4^{cc};\ m_y = m_0\sqrt{Q_{22}} = \pm 2,1^{cc}\sqrt{0,5} = \pm 1,5^{cc};$$

$$m_z = m_0\sqrt{Q_{33}} = \pm 2,1^{cc}\sqrt{0,4583} = \pm 1,4^{cc}$$

8.14. Zarys wyrównania spostrzeżeń zawarunkowanych w ujęciu macierzowym

Z układu równań odchyłek:

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n + \omega_a &= 0 \\ b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + \ldots + b_nv_n + \omega_b &= 0 \\ c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \ldots + c_nv_n + \omega_c &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 + \ldots + r_nv_n + \omega_r &= 0 \end{aligned}$$

utworzonego dla n spostrzeżeń i r warunków, można zestawić następujące macierze:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n \end{bmatrix};\quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \\ \vdots \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

WYMIARY: macierz współczynników r – wierszy; n – kolumn; macierz poprawek n – wierszy, 1 kolumna; macierz odchyłek r – wierszy, 1 kolumna

Zapis układu równań odchyłek w postaci macierzowej jest następujący:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \tag{8.44}$$

Do zapisu równań normalnych korelat w postaci:

$$\left[\frac{aa}{p}\right]\cdot k_a + \left[\frac{ab}{p}\right]\cdot k_b + \left[\frac{ac}{p}\right]\cdot k_c + \cdots + \left[\frac{ar}{p}\right]\cdot k_r + \omega_a = 0$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right]\cdot k_a + \left[\frac{bb}{p}\right]\cdot k_b + \left[\frac{bc}{p}\right]\cdot k_c + \cdots + \left[\frac{br}{p}\right]\cdot k_r + \omega_b = 0$$

$$\left[\frac{ac}{p}\right]\cdot k_a + \left[\frac{bc}{p}\right]\cdot k_b + \left[\frac{cc}{p}\right]\cdot k_c + \cdots + \left[\frac{cr}{p}\right]\cdot k_r + \omega_c = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left[\frac{ar}{p}\right]\cdot k_a + \left[\frac{br}{p}\right]\cdot k_b + \left[\frac{cr}{p}\right]\cdot k_c + \cdots + \left[\frac{rr}{p}\right]\cdot k_r + \omega_r = 0$$

niezbędne jest określenie macierzy odwrotności wag $\mathbf{p}^{-1}$ (dla spostrzeżeń zawarunkowanych niejednakowo dokładnych) oraz macierzy korelat **k**.

$$\mathbf{p}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p_3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_a \\ k_b \\ k_c \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix}$$

macierz współczynników WYMIARY	macierz odwrotności wag n – wierszy, n – kolumn	macierz korelat r – wierszy; 1 kolumna

Po wprowadzeniu powyższych oznaczeń zapis macierzowy układu równań normalnych korelat przedstawiają formuły:

- dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T) \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} = 0$ (8.45)
- dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}^{-1} \cdot \mathbf{a}^T) \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} = 0$ (8.45 a)

Macierz powstająca z iloczynu $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T$ lub $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}^{-1} \cdot \mathbf{a}^T$ jest symetryczną macierzą **N** współczynników równań normalnych korelat, stąd po wprowadzeniu symbolu macierzy **N** powyższe wzory można też zapisać jako: $\mathbf{N} \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.

Zgodnie z wzorem (8.31) macierz korelat otrzymamy z zależności:

$$\mathbf{k} = -\mathbf{N}^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{8.46}$$

Po obliczeniu macierzy korelat dokonujemy podstawienia korelat do układu równań poprawek wyrażonych przez korelaty, który w zapisie macierzowym przyjmie postać:

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}^{-1} \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{k} \tag{8.47}$$

Po obliczeniu poprawek v należy dokonać *kontroli ogólnej*, sprawdzając spełnienie równości:

$$[vv] = -[\omega \cdot k] = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} = -\boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{k} \tag{8.48}$$

lub

$$[pvv] = -[\omega \cdot k] = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = -\boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{k} \tag{8.48 a}$$

Kontrola ostateczna (generalna) polega na podstawieniu poprawek do wyjściowych równań warunkowych i sprawdzeniu ich spełnienia.

Średni błąd pojedynczego spostrzeżenia jest określony wzorem:

$$m = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{r}} \tag{8.49}$$

Średni błąd jednostkowy (dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych) wyniesie:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{p}\, \mathbf{v}}{r}} \tag{8.49 a}$$

8.15. Wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego Excel do obliczeń macierzowych

Popularny w Polsce arkusz kalkulacyjny Microsoft Excel wśród bardzo licznych funkcji standardowych posiada również kilka funkcji realizujących podstawowe działania macierzowe. Ich nazwy w polskiej wersji programu zostały zestawione w tabeli 8.3.

Tabela 8.3. Funkcje programu Excel realizujące działania macierzowe

L. p.	Grupa funkcji	Nazwa funkcji	Działanie funkcji
1	Wyszukiwania i adresu	TRANSPONUJ	Dokonuje transpozy zadanej macierzy, czyli zamienia kolumny na wiersze.
2	Matematyczne	WYZNACZNIK.MACIERZY	Oblicza wyznacznik danej macierzy lub tablicy liczbowej określonej w arkuszu.
3		MACIERZ.ILOCZYN	Realizuje iloczyn dwóch macierzy, spełniających warunek iloczynu.
4		MACIERZ.ODW	Oblicza macierz odwrotną do macierzy danej, określonej w arkuszu.

8.15.1. Transponowanie macierzy

Macierz wpisaną do arkusza można transponować za pomocą funkcji TRANSPONUJ. Dla dokonania transpozy należy wpisać elementy macierzy wyjściowej do poszczególnych komórek arkusza. Dla przykładu weźmy pod uwagę macierz **a** z poprzedniego przykładu i wpiszmy jej elementy do komórek w zakresie A1:C7 (rys. 8.8).

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

W arkuszu zaznaczamy zakres komórek (E1: I3) przeznaczonych na umieszczenie transpozy macierzy **a**, po czym w zaznaczonym bloku i zarazem na pasku formuły wpisujemy: =TRANSPONUJ(A1:C7). Aby nie wprowadzać zakresu komórek lokalizujących macierz wyjściową możemy ją wcześniej zaznaczyć, po czym wprowadzić nazwę macierzy - **a**, korzystając z menu i polecenia Wstaw/Nazwa/Definiuj. W tym wypadku na pasku formuły wpiszemy: =TRANSPONUJ(a).



Rys. 8.8. Transpoza macierzy w arkuszu kalkulacyjnym Excel

Po zaznaczeniu zakresu komórek przeznaczonych na elementy transpozy i wpisaniu funkcji na pasku formuły, naciskamy kombinację klawiszy [Ctrl]+[Shift]+[Enter], uzyskując wprowadzenie macierzy $\mathbf{a}^T$ w wybranym miejscu. Naciśnięcie samego klawisza [Enter], zamiast wspomnianej kombinacji, spowoduje zapis tylko pierwszego elementu macierzy $\mathbf{a}^T$. Dla wygody dalszych działań poprzez menu Wstaw nadajmy tej macierzy nazwę np. transp**a** (bez spacji).

8.15.2. Obliczanie wyznacznika tablicy kwadratowej

W celu obliczenia wyznacznika tablicy kwadratowej wprowadzamy jej elementy do wybranego zakresu komórek. Podobnie jak poprzednio można również za pomocą polecenia Wstaw/Nazwa/Definiuj określimy nazwę tablicy jako **b**.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

E2 = =WYZNACZNIK.MACIERZY(b)

	A	B	C	D	E	F
1	1	3	0		wyznacznik **b**	
2	2	2	-1		6	
3	1	5	-1			
4		macierz **b**				
5					Enter	

Rys. 8.9. Obliczanie wyznacznika tablicy kwadratowej

Następnie zaznaczamy tę komórkę arkusza, w której znajdzie się obliczona wartość wyznacznika, po czym w komórce tej i zarazem na pasku formuły wpisujemy nazwę funkcji oraz oznaczenie tablicy: =WYZNACZNIK.MACIERZY(b). Po naciśnięciu klawisza [ENTER] w wybranej komórce pojawi się wartość wyznacznika tablicy (rys. 8.9).

8.15.3. Obliczanie iloczynu macierzowego

Za pomocą programu Excel wykonajmy mnożenie dwóch macierzy:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

C5 = {=MACIERZ.ILOCZYN(A1:B3;D1:F2)}

	A	B	C	D	E	F
1	2	6		5	2	1
2	4	0		3	5	8
3	-1	2			macierz **B**	
4	macierz **A**					
5			28	34	50	
6			20	8	4	
7			1	8	15	
8				iloczyn **AB**		
9						

Rys. 8.10. Obliczanie iloczynu dwóch macierzy

Po wprowadzeniu elementów powyższych macierzy do arkusza, zaznaczamy blok komórek, do którego zostanie wpisany wynik mnożenia. Należy przy tym pamiętać, że iloczyn ma tyle wierszy ile ich ma pierwszy czynnik i tyle kolumn – co drugi czynnik. Następnie w wyznaczonym obszarze wpisujemy znak =, nazwę funkcji „MACIERZ.ILOCZYN",

zaś w nawiasie zdefiniowane wcześniej nazwy obu macierzy lub ich zakresy komórek oddzielone znakiem średnika ; (rys. 8.10). Po jednoczesnym naciśnięciu kombinacji klawiszy [Ctrl]+[Shift]+[Enter] w zaznaczonym obszarze zostanie wpisana macierz stanowiąca wynik mnożenia.

8.15.4. Obliczanie odwrotności macierzy

Podobnie jak w poprzednich zadaniach wpisujemy elementy macierzy kwadratowej i definiujemy jej nazwę np. **d** (rys. 8.11).

Zaznaczamy zakres komórek przeznaczonych na wpisanie elementów odwrotności, której wymiary są takie same jak wymiary macierzy **d**, po czym zapisujemy formułę: =MACIERZ.ODW(d). Po jednoczesnym naciśnięciu trzech przycisków: [Ctrl]+[Shift]+[Enter], otrzymujemy w zaznaczonym miejscu odwrotność macierzy **d**.

$$\mathbf{d}=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

E1 = {=MACIERZ.ODW(d)}

	A	B	C	D	E	F	G
1	4	3	2		0,458333	-0,25	-0,04167
2	3	5	3		-0,25	0,5	-0,25
3	2	3	4		-0,04167	-0,25	0,458333
4		macierz **d**				odwrotność **d**	
5							

Rys. 8.11. Obliczanie odwrotności macierzy

8.15.5. Rozwiązywanie układów równań liniowych

Funkcje pozwalające na obliczenie odwrotności i iloczynów macierzy umożliwiają tym samym rozwiązywanie układów równań liniowych w oparciu o wzór (8.31).

Przykład:

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3 &= 1\\ x_1+4x_2 &= 2\\ x_1-2x_2+3x_3 &= -7\end{aligned}$$

G1 = {=MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ODW(a);l)}

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	2	-1		1		-2
2	1	4	0		2		1
3	1	-2	3		-7		-1
4		macierz **a**			macierz **l**		macierz **x**

Rys. 8.12. Wykorzystanie programu Excel do rozwiązywania układów równań liniowych

W arkuszu kalkulacyjnym zestawiamy z elementów równań dwie macierze: współczynnikową **a** i wyrazów wolnych **l**. oraz definiujemy ich nazwy. Następnie zaznaczamy blok komórek przeznaczonych na jednokolumnową macierz niewiadomych **x** i wpisujemy formułę: =MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ODW(a);l). Po naciśnięciu [Ctrl]+[Shift]+[Enter] w wybranym miejscu otrzymamy rozwiązanie układu.

8.16. Wyrównanie spostrzeżeń pośredniczących w Excelu

Wymienione wcześniej elementy rachunku macierzowego, realizowane w arkuszu kalkulacyjnym Excel, umożliwiają zapisanie formuł pozwalających na równoczesne wykonanie szeregu czynności obliczeniowych związanych z wyrównaniem obserwacji metodą pośredniczącą. W pierwszej kolejności należy zestawić równania obserwacyjne, a następnie równania błędów, po czym wpisać do arkusza macierze: **a**, **l** pochodzące równań błędów i zdefiniować ich nazwy tymi symbolami.

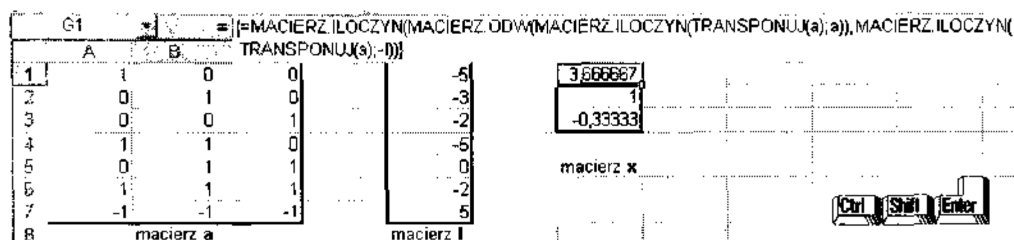
Formuła podana dalej realizuje następujące etapy wyrównania:

- określenie współczynników przy niewiadomych równań normalnych oraz wyrazów wolnych tych równań;
- obliczenie niewiadomych równań normalnych.

Dla rozwiązania powyższego zadania należy zaznaczyć blok komórek przeznaczony dla macierzy **x**, w którym wpiszemy formułę:

=MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ODW(MACIERZ.ILOCZYN(TRANSPONUJ(a);a)); MACIERZ.ILOCZYN (TRANSPONUJ(a);–l))

Należy przy tym zwracać uwagę, aby nie pominąć żadnego znaku!



Rys. 8.13. Obliczenie niewiadomych na podstawie równań błędów

Po naciśnięciu kombinacji klawiszy [Ctrl]+[Shift]+[Enter] (a nie samego [Enter]) w zaznaczonych komórkach zostaną wpisane niewiadome uzyskane w efekcie rozwiązania równań normalnych przez program. Na rysunku 8.13 pokazano fragment arkusza zawierający rozwiązanie przykładu z ust. 8.13.

W tym samym arkuszu możemy także obliczyć macierz **Q**, której elementami są współczynniki wagowe (rys. 8.14). W tym celu zaznaczamy blok komórek o wymiarach $u \times u^*$, i wpisujemy w nim formułę: =MACIERZ.ODW(MACIERZ.ILOCZYN(TRANSPONUJ(a);a)) po czym jak zwykle wciskamy klawisze: [Ctrl]+[Shift]+[Enter].

<u>Uwaga</u>: W innych arkuszach tego samego skoroszytu nie można przypisywać jednakowych nazw różnym macierzom!

[*] u – liczba niewiadomych.

F9 = {=MACIERZ.ODW(MACIERZ.ILOCZYN(TRANSPONUJ(a);a))}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	0	0		-5		3,666667	
2	0	1	0		-3		1	
3	0	0	1		-2		-0,33333	
4	1	1	0		-5			
5	0	1	1		0		macierz **x**	
6	1	1	1		-2			
7	-1	-1	-1		5			
8		macierz **a**			macierz **l**			
9						0,458333	-0,25	-0,04167
10						-0,25	0,5	-0,25
11						-0,04167	-0,25	0,458333
12							macierz **Q**	

Rys. 8.14. Obliczenie współczynników *Q*

Do wyrównania spostrzeżeń pośredniczących niejednakowo dokładnych trzeba dodatkowo wprowadzić macierz wag **p**. Dla przykładu rozwiążmy zadanie wyrównania metodą pośredniczącą sieci niwelacyjnej zamieszczone w ust. 10.5. Wpisujemy do arkusza macierz przekątną z wagami oraz elementami zerowymi i definiujemy jej nazwę jako **p**. Następnie zaznaczamy blok komórek macierzy **x** i wpisujemy formułę:

=MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ODW(MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ILOCZYN
(TRANSPONUJ(a);p);a));MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ILOCZYN(TRANSPONUJ(a);p);-l))

Po naciśnięciu klawiszy [Ctrl]+[Shift]+[Enter] otrzymamy niewiadome.

B11 = {=MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ODW(MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ILOCZYN(TRANSPONUJ(a);p);a)); MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ILOCZYN(TRANSPONUJ(a);p);-l))}

	A	B												
1	1	0	0		0		0,78	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	1		-4		0	0,57	0	0	0	0	0	0
3	-1	0	1		8		0	0	0,62	0	0	0	0	0
4	-1	1	0		7		0	0	0	0,66	0	0	0	0
5	-1	1	0		-2		0	0	0	0	0,63	0	0	0
6	0	-1	0		0		0	0	0	0	0	0,65	0	0
7	0	-1	1		-8		0	0	0	0	0	0	0,82	0
8	0	0	-1		0		0	0	0	0	0	0	0	0,96
9		macierz **a**			macierz **l**					macierz **p**				
10														
11		1,284		0,54610	0,32272	0,30585								
12		-2,479		0,32272	0,55633	0,28101								
13		1,129		0,30585	0,28101	0,53324								
14		macierz **x**			macierz **Q**									

Rys. 8.15. Wyrównanie spostrzeżeń pośredniczących niejednakowo dokładnych

Do obliczenia elementów macierzy **Q** korzystamy z formuły:

=MACIERZ.ODW(MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ILOCZYN(TRANSPONUJ(a);p);a))

8.17. Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych w Excelu

Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych w arkuszu Excel przebiega podobnie jak wyrównanie metodą pośredniczącą, jednak w rozwiązanym dalej przykładzie nie będziemy, tak jak poprzednio, zapisywać zbiorczych formuł, lecz dla przejrzystości rachunku przeprowadzimy wyrównanie poszczególnymi etapami.

Pracę rozpoczynamy od określenia liczby warunków, sformułowania równań warunkowych i doprowadzenia ich do równań odchyłek, z których wyodrębniamy

i wpisujemy do arkusza macierze: współczynników przy poprawkach w równaniach odchyłek **a**, oraz samych odchyłek **ω** (por. ust. 8.14). Dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych należy dodatkowo zestawić macierz odwrotności wag $\mathbf{p}^{-1}$.

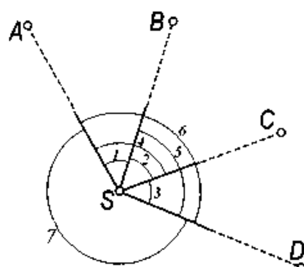
Podczas wpisywania macierzy do arkusza kalkulacyjnego można zalecić zaznaczanie macierzy i definiowanie ich nazw za pomocą polecenia: Wstaw/Nazwa/Definiuj, ponieważ znacznie upraszcza to zapis formuł obliczeniowych, realizujących poszczególne działania na macierzach. W poniższym przykładzie dla wymienionych macierzy użyto nazw: **a**, **ω**.

Rozwiążmy metodą warunkową z wykorzystaniem Excela zadanie z ust. 8.13 rozwiązane wcześniej jako przykład na wyrównanie spostrzeżeń pośredniczących.

Przykład:

Wyrównać jednakowo dokładne kąty pomierzone do punktów *A*, *B*, *C*, *D* na pojedynczym stanowisku obserwacyjnym *S*.

Nr kąta	Wartość kąta		
	g	c	cc
1	40	00	05
2	50	00	03
3	55	00	02
4	90	00	05
5	105	00	00
6	145	00	02
7	254	99	95



1. Określenie liczby warunków: $n = 7$; $u = 3$; $n_n = r = 4$
2. Zestawienie warunków i równań odchyłek:

$$L_1+v_1+L_2+v_2=L_4+v_4$$
$$L_2+v_2+L_3+v_3=L_5+v_5$$
$$L_1+v_1+L_2+v_2+L_3+v_3=L_6+v_6$$
$$L_6+v_6+L_7+v_7=400^g$$

Ozn.	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	ω	s
a	+1	+1	•	-1	•	•	•	+3	+4
b	•	+1	+1	•	-1	•	•	+5	+6
c	+1	+1	+1	•	•	-1	•	+8	+10
d	•	•	•	•	•	+1	+1	-3	-1

3. Zapis i zdefiniowanie oznaczeń macierzy **a**, **ω** w arkuszu.
4. Wyznaczenie i zdefiniowanie macierzy **N** (rys. 8.16) z iloczynu $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}^T$ (lub $\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}^{-1}\cdot\mathbf{a}^T$ dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych) na podstawie wzoru (8.45) lub (8.45 a) oraz formuły w arkuszu: =MACIERZ.ILOCZYN(a;TRANSPONUJ(a))
5. Obliczenie i zdefiniowanie macierzy korelat na podstawie wzoru $\mathbf{k} = \mathbf{N}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{\omega})$.

   Formuła: =MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ODW(N);–ω)
6. Po obliczeniu elementów macierzy korelat definiujemy i wyznaczamy macierz poprawek **v** w oparciu o wzór (8.47) $\mathbf{v} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{k}$ (lub $\mathbf{v} = \mathbf{p}^{-1} \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{k}$ dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych).

   Formuła: =MACIERZ.ILOCZYN(TRANSPONUJ(a);kor)

   Z powyższego zapisu wynika, że jako nazwę macierzy korelat przyjęto symbol **kor**.

7. Obliczenie $[vv]$ i kontrola ogólna: $[vv] = -[\omega \cdot k] = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} = -\boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{k}$

   Formuła: =MACIERZ.ILOCZYN(TRANSPONUJ(v);v) (obliczenie w komórce P8; rys. 8.16)
   lub krócej: =SUMA.KWADRATÓW(v) (obliczenie w komórce P7)
   Kontrola ogólna:
   Formuła: =MACIERZ.ILOCZYN(–TRANSPONUJ(ω);kor) (obliczenie w komórce P9)

8. Średni błąd pojedynczego spostrzeżenia obliczymy w oparciu o wzór: $m = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}{r}}$

   Formuła: =PIERWIASTEK(P8/4) (obliczenie w komórce P11).

P8 = {=MACIERZ.ILOCZYN(TRANSPONUJ(v);v)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Ozn.	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	ω	s		3	1	2	0		0,333333
2	*a*	1	1	0	-1	0	0	0	3	4		1	3	2	0		-0,66667
3	*b*	0	1	1	0	-1	0	0	5	6		2	2	4	-1		-1,66667
4	*c*	1	1	1	0	0	-1	0	8	10		0	0	-1	2		0,666667
5	*d*	0	[illegible]	0	0	0	1	1	-3	-1		macierz **N**					macierz **kor**
6		macierz **a**							ω								
7											-1,333					17,67	[vv]
8											-2					17,67	$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}$
9											-2,333					17,67	$-\boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{k}$
10											-0,333						
11											0,667					2,10	m
12											2,333						
13											0,667						
14											macierz **V**						

Rys. 8.16. Wyrównanie spostrzeżeń zawarunkowanych jednakowo dokładnych

ROZDZIAŁ 9: Wcięcia

9.1. Istota wcięć

Wcięcia, stosowane powszechnie do zagęszczania osnów poziomych, są podstawowymi zadaniami geodezyjnymi, polegającymi na określeniu położenia sytuacyjnego (poprzez obliczenie współrzędnych X, Y) pojedynczych punktów wyznaczanych (wciętych). Rzadziej dotyczy to dwóch punktów (np. w zadaniach Hansena i Mareka) lub sporadycznie grupy kilku punktów (por. ust. 9.9). Obliczenie współrzędnych punktów wcinanych jest możliwe dzięki ich geometrycznemu powiązaniu z punktami znanymi za pomocą pomierzonych w konstrukcji wcięcia tzw. *elementów wyznaczających*: kątów poziomych i (lub) długości boków.

Wcięcia pojedyncze, nazywane także zwykłymi lub elementarnymi, są zadaniami jednoznacznie wyznaczalnymi, a więc zawierającymi tylko tyle spostrzeżeń n, ile jest niezbędne do określenia u niewiadomych ($n = u$), którymi w tym przypadku są współrzędne prostokątne X, Y punktów szukanych. Jeden punkt wcinany dostarcza dwóch niewiadomych, toteż w konstrukcji wcięcia pojedynczego konieczny jest pomiar dwóch elementów geometrycznych. Wcięcia pojedyncze nie zawierają spostrzeżeń nadliczbowych, a więc nie występuje podczas ich obliczenia problem wyrównania.

W odróżnieniu od wcięć pojedynczych *wcięcia wielokrotne* zawierają więcej spostrzeżeń niż niewiadomych ($n > u$), a więc poszukiwane współrzędne punktów wciętych uzyskujemy jako niewiadome w rezultacie wyrównania obserwacji.

W trakcie zagęszczania osnowy poziomej metodą wcięć mogą występować różne rodzaje linii celowania (celowych) klasyfikowanych według dwóch kryteriów. Pierwszym z nich jest sposób celowania wzdłuż danego boku. W przypadku, gdy podczas pomiaru kątów poziomych o wspólnym ramieniu AB celowanie odbywa się zarówno w kierunku $A \rightarrow B$, jak i w kierunku przeciwnym $B \rightarrow A$, to taką linię celowania nazywamy *celową dwustronną*, a na szkicach konstrukcji osnów zaznaczamy ją linią ciągłą. Wynika stąd, że obydwa punkty są w tym wypadku zarówno stanowiskami teodolitu, jak i punktami celowania.

Celowa jednostronna jest linią, wzdłuż której pomiar kierunku następuje tylko z jej jednego końca. Na drugim końcu celowej jednostronnej nie ma stanowiska teodolitu, a więc nie występuje drugie celowanie w kierunku przeciwnym. Brak możliwości obustronnego celowania wynika przeważnie z braku widoczności celu na drugim stanowisku lub niedostępności jednego z punktów końcowych odcinka AB. Celową jednostronną zaznaczamy na szkicach linią w połowie ciągłą (od strony stanowiska pomiaru kąta), w połowie zaś – przerywaną.

Drugim kryterium podziału tzw. *celowych wyznaczających*, czyli celowych łączących w konstrukcji wcięcia punkty znane i szukane, jest rodzaj punktu, będącego stanowiskiem teodolitu podczas pomiarów kątów poziomych. *Celowe zewnętrzne* (celowe w przód) są liniami wychodzącymi z punktów znanych w kierunku punktów szukanych (np. przy wcięciu kątowym w przód), natomiast *celowe wewnętrzne* (celowe wstecz) biegną w kierunku odwrotnym, a więc stanowiskiem pomiarowym jest dla nich dostępny punkt szukany (wcinany), z którego celujemy na punkty znane, jak ma to miejsce przy wcięciu wstecz.

Pojęć celowych zewnętrznych i wewnętrznych przeważnie nie używa się w odniesieniu do pomiarów liniowych, chociaż przy pomiarze odległości dalmierzami za-

leżnie od usytuowania ich stanowisk korzysta się niekiedy z określeń pomiarów liniowych w przód (z punktów znanych) lub wstecz (z punktu wyznaczanego).

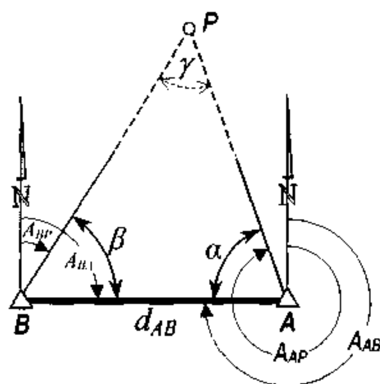
Wcięcia pojedyncze odgrywają w praktyce geodezyjnej dużą rolę, gdyż umożliwiają szybkie i łatwe wyznaczenie położeń punktów dostępnych i niedostępnych. Wśród licznych zastosowań tych wcięć można wymienić: określenie współrzędnych przybliżonych do wyrównania osnów poziomych, inwentaryzacja elewacji budowli, pomiary odkształceń i przemieszczeń, określanie punktów pomocniczych podczas prac fotogrametrycznych, topograficznych i innych.

9.2. Kątowe wcięcie w przód

9.2.1. Konstrukcja wcięcia

Kątowe wcięcie w przód polega na określeniu współrzędnych punktu wcinanego P (rys. 9.1) na podstawie danych wyjściowych, którymi są: dwa kąty poziome α, β pomierzone w trójkącie ABP na stanowiskach: A, B, będących punktami o znanych współrzędnych X, Y.

Bok AB stanowi tzw. *bazę wcięcia*, zaś celowe zewnętrzne biegnące od punktów znanych do punktu szukanego są jak wiadomo celowymi (kierunkami) w przód, od których pochodzi nazwa tego wcięcia. Rozwiązanie zadania ma w tym przypadku charakter jednoznaczny, ponieważ w trójkącie ABP znane są tylko trzy elementy: długość boku $AB - d_{AB}$ określona poprzez współrzędne punktów końcowych bazy oraz dwa kąty wierzchołkowe trójkąta: α, β.



Rys. 9.1. Kątowe wcięcie w przód

9.2.2. Klasyczne rozwiązanie kątowego wcięcia w przód

Kolejność czynności zmierzających do obliczenia współrzędnych punktu wcinanego P jest następująca:

1. Obliczenie ze współrzędnych azymutu A_{AB} i długości d_{AB} boku AB.
2. Obliczenie azymutów A_{AP}, A_{BP} boków wcinających AP, BP.
   Zgodnie z rys. 9.1 azymuty te wynoszą: $A_{AP} = A_{AB} + \alpha$ oraz $A_{BP} = A_{BA} - \beta$.
3. Obliczenie długości d_{AP}, d_{BP} boków wcinających AP, BP na podstawie twierdzenia sinusów:
$$d_{AP} = \frac{d_{AB}}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \sin\beta \qquad \text{oraz} \qquad d_{BP} = \frac{d_{AB}}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \sin\alpha$$
4. Obliczenie przyrostów współrzędnych boków wcinających AP, BP:
$$\Delta x_{AP} = d_{AP} \cdot \cos A_{AP} \; ; \; \Delta y_{AP} = d_{AP} \cdot \sin A_{AP}$$
   oraz
$$\Delta x_{BP} = d_{BP} \cdot \cos A_{BP} \; ; \; \Delta y_{BP} = d_{BP} \cdot \sin A_{BP}.$$
5. Dwukrotnie obliczenie współrzędnych punktu P na podstawie:
   a) współrzędnych punktu A i przyrostów boku AP: $X_P = X_A + \Delta x_{AP}$; $Y_P = Y_A + \Delta y_{AP}$

b) współrzędnych punktu B i przyrostów boku BP: $X_P = X_B + \Delta x_{BP}$; $Y_P = Y_A + \Delta y_{BP}$
Pełna zgodność obu par wyników stanowi pierwszą kontrolę rachunkową.

6. Dokonanie drugiej kontroli wyznaczenia współrzędnych punktu P, polegającej na obliczeniu dwoma sposobami wartości trzeciego kąta γ trójkąta ABP:
   a) na podstawie obserwacji wyjściowych, jako dopełnienia pomierzonych kątów α, β do 180° lub 200^g $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$,
   b) na podstawie wyników obliczeń tj. współrzędnych punktu wciętego P i współrzędnych punktów znanych: A, B.

   Rezultaty obu obliczeń powinny być jednakowe.

9.2.3. Obliczenie kątowego wcięcia w przód za pomocą symboli S. Hausbrandta

Opisany wyżej sposób obliczeń, polegający na rozwiązaniu trójkąta ABP, mimo swej przejrzystości, jest jednak dość pracochłonny ze względu na wieloetapowość rachunku. Zadanie obliczenia wcięcia w przód można rozwiązać znacznie sprawniej, stosując tylko jedną formułę S. Hausbrandta*, opartą na jego pomocniczych symbolach rachunkowych (zob. „*Geodezja I*" ust. 8.10):

$$(X_P, Y_P) = \begin{vmatrix} X_A & Y_A \\ -1 & \mathrm{ctg}\,\beta \end{vmatrix} \begin{matrix} X_B & Y_B \\ +1 & \mathrm{ctg}\,\alpha \end{matrix}\Bigg|_{(1,2)} \qquad (9.1)$$

Po przekształceniu pomocniczych symboli rachunkowych na zapis algebraiczny otrzymamy:

$$X_P = \frac{X_A \cdot \mathrm{ctg}\,\beta + Y_A + X_B \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha - Y_B}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}$$
$$Y_P = \frac{-X_A + Y_A \cdot \mathrm{ctg}\,\beta + X_B + Y_B \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta} \qquad (9.2)$$

Zaletą powyższego sposobu obliczenia wcięcia w przód jest otrzymywanie współrzędnych punktu wcinanego bezpośrednio na podstawie danych wyjściowych przy zastosowaniu jednego ciągu obliczeń wynikających z formuł funkcji $F_{(1)}$ i $F_{(2)}$ złożonej formy rachunkowej, do której podstawia się wartości wyjściowe i wykonuje ściśle określone działania matematyczne, bez konieczności notowania rezultatów etapów pośrednich.

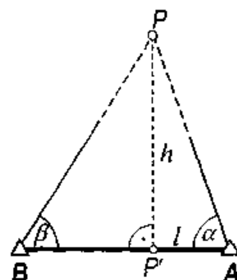
Zestawiając formę wyrażoną wzorem (9.1) należy pamiętać o prawidłowej konfiguracji punktów A, B i kątów α, β zgodnej na rys. 9.1, według którego punkt A i kąt α znajdują się p o p r a w e j s t r o n i e bazy i trójkąta wcięcia. Zmiana konfiguracji na odwrotną (punkt A z lewej strony) zmienia wynik obliczeń, który staje się błędny.

Kontrolę wcięcia przeprowadzamy tak samo jak w ramach poprzedniego sposobu tj. poprzez dwukrotne obliczenie kąta γ (rys. 9.1) z dopełnienia kątów α, β do 180° i ze współrzędnych punktów A, B, P. Można przy tym wykorzystać wzór na obliczenie kąta ze współrzędnych, który wyrażony za pomocą symboli Hausbrandta i dostosowany do oznaczeń w trójkącie ABP przyjmuje postać:

* S. Hausbrandt „Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne" t. I ; PPWK Warszawa 1970 r.

$$\operatorname{tg}\gamma = \begin{vmatrix} \Delta x_{PA} & \Delta y_{PA} \\ \Delta x_{PB} & \Delta y_{PB} \end{vmatrix}_0 \tag{9.3}$$

Wyprowadzenia wzorów (9.1) i (9.2) można dokonać w oparciu o znane zadanie obliczenia współrzędnych punktu P na domiarze prostokątnym:



Rys. 9.2. Domiary prostokątne punktu P

$$\left.\begin{aligned} X_P &= X_A + l \cdot \cos A_{AB} - h \cdot \sin A_{AB} \\ Y_P &= Y_A + l \cdot \sin A_{AB} + h \cdot \cos A_{AB} \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Na podstawie oznaczeń z rys. 9.2 można napisać:

$$AP' = l = h \cdot \operatorname{ctg}\alpha \quad ; \quad BP' = h \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

a stąd:

$$d_{AB} = AB = AP' + BP' = h \cdot (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta),$$

Współczynniki kierunkowe: $\cos A_{AB}$, $\sin A_{AB}$ wyniosą:

$$\cos A_{AB} = \frac{X_B - X_A}{h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)} \quad ; \quad \sin A_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)}$$

Podstawiając powyższe zależności do wzorów (9.4) otrzymamy:

$$X_P = X_A + h \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{X_B - X_A}{h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)} - h \cdot \frac{Y_B - Y_A}{h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)}$$

$$Y_P = Y_A + h \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{Y_B - Y_A}{h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)} + h \cdot \frac{X_B - X_A}{h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)}$$

Po skróceniu powyższych równań przez h, sprowadzeniu ich do wspólnego mianownika i redukcji uzyskamy zamieszczone wcześniej wzory (9.2).

9.2.4. Ocena dokładności kątowego wcięcia w przód

Ocenę dokładności wcięcia w przód można przeprowadzić dwiema metodami: analityczną (rachunkową) i analityczno-graficzną.

W *metodzie analitycznej* wyznaczamy średni błąd położenia punktu m_P, który wyraża się wzorem:

$$m_P = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2} \tag{9.5}$$

Średnie błędy m_X, m_Y wyznaczenia współrzędnych punktu wcinanego P wyznaczany jest na podstawie prawa przenoszenia się błędów średnich, co zrealizowaliśmy w ust. 7.4. Średni błąd położenia punktu określonego za pomocą pojedynczego kątowego wcięcia w przód przedstawia wzór (7.20), który po uwzględnieniu oznaczeń z rys. 9.1 przyjmie postać:

$$m_P = \frac{m_\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sqrt{d_{AP}^2 + d_{BP}^2} \tag{9.6}$$

Po wyeliminowaniu z zapisu długości boków wcinających można wyprowadzić inną formę tego wzoru, uwzględniającą dane wyjściowe zadania:

$$m_P = \frac{d_{AB} \cdot m_\alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} \tag{9.7}$$

W przypadku, gdy trójkąt ABP jest prostokątny, a więc $\gamma = \alpha + \beta = 90°$, otrzymamy znacznie prostszy wzór:

$$m_P = \pm\, d_{AB} \cdot m_\alpha \tag{9.8}$$

Dla trójkąta równoramiennego po uwzględnieniu: $\alpha = \beta$ oraz $d_{AP} = d_{BP}$ wzór na średni błąd położenia punktu wcinanego m_P przyjmie postać:

$$m_P = \frac{m_\alpha \cdot d_{AB}\sqrt{2}}{4 \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha} \tag{9.9}$$

Analiza wzorów (9.6) – (9.9) pozwala na sformułowanie następujących wniosków dotyczących zasad projektowania wcięcia w przód:

- Dokładność wyznaczenia położenia punktu P zależy od długości bazy d_{AB} i dokładności pomiaru kątów α, β.
- Na dokładność wcięcia mają wpływ: długości boków wcinających, będących funkcją długości bazy i wartości kątów α, β.
- Najkorzystniejsze jest wcięcie w przód, którego celowe wcinające mają jednakową długość, zaś kąt wcięcia $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ jest zbliżony do kąta prostego. Z analizy dokładności wynika, że optymalny kąt wcięcia jest nieco większy i wynosi: $\gamma = 109°28'$ ($121{,}63^g$).
- Trójkąt ABP powinien być tak zbudowany, aby kąt wcięcia γ zawierał się w przedziale od 45° do 135°.
- Zmiana stosunku długości celowych wcinających AP, BP względem ilorazu 1:1 wpływa w większym stopniu na pogorszenie wyników wcięcia niż odchylenie kąta γ od 90°, z tego powodu stosunek długości boków wcinających: dłuższego do krótszego nie powinien być większy od 2:1.

Metoda analityczno-graficzna oceny dokładności wybranego wcięcia opiera się na wykreśleniu tzw. *wstęg wahań*, a następnie *figury błędów* uzyskiwanej w wyniku przecięcia się z sobą co najmniej dwu wstęg. Przy założeniu określonej dokładności pomiaru elementów wyznaczających położenie szukanego punktu P, wstęga wahań stanowi miejsce geometryczne jego możliwych położeń. Jeśli dla określenia pozycji punktu P na znanym punkcie A zostanie dokonana obserwacja kątowa α, to przyjmując na razie bezbłędność pomiaru kąta α zawartego pomiędzy bazą wcięcia w przód a celową wcinającą, miejscem geometrycznym punktów, na którym znajduje się punkt wcinany, jest linia prosta tworząca z bazą AB pomierzony kąt α (rys. 9.3).

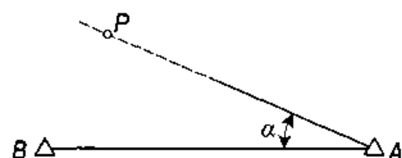
Obserwacja ta jest jednak obarczona nieznanym błędem prawdziwym ε, który z jednakowym prawdopodobieństwem może przyjąć zarówno wartość dodatnią jak i ujemną. Miarą dokładności kąta jest jego średni błąd $\pm m_\alpha$, toteż jako miejsce geometryczne punktu P można uznać obszar zawarty pomiędzy ramionami kąta o rozwartości ramion $2m_\alpha$, którego dwusieczna stanowi tzw. *oś wyznaczającą*, zaś jego wierzchołkiem jest znany punkt A (rys. 9.4). W bliskim otoczeniu punktu P przyjmiemy, że półproste, stanowiące ramiona kąta $2m_\alpha$, biegną równolegle do osi (rys. 9.5). Błąd wynikający z tego założenia jest znikomy, ponieważ dla celowej dłuższej od 20 m odchylenie półprostej od równoległości w otoczeniu punktu P nie przekracza 1 mm i szybko zmniejsza się wraz ze

wzrostem długości celowej. Można więc stwierdzić, że miejscem geometrycznym możliwych położeń punktu P jest przestrzeń pomiędzy dwiema prostymi równoległymi wykreślonymi po obu stronach osi wyznaczającej w odległości e, zwanej *szerokością wstęgi wahań*. Kąt m_α wyrażony w mierze łukowej będzie wynosił:

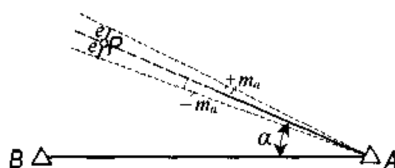
$$m_\alpha = \frac{e_\alpha}{d_{AP}} \tag{9.10}$$

stąd szerokość wstęgi wyraża wzór:

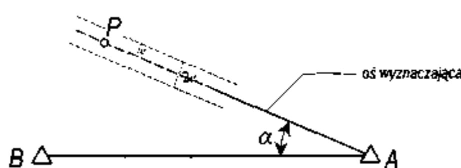
$$e_\alpha = d_{AP} \cdot m_\alpha \tag{9.11}$$



Rys. 9.3. Kątowy element wyznaczający



Rys. 9.4. Zakres błędu kąta



Rys. 9.5. Wstęga wahań elementu kątowego wcięcia w przód

Szerokość wstęgi wahań stanowi graficzną miarę dokładności pomiaru kąta. Jak wiadomo do określenia położenia punktu P w oparciu o bazę AB należy wykonać co najmniej dwie obserwacje: dwie kątowe (wcięcie w przód), dwie liniowe (wcięcie liniowe) lub jedną kątową a drugą liniową (wcięcie kombinowane). Dla wcięcia kątowego w przód figura błędów w postaci równoległoboku powstaje w wyniku przecięcia się dwu wstęg wahań o szerokościach e_α i e_β dla kątów: α i β (rys. 9.6). Wcinany punkt P znajduje się w polu mieszczącym się w granicach przecięcia obszarów obydwu wstęg, które utworzą równoległobok o powierzchni P_F wynoszącej:

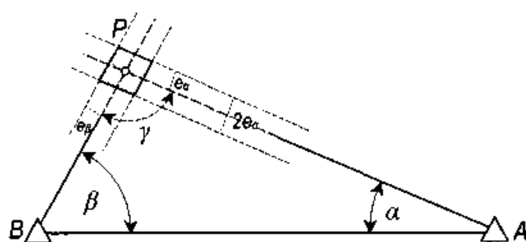
$$P_F = 4 \cdot \frac{e_\alpha \cdot e_\beta}{\sin \gamma} \tag{9.12}$$

Po wprowadzeniu do wzoru (9.12) zależności (9.11) oraz przyjęciu jednakowej dokładności pomiaru obydwu kątów otrzymamy wzór na pole figury błędów kątowego wcięcia w przód:

$$P_F = \frac{4 d_{AP} d_{BP}}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot m_\alpha^2 \tag{9.13}$$

Wyznaczenie położenia punktu P będzie najdokładniejsze wówczas, gdy pole P_F będzie najmniejsze. Nastąpi to w przypadku, gdy $\sin\gamma$, czyli $\sin(\alpha + \beta)$, osiągnie maksymalną wartość 1, a więc kąt wcięcia γ będzie wtedy równy 90°. Jak wspomniano już wcześniej, powinien także być spełniony wymóg zminimalizowania powierzchni trójkąta ABP.

Kompromis obu postulatów występuje dla kąta γ równego 109,47°, o czym była mowa już uprzednio.



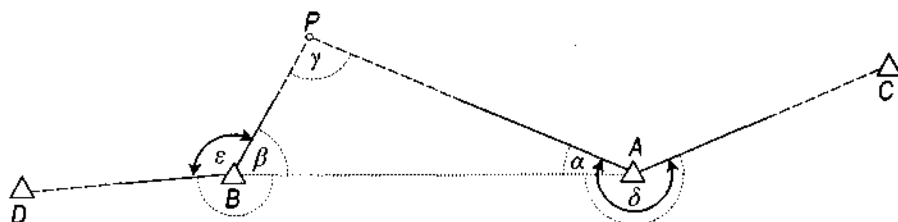
Rys. 9.6. Figura błędów kątowego wcięcia w przód

W celu dokonania graficznej analizy dokładności wcięcia należy wykonać rysunek jego konstrukcji w mniejszej skali, dostosowanej do rozmiarów trójkąta *ABP* i arkusza szkicu, np. w skali: 1:1 000, 1:10 000, 1:25 000 lub 1:50 000. Na rysunku tym w otoczeniu punktu wcinanego wykreślamy wstęgi wahań w znacznie większej skali np. 1:1, 1:2, 1:5, 1:10 lub 1:100, odmierzając obliczone wcześniej szerokości wstęg po obu stronach osi wyznaczających.

Wadliwość i zbyt niską dokładność konstrukcji można rozpoznać na podstawie oceny kształtu figury błędów. Najczęstszym tego objawem są nadmiernie szerokie wstęgi lub zbyt ostry kąt ich przecięcia.

Zaletą konstrukcji kątowegó wcięcia w przód jest możliwość określenia współrzędnych punktów niedostępnych, lecz widocznych z obu końców bazy. Z uwagi na to, że zadanie to jest jednoznacznie wyznaczalne, a więc nie zapewnia kontroli obserwacji, wskazane jest pomierzenie jakiegoś elementu sprawdzającego np. dodatkowego kąta, boku, odległości między punktami wcinanymi z sąsiednich wcięć itp.

9.3. Kierunkowe wcięcie w przód



Rys. 9.7. Kierunkowe wcięcie w przód

Przypadek wcięcia w przód z rys. 9.7, zwany *wcięciem kierunkowym*, czyli wcięciem opartym na przecięciu prostych skierowanych, tym różni się od jego poprzedniej konstrukcji pokazanej na rys. 9.1, że zamiast kątów wierzchołkowych α, β trójkąta *ABP*, mierzy się kąty poziome δ, ε pomiędzy bokami wcinającymi *AP*, *BP* a bokami *CA*, *DB* utworzonymi przez pary znanych punktów. Kąty δ, ε spełniają więc tę samą funkcję co kąty nawiązania w ciągu poligonowym. Koniecznym warunkiem wykonania pomiaru tych kątów jest widoczność pomiędzy końcami bazy *A*, *B* a punktem wcinanym *P*. Nie ma zatem wymogu wzajemnej widoczności punktów *A*, *B*, co stanowi podstawową zaletę wcięcia kierunkowego, które może być zastosowane w sytuacji, gdy na odcinku *AB* znajduje się przeszkoda.

Wcięcie kierunkowe można z łatwością przekształcić w klasyczne, kątowe wcięcie w przód poprzez obliczenie ze współrzędnych kątów: *CAB*, *ABD*, a następnie kątów: α, β, które zgodnie z rys. 9.7 wyniosą:

$$\alpha = \delta - \sphericalangle CAB \quad ; \quad \beta = 360^\circ - (\sphericalangle ABD + \varepsilon)$$

Innym sposobem obliczenia tego wcięcia jest sprowadzenie go do zadania obliczenia współrzędnych punktu przecięcia się dwóch prostych skierowanych: AP i BP, dla których znane są punkty początkowe (A lub B) oraz obliczono współczynniki kierunkowe λ, μ boków wcinających, czyli tangensy azymutów tych boków:

$$\lambda = \operatorname{tg} A_{AP} \qquad \text{oraz} \qquad \mu = \operatorname{tg} A_{BP}$$

Azymuty A_{AP}, A_{BP} obliczymy na tej samej zasadzie co azymuty boków w ciągu poligonowym (kąty δ, ε są kątami lewymi):

$$A_{AP} = A_{CA} + \delta - 180^\circ \quad ; \quad A_{BP} = A_{DB} + \varepsilon - 180^\circ$$

Współrzędne punktu P można wyznaczyć z układu dwóch równań obu prostych skierowanych. Wzory na współrzędne zapisane za pomocą symboli rachunkowych Hausbrandta przyjmą postać:

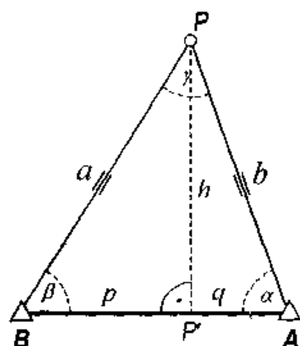
$$X_P = X_A + \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{AB} & \Delta y_{AB} \\ 1 & \mu \end{vmatrix}_1}{\mu - \lambda} \tag{9.14}$$

$$Y_P = Y_A + \frac{\begin{vmatrix} \lambda \cdot \Delta x_{AB} & \Delta y_{AB} \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}_1}{\mu - \lambda} \tag{9.15}$$

Po obliczeniu współrzędnej X_P ze wzoru (9.14) można również wyznaczyć Y_P na podstawie zależności:

$$Y_P = Y_A + \Delta x_{AP} \cdot \lambda \tag{9.16}$$

9.4. Wcięcie liniowe



Rys. 9.8. Wcięcie liniowe

Pojedyncze wcięcie liniowe (rys. 9.8) polega na wyznaczeniu współrzędnych punktu wcinanego P, w oparciu o pomierzone odległości pomiędzy punktem P a dwoma punktami znanymi A, B wyznaczającymi bazę wcięcia. W ramach realizacji tego wcięcia mierzymy w trójkącie ABP długości boków: $d_{AP} = b$ i $d_{BP} = a$. Zaletę wcięcia liniowego stanowi prostota i łatwość wykonania za pomocą przymiaru lub dalmierza. Wcięcie liniowe może być stosowane do odnajdywania punktów geodezyjnych na podstawie domiarów zawartych na opisach topograficznych i zdejmowania pojedynczych szczegółów sytuacyjnych oraz jako pomiar kontrolny przy innych metodach zdjęcia.

W celu rozwiązania wcięcia liniowego możemy bez trudu przekształcić je na kątowe wcięcie w przód, obliczając kąty wierzchołkowe trójkąta ABP (rys. 9.8) na podstawie twierdzenia Carnota (cosinusów):

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{C_a}{2bc}\\ \cos\beta &= \frac{+a^2-b^2+c^2}{2ac} = \frac{C_b}{2ac}\\ \cos\gamma &= \frac{+a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{C_c}{2ab}\end{aligned}\right\} \quad (9.17)$$

Wyrażenia C_a, C_b, C_c noszą nazwę *karnotianów*:

$$\left.\begin{aligned}C_a &= -a^2+b^2+c^2\\ C_b &= \ \ a^2-b^2+c^2\\ C_c &= \ \ a^2+b^2-c^2\end{aligned}\right\} \quad (9.18)$$

Suma karnotianów jest równa sumie kwadratów boków trójkąta *ABP*, co można wykorzystać do kontroli ich obliczenia:

$$C_a + C_b + C_c = a^2 + b^2 + c^2 \quad (9.19)$$

Kontrolą obliczenia wartości kątów α, β, γ na podstawie wzorów (9.17) jest ich suma, która powinna wynosić dokładnie 180° (200^g).

Po obustronnym pomnożeniu dwóch pierwszych równań (9.17) przez odwrotności sinusów kątów α, β, otrzymamy po lewej stronie ich cotangensy, zaś mianowniki ułamków po prawej stronie obu równań będą równe $4P$ – poczwórnemu polu trójkąta *ABP*, czyli:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{C_a}{4P} \quad ; \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{C_b}{4P} \quad (9.20)$$

Zależności (9.20) wykorzystuje się do wyprowadzenia wzoru (9.22) na obliczenie współrzędnych punktu *P* w oparciu o symbole rachunkowe Hausbrandta.

Innym sposobem rozwiązania wcięcia liniowego jest sprowadzenie go do zadania polegającego na obliczeniu współrzędnych punktu na domiarze prostokątnym. W tym celu należy określić jako odciętą punktu *P* jeden z odcinków *p* lub *q*, stanowiących rzuty prostokątne boków *a*, *b* na podstawę *c* oraz wysokość trójkąta *h* jako rzędną tego punktu. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa możemy napisać:

$$h^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2$$

a stąd: $$a^2 - b^2 = p^2 - q^2 = (p-q)\cdot(p+q)\,.$$

Ponieważ: $$p + q = c\,,$$

a więc: $$p - q = \frac{a^2 - b^2}{c}$$

Po dodaniu i odjęciu stronami dwóch ostatnich równań na sumę i różnicę odcinków *p*, *q*, otrzymamy wzory (9.21), (9.21a) na obliczenie ich długości:

$$p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{C_b}{2c} \quad (9.21) \qquad \text{oraz} \qquad q = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} = \frac{C_a}{2c} \quad (9.21a)$$

Rzędną punktu P jest wysokość h, która wyniesie:

$$h = \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{b^2 - q^2}$$

Kolejnym sposobem rozwiązania wcięcia liniowego jest obliczenie współrzędnych X_P, Y_P na podstawie wzoru (9.22) opartego na pomocniczych symbolach rachunkowych Hausbrandta:

$$(X_P, Y_P) = \begin{vmatrix} X_A & Y_A \\ -4P & C_b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_B & Y_B \\ +4P & C_a \end{vmatrix}_{(1,2)} \qquad (9.22)$$

Zależność (9.22) zapisana w postaci algebraicznej utworzy dwa wzory:

$$\begin{cases} X_P = \dfrac{X_A \cdot C_b + Y_A \cdot 4P + X_B \cdot C_a - Y_B \cdot 4P}{C_a + C_b} \\ \\ Y_P = \dfrac{-X_A \cdot 4P + Y_A \cdot C_b + X_B \cdot 4P + Y_B \cdot C_a}{C_a + C_b} \end{cases} \qquad (9.23)$$

Jak wiadomo wyraz $4P$ jest poczwórnym polem trójkąta ABP, które obliczymy na podstawie uzyskanych wcześniej wartości karnotianów z następującego wzoru:

$$4P = \sqrt{C_a \cdot C_b + C_a \cdot C_c + C_b \cdot C_c} \qquad (9.24)$$

Wzór (9.22) można wyprowadzić, zamieniając wcięcie liniowe w przód na wcięcie kątowe. W tym celu zastępujemy cotangensy ze wzoru (9.1) ilorazami z prawych stron wzorów (9.20) oraz mnożymy przez $4P$ wszystkie wyrazy dolnego wiersza otrzymanej formy rachunkowej złożonej, co nie powoduje zmiany ostatecznego wyniku jej obliczenia.

Ocena dokładności wcięcia liniowego

Ocena dokładności określenia położenia punktu P za pomocą wcięcia liniowego może być wykonana metodami: analityczną (rachunkową) i analityczno-graficzną.

W metodzie analitycznej błędy: m_X, m_Y uzyskuje się po zastosowaniu prawa przenoszenia się błędów średnich w odniesieniu do funkcji podanych w ust. 7.4 lub po ich przekształceniu do postaci:

$$\begin{aligned} X_P &= X_A + \frac{1}{2c} \cdot \left[\cos A_{AB} \cdot C_a - \sin A_{AB} \cdot \sqrt{4b^2c^2 - C_a^2}\right] \\ Y_P &= Y_A + \frac{1}{2c} \cdot \left[\sin A_{AB} \cdot C_a + \cos A_{AB} \cdot \sqrt{4b^2c^2 - C_a^2}\right] \end{aligned} \qquad (9.25)$$

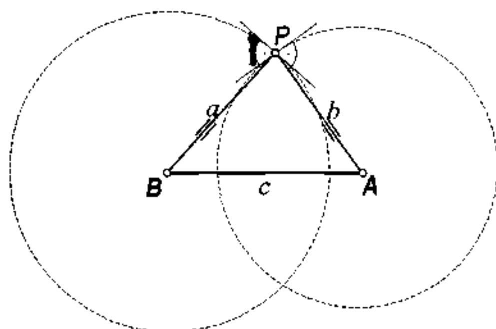
Średni błąd położenia punktu wcinanego można wyrazić za pomocą wzoru (7.21) lub jego modyfikacji*:

* Wyprowadzenie wzorów (9.25) można znaleźć w podręczniku: T. Lazzarini i współautorzy: Geodezja: Geodezyjna osnowa szczegółowa; PPWK Warszawa – Wrocław 1990.

$$m_P = \pm \frac{\sqrt{m_a^2 + m_b^2}}{\sin \gamma} \tag{9.26}$$

Z wzorów (9.25), (9.26) wynika, że dokładność wcięcia liniowego zależy od dokładności pomiaru długości boków wcinających a, b oraz wartości kąta γ utworzonego przez te boki. Błąd jest najmniejszy wówczas, gdy wspomniane boki przecinają się pod kątem prostym.

Ocena dokładności wcięcia liniowego metodą analityczno-graficzną polega na wykreśleniu wstęg wahań i figury błędów. Dla obserwacji liniowej, jaką jest długość boku wcinającego a (lub b), miejscem geometrycznym punktów, na którym znajduje się punkt wcinany, jest okrąg o promieniu a ze środkiem w punkcie początkowym A. W rezultacie wykonania dwóch obserwacji liniowych a, b położenie punktu P zostaje jednoznacznie określone przez punkt przecięcia się dwóch okręgów o promieniach: a, b (rys. 9.9). W bliskim otoczeniu punktu P krótkie łuki obu okręgów można zastąpić odcinkami stycznych poprowadzonych w tym punkcie, spełniających funkcje osi wyznaczających. Styczne te z odpowiednimi bokami trójkąta ABP tworzą kąty proste.



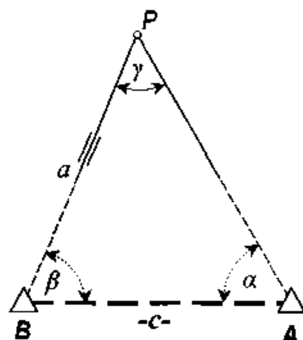
Rys. 9.9. Określenie położenia punktu P wcięciem liniowym

Pole figury błędu P_F można obliczyć na podstawie wzoru:

$$P_F = \frac{4e_a e_b}{\sin \gamma} \tag{9.27}$$

9.5. Wcięcie kombinowane (kątowo – liniowe)

Wcięcie kątowo-liniowe (rys. 9.10), zwane także *wcięciem kombinowanym*, polega na wykonaniu w trójkącie ABP dwóch niejednorodnych obserwacji: kątowej, którą stanowi kąt γ zmierzony na stanowisku P oraz liniowej, wykonanej jako pomiar długości boku $BP = a$. Kąt γ pomierzony na punkcie wcinanym P jest elementem wyznaczającym, typowym dla opisanego dalej wcięcia wstecz, zaś długość a stanowi element wcięcia liniowego.



Rys. 9.10. Wcięcie kątowo-liniowe

Zadanie to można łatwo sprowadzić do kątowego wcięcia w przód po obliczeniu długości bazy $AB = c$ ze współrzędnych, kąta α na podstawie twierdzenia sinusów, a następnie kąta β jako dopełnienia kątów α, γ do 180°:

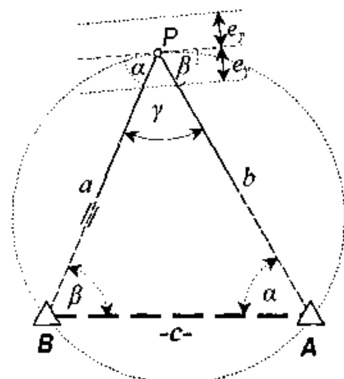
$$\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{c}\cdot a$$

$$\beta = 180^\circ - (\gamma + \alpha)$$

Średni błąd położenia punktu wyznaczonego powyższym wcięciem określa wzór:

$$m_P = \pm\sqrt{2m_\alpha^2 + a^2\cdot m_\gamma^2} \tag{9.28}$$

Analityczno-graficzna ocena dokładności dla wcięcia kombinowanego, zrealizowanego za pomocą elementów wyznaczających wcięć: liniowego i kątowego wstecz, polega na wykreśleniu wstęg wahań obu elementów. Kąt γ zawarty pomiędzy celowymi do punktów znanych A, B, pomierzony na punkcie wcinanym P, ze średnim błędem m_γ stanowi element wcięcia wstecz. Jego miejscem geometrycznym jest okrąg opisany na trójkącie ABP. W bliskim otoczeniu punktu P krótki łuk tego okręgu można zastąpić odcinkiem stycznej do okręgu poprowadzonej przez punkt P. Wskutek popełnionego przy pomiarze kąta γ błędu $\pm m_\gamma$ po obu stronach stycznej w odstępie e_γ znajdą się dwie symetryczne proste równoległe, ograniczające obszar możliwych położeń punktu P (rys. 9.11). Szerokość e_γ wstęgi wahań elementu wcięcia wstecz określimy na podstawie wzoru:

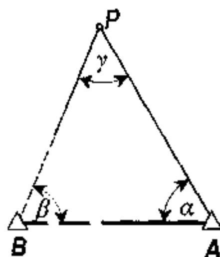


Rys. 9.11. Wstęga wahań elementu kątowego wcięcia wstecz

$$e_\gamma = \frac{a\cdot b}{c}\cdot m_\gamma \tag{9.29}$$

Zgodnie z rys. 9.11 konstrukcja kierunku wspomnianej stycznej, niezbędna do wykreślenia wstęgi wahań, polega na odłożeniu od prostej PB w punkcie P kąta α lub kąta β od prostej PA. Zasada konstrukcji drugiej wstęgi wahań (dla elementu wcięcia liniowego) została podana poprzednio.

Innym rodzajem wcięcia kombinowanego jest wcięcie kątowe, zwane *wcięciem w bok*, które wystąpi wtedy, gdy w trójkącie ABP (rys. 9.12) zostanie wykonany pomiar kątów α oraz γ. Pomierzone wielkości są wprawdzie jednorodne, lecz element α jest obserwacją typową dla kątowego wcięcia w przód, zaś kąt γ stanowi element wyznaczający wcięcia wstecz. Po obliczeniu kąta β jako dopełnienia kątów: α, γ do 180°, rachunek wcięcia w bok przebiega tak samo jak dla typowego wcięcia w przód.



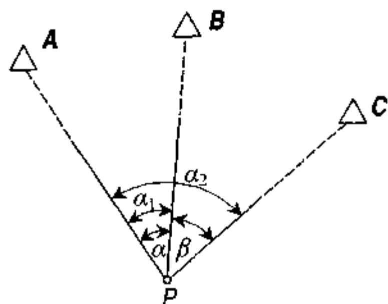
Rys. 9.12. Wcięcie w bok

Przy jednakowej dokładności pomiaru obu kątów błąd średni położenia punktu P wyznaczonego wcięciem w bok wyraża się wzorem:

$$m_P = \pm\frac{c\cdot m_\alpha}{\sin\gamma}\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta} \tag{9.30}$$

Figurę błędów metody analityczno-graficznej otrzymamy po obliczeniu i wykreśleniu podanymi wcześniej sposobami wstęg wahań dla elementów: wcięć: w przód dla kąta α oraz wstecz dla kąta γ.

9.6. Wcięcie wstecz

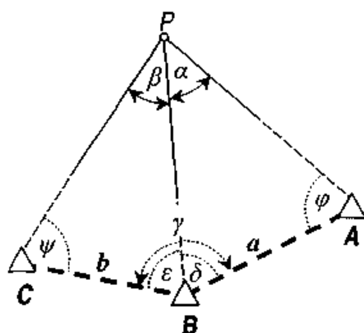


Rys. 9.13. Wcięcie wstecz

Pojedyncze wcięcie wstecz polega na wyznaczeniu współrzędnych punktu wcinanego P na podstawie kątów: α, β (lub α_1, α_2) pomierzonych na stanowisku P do trzech punktów A, B, C o znanych współrzędnych (rys. 9.13). Zadanie to ma tylko jedno rozwiązanie, ponieważ zawiera dwie obserwacje niezbędne do określenia dwu niewiadomych X_P, Y_P (n=u=2). Nazwa wcięcia pochodzi od nazw celowych, zwanych *celowymi wewnętrznymi* lub *celowymi wstecz* łączącymi stanowisko pomiarowe, którym jest szukany punkt P, z punktami znanymi.

Dla rozwiązania wcięcia wstecz opracowano bardzo wiele metod rachunkowych i graficznych. Spośród nich do najbardziej znanych należą sposoby: Sneliusa-Pothenota (Kästnera), Delambre'a, Collinsa, Ansermeta, Cassiniego a także inne (w tym również własne rozwiązanie autora tego podręcznika), opisane szczegółowo w literaturze geodezyjnej.

Rozwiązanie wcięcia wstecz sposobem klasycznym (sposobem Kästnera), znanym także jako *zagadnienie Sneliusa-Pothenota*, polega na znalezieniu kątów pomocniczych: φ, ψ (rys. 9.14) i sprowadzeniu zadania do typowego wcięcia w przód, które dla kontroli można wyliczyć dwukrotnie z obu baz: $AB = a$ oraz $BC = b$.



Rys. 9.14. Kąty pomocnicze φ, ψ

Znajomość współrzędnych punktów A, B, C pozwala na obliczenie kąta γ ($\sphericalangle ABC$) wyznaczenie długości: $a = AB$, $b = BC$ i azymutów tych boków. Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\varphi = \sphericalangle PAB \text{ oraz } \psi = \sphericalangle PCB$$

na podstawie sumy kątów w czworoboku $ABCP$ można napisać:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 360^\circ$$

stąd:

$$\varphi + \psi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Połowa sumy kątów pomocniczych wyniesie więc:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)\right] \tag{9.31}$$

Celem dalszego postępowania, prowadzącego do określenia wartości kątów φ, ψ, jest wyznaczenie połowy różnicy tych kątów. Na podstawie twierdzenia sinusów

w trójkątach ABP i BCP można dwukrotnie zapisać wzory na długość ich wspólnego boku BP, a następnie zrównać ze sobą prawe strony obu równań:

$$\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\varphi=\frac{b}{\sin\beta}\cdot\sin\psi$$

• Przekształcenie tej równości daje następującą proporcję:

$$\sin\psi:\sin\varphi=(a\cdot\sin\beta):(b\cdot\sin\alpha)$$

Wyrażenie występujące po prawej stronie powyższego równania jest znaną wielkością, która może stanowić tangens pewnego, pomocniczego kąta μ, zaś sposób obliczenia funkcji tg μ określa wzór:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{a\cdot\sin\beta}{b\cdot\sin\alpha} \tag{9.32}$$

lecz jednocześnie:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}, \tag{9.32a}$$

a więc:

$$\operatorname{tg}(45°-\mu)=\frac{1-\operatorname{tg}\mu}{1+\operatorname{tg}\mu}=\frac{1-\dfrac{\sin\psi}{\sin\varphi}}{1+\dfrac{\sin\psi}{\sin\varphi}}=\frac{\sin\varphi-\sin\psi}{\sin\varphi+\sin\psi}$$

Na podstawie znanych wzorów trygonometrycznych na różnicę i sumę sinusów kątów możemy napisać:

$$\sin\varphi-\sin\psi=2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi+\psi}{2}$$

oraz

$$\sin\varphi+\sin\psi=2\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi+\psi}{2}$$

stąd:

$$\operatorname{tg}(45°-\mu)=\frac{2\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}\cdot\cos\dfrac{\varphi+\psi}{2}}{2\cos\dfrac{\varphi-\psi}{2}\cdot\sin\dfrac{\varphi+\psi}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi+\psi}{2}}$$

Po prostym przekształceniu zapiszemy równanie na obliczenie tangensa połowy różnicy kątów pomocniczych φ, ψ:

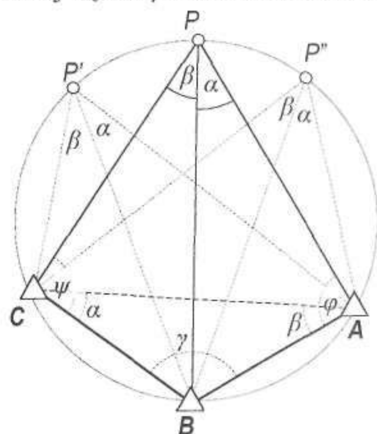
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\operatorname{tg}(45°-\mu) \tag{9.33}$$

Na podstawie wartości połowy sumy i połowy różnicy kątów φ, ψ możemy teraz wyznaczyć oba poszukiwane kąty pomocnicze:

$$\varphi=\frac{\varphi+\psi}{2}+\frac{\varphi-\psi}{2} \tag{9.34}$$

$$\psi = \frac{\varphi + \psi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2} \tag{9.35}$$

Znając wartości kątów: α, γ, φ (rys. 9.14) i elementów trójkąta ABP, obliczymy kąt δ^*, a następnie współrzędne punktu P według znanej procedury kątowego wcięcia w przód. Po uprzednim określeniu kąta ε można dla kontroli rachunku rozwiązać w sąsiednim trójkącie BCP drugie wcięcie w przód. Po obliczeniu kątów: δ, ε możemy też sprawdzić, czy suma tych kątów jest równa obliczonemu wcześniej kątowi γ. Ostateczna kontrola wyznaczenia współrzędnych punktu P polega na obliczeniu ze współrzędnych przynajmniej jednego danego kąta np. $\sphericalangle APB = \alpha$, $\sphericalangle BPC = \beta$ lub $\sphericalangle APC = \alpha + \beta$.



Rys. 9.15. Okrąg niebezpieczny

Wcięcie wstecz jest konstrukcją niewyznaczalną w przypadku, gdy na okręgu opisującym trójkąt ABC utworzony przez punkty znane, zwanym *okręgiem niebezpiecznym*, znajduje się także wcinany punkt P. Jak wynika z rysunku 9.15 istnieje nieograniczona liczba punktów: P, P', P'',... P^n, położonych na łuku ponad cięciwą AC, z których odcinki AB, BC widać pod tymi samymi kątami α, β, a więc dla ustalonych danych wyjściowych istnieje nieskończenie wiele rozwiązań. Jeśli punkt P znajduje się blisko okręgu niebezpiecznego, wynik obliczenia wcięcia wstecz jest bardzo niedokładny, toteż stosując tę konstrukcję należy sprawdzić graficznie lub rachunkowo, czy aktualnie nie zachodzi taki przypadek. Nie wystąpi on na pewno, gdy punkt wcinany znajduje się wewnątrz trójkąta ABC utworzonego przez punkty znane, najlepiej w pobliżu środka okręgu niebezpiecznego. Nierozwiązalność wcięcia wstecz, występująca w przypadku, gdy punkty: A, B, C, P znajdują się na tym samym okręgu, wynika również z podanego niżej rozumowania:

Z rys. 9.15 widzimy, że w opisywanej sytuacji kątami trójkąta ABC utworzonego przez punkty znane, są pomierzone kąty α i β, natomiast trzeci kąt γ tego trójkąta możemy łatwo obliczyć ze współrzędnych punktów A, B, C, a więc:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Jednocześnie z sumy kątów czworokąta $ABCP$ wynika związek:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 360^\circ$$

a zatem: $\varphi + \psi = 180^\circ$ lub $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 90^\circ$

czyli $\sin\varphi = \sin(180^\circ - \psi) = \sin\psi$

Zgodnie z wzorem (9.32a) tangens pomocniczego kąta μ, równy ilorazowi sinusów $\sin\varphi : \sin\psi$, będzie w tym przypadku równy jedności, a stąd $\mu = 45^\circ$. W tej sytuacji prawa strona wzoru (9.33) stanie się symbolem nieoznaczonym, ponieważ:

---

* Kąty pomocnicze δ, ε obliczymy jako dopełnienia sumy kątów w trójkątach: ABP, BCP do 180°, czyli: $\delta = 180^\circ - (\alpha + \varphi)$; $\varepsilon = 180^\circ - (\beta + \psi)$.

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\operatorname{tg}(45^\circ-\mu)=\operatorname{tg}90^\circ\cdot\operatorname{tg}0=+\infty\cdot 0$$

Gdy punkt P znajduje się w pobliżu okręgu niebezpiecznego, wtedy suma połowy kątów pomocniczych φ, ψ jest bliska 90°, więc określenie wartości $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$ jest bardzo niedokładne.

Spośród licznych rozwiązań pojedynczego wcięcia wstecz najczęściej w praktyce stosowany jest się wygodny i szybki sposób oparty na *wzorach Hausbrandta*, który wykorzystując znane symbole, zmodyfikował metodę Delambre'a. Rachunek rozpoczyna się od obliczenia przyrostów współrzędnych na bokach utworzonych przez punkty znane: Δx_{AB}, Δy_{AB}, Δx_{AC}, Δy_{AC} oraz cotangensów kątów: α_1, α_2 (rys. 9.13). Wartości te wstawiamy do formy F (9.36), która składa się z dwóch form rachunkowych prostych: f, g.

$$F\equiv|f|g|\equiv\begin{vmatrix}\Delta x_{AB} & \Delta y_{AB}\\ +\operatorname{ctg}\alpha_1 & +1\end{vmatrix}\begin{matrix}\Delta x_{AC} & \Delta y_{AC}\\ -\operatorname{ctg}\alpha_2 & -1\end{matrix}\Bigg| \qquad (9.36)$$

Z formy F obliczamy wartości następujących funkcji: f_1, f_2, F_1, F_2 oraz $F_0=\frac{F_1}{F_2}$.

Następnie zestawiamy kolejną formę rachunkową: $\varphi\equiv\begin{vmatrix}f_1 & f_2\\ F_0 & +1\end{vmatrix}$ i obliczamy z niej wartość funkcji względnej kwadratowej $\varphi_{[1]}$, równą przyrostowi Δx_{AP}.

$$\Delta x_{AP}=\varphi_{[1]}=\begin{vmatrix}f_1 & f_2\\ F_0 & +1\end{vmatrix}_{[1]} \qquad (9.37)$$

Drugi przyrost boku AP tj. Δy_{AP} obliczymy według zależności:

$$\Delta y_{AP}=-F_0\cdot\Delta x_{AP} \qquad (9.38)$$

Wyznaczenie przyrostów Δx_{AP}, Δy_{AP} pozwala na obliczenie współrzędnych punktu P:

$$X_P=X_A+\Delta x_{AP}\ ;\quad Y_P=Y_A+\Delta y_{AP}$$

Kontrolę rachunku stanowi obliczenie ze współrzędnych co najmniej jednego z kątów: α_1, α_2 lub $\sphericalangle BPC=\beta$ (rys. 9.13).

Uzasadnienie zaproponowanego przez S. Hausbrandta sposobu obliczania wcięcia wstecz jest następujące:

Przyrosty współrzędnych boku PB: Δx_{PB}, Δx_{PB} można zapisać w postaci sum:

$$\Delta x_{PB}=\Delta x_{PA}+\Delta x_{AB} \qquad \text{oraz} \qquad \Delta y_{PB}=\Delta y_{PA}+\Delta y_{AB}$$

Po wprowadzeniu powyższych zależności do wzorów na obliczenie kątów α_1 i α_2 ze współrzędnych otrzymamy równania wyrażające tangensy kątów: α_1, α_2, które następnie pomnożymy obustronnie przez cotangensy tych kątów:

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\begin{vmatrix}\Delta x_{PA} & \Delta y_{PA}\\ (\Delta x_{PA}+\Delta x_{AB}) & (\Delta y_{PA}+\Delta y_{AB})\end{vmatrix}_0=\frac{\Delta x_{PA}\cdot\Delta y_{AB}-\Delta y_{PA}\cdot\Delta x_{AB}}{\Delta x_{PA}^2+\Delta y_{PA}^2+\Delta x_{PA}\cdot\Delta x_{AB}+\Delta x_{PA}\cdot\Delta y_{AB}}\ \Big|\cdot\operatorname{ctg}\alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \begin{vmatrix} \Delta x_{PA} & \Delta y_{PA} \\ (\Delta x_{PA} + \Delta x_{AC}) & (\Delta y_{PA} + \Delta y_{AC}) \end{vmatrix}_0 = \frac{\Delta x_{PA}\cdot\Delta y_{AC} - \Delta y_{PA}\cdot\Delta x_{AC}}{\Delta x_{PA}^2 + \Delta y_{PA}^2 + \Delta x_{PA}\cdot\Delta x_{AC} + \Delta x_{PA}\cdot\Delta y_{AC}} \Big| \cdot \operatorname{ctg}\alpha_2$$

Po uwzględnieniu, że tg $\alpha_1 \cdot$ ctg $\alpha_1 = 1$ oraz dokonaniu odpowiednich przekształceń i redukcji, otrzymamy:

$$\Delta x^2_{PA} + \Delta y^2_{PA} + \Delta x_{PA}\cdot\Delta x_{AB} + \Delta x_{PA}\cdot\Delta y_{AB} = (\Delta x_{PA}\cdot\Delta y_{AB} - \Delta y_{PA}\cdot\Delta x_{AB})\cdot\operatorname{ctg}\alpha_1$$
$$\Delta x^2_{PA} + \Delta y^2_{PA} + \Delta x_{PA}\cdot\Delta x_{AC} + \Delta x_{PA}\cdot\Delta y_{AC} = (\Delta x_{PA}\cdot\Delta y_{AC} - \Delta y_{PA}\cdot\Delta x_{AC})\cdot\operatorname{ctg}\alpha_2$$

Następnie przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę i porządkujemy zapis:

$$\Delta x_{PA}^2 + \Delta y_{PA}^2 + \Delta x_{PA}(\Delta x_{AB} - \Delta y_{AB}\cdot\operatorname{ctg}\alpha_1) + \Delta y_{PA}(\Delta y_{AB} + \Delta x_{AB}\cdot\operatorname{ctg}\alpha_1) = 0$$
$$\Delta x_{PA}^2 + \Delta y_{PA}^2 + \Delta x_{PA}(\Delta x_{AC} - \Delta y_{AC}\cdot\operatorname{ctg}\alpha_2) + \Delta y_{PA}(\Delta y_{AC} + \Delta x_{AC}\cdot\operatorname{ctg}\alpha_2) = 0$$

Jeśli do powyższych równań wprowadzimy wzory na funkcje podanych wcześniej form rachunkowych: f_1, f_2, g_1, g_2, to para powyższych równań przybierze prostszą postać:

$$\begin{aligned} \Delta x^2_{PA} + \Delta y^2_{PA} + f_1\cdot\Delta x_{PA} + f_2\cdot\Delta y_{PA} = 0 \\ \Delta x^2_{PA} + \Delta y^2_{PA} - g_1\cdot\Delta x_{PA} - g_2\cdot\Delta y_{PA} = 0 \end{aligned} \qquad (9.39a)$$

Po odjęciu powyższych równań stronami otrzymamy:
$(f_1 + g_1)\cdot\Delta x_{PA} + (f_2 + g_2)\cdot\Delta y_{PA} = 0$, a ponieważ $f_1 + g_1 = F_1$; $f_2 + g_2 = F_2$
oraz $\dfrac{F_1}{F_2} = F_0$,

stąd: $\operatorname{tg} A_{PA} = \dfrac{\Delta y_{PA}}{\Delta x_{PA}} = -F_0$, co po przekształceniu daje wzór (9.38).

Widoczne jest również, że:

$$-F_0 = \operatorname{tg} A_{AP} = \frac{f_1 + g_1}{f_2 + g_2} = \begin{vmatrix} \Delta x_{AB} & \Delta y_{AB} \\ +\operatorname{ctg}\alpha_1 & +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_{AC} & \Delta y_{AC} \\ -\operatorname{ctg}\alpha_2 & -1 \end{vmatrix}_0$$

co w zapisie algebraicznym daje równość:

$$-\operatorname{tg} A_{PA} = \frac{\Delta x_{AB} - \Delta y_{AB}\cdot\operatorname{ctg}\alpha_1 - \Delta x_{AC} + \Delta y_{AC}\cdot\operatorname{ctg}\alpha_2}{\Delta x_{AB}\cdot\operatorname{ctg}\alpha_1 + \Delta y_{AB} - \Delta x_{AC}\cdot\operatorname{ctg}\alpha_2 - \Delta y_{AC}} \qquad (9.39)$$

Wzór (9.39) określający orientację pęku kierunków wychodzących z punktu wcinanego: *PA, PB, PC* nosi nazwę *wzoru Delambre'a* – twórcy opisywanego sposobu rozwiązania wcięcia wstecz.
Po podstawieniu: $\Delta y_{PA} = -F_0\cdot\Delta x_{PA}$ do pierwszego równania (9.39 a) otrzymujemy:

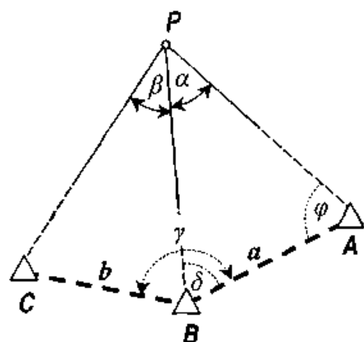
$$\Delta x_{PA}[\Delta x_{PA}(1+F_0^2) + f_1 - f_2\cdot F_0] = 0$$

Jeśli założymy, że zachowany jest warunek $\Delta x_{PA} \neq 0$, wtedy dla spełnienia powyższego równania wyrażenie w nawiasie kwadratowym musi być równe zeru, czyli:

$$\Delta x_{PA}(1+F_0^2) + f_1 - f_2\cdot F_0 = 0$$

stąd:

$$\Delta x_{AP} = \frac{f_1 - f_2 \cdot F_0}{1 + F_0^2},$$ co stanowi algebraiczny zapis wzoru (9.37).



Rys. 9.16. Kąty pomocnicze γ, δ

Sposób rozwiązania pojedynczego wcięcia wstecz został też opracowany przez autora niniejszego podręcznika.

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia pokazane na rys. 9.16. Znajomość współrzędnych punktów A, B, C pozwala na obliczenie na ich podstawie kąta γ ($\sphericalangle CBA$) oraz wyznaczenie długości $a = BC$, $b = AB$.

Po wprowadzeniu oznaczenia: $\delta = \sphericalangle PBA$ oraz formuły na pomocniczy kąt κ

$$\kappa = \gamma + \beta, \tag{9.40}$$

i po zastosowaniu twierdzenia sinusów można napisać:

$$\frac{\sin(\alpha + \delta)}{BP} = \frac{\sin \alpha}{a} \quad \text{oraz} \quad \frac{\sin(\kappa - \delta)}{BP} = \frac{\sin \beta}{b}$$

W wyniku podzielenia powyższych równań stronami, otrzymamy:

$$\frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\kappa - \delta)} = \frac{\sin \alpha \cdot b}{\sin \beta \cdot a} \tag{9.41}$$

Wyrażenie ułamkowe stanowiące prawą stronę powyższego równania jest znaną wielkością, którą oznaczymy symbolem K, zaś sposób jej obliczenia wyraża wzór (9.41 a):

$$K = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a \cdot \sin \beta} \tag{9.41 a}$$

Wyrażenie po lewej stronie równania (9.41) w wyniku zastosowania wzorów na sinus sumy i różnicy kątów oraz po podzieleniu licznika i mianownika przez cos δ przyjmie postać:

$$K = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\kappa - \delta)} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \delta}{\sin \kappa - \cos \kappa \cdot \operatorname{tg} \delta},$$

która pozwoli na wyznaczenie wartości tg δ:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{K \cdot \sin \kappa - \sin \alpha}{K \cdot \cos \kappa + \cos \alpha} \tag{9.42}$$

Znając tgδ, a następnie kąt δ, obliczymy współrzędne punktu P w oparciu o wcięcie w przód:

<u>I obliczenie</u>: $A_{BP} = A_{BA} - \delta$; $d_{BP} = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha + \delta)$;

$$X_P = X_B + d_{BP} \cdot \cos A_{BP} \ ; \ Y_P = Y_B + d_{BP} \cdot \sin A_{BP}.$$

<u>II obliczenie</u>: $A_{AP} = A_{BA} - (\alpha + \delta)$; $d_{AP} = \dfrac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\delta$;

$$X_P = X_A + d_{AP} \cdot \cos A_{AP} \;;\; Y_P = Y_A + d_{AP} \cdot \sin A_{AP}.$$

Kontrola wyznaczenia współrzędnych punktu P polega na obliczeniu ze współrzędnych co najmniej jednego danego kąta np. APB, BPC, lub APC.

Nierozwiązalność wcięcia wstecz, gdy punkty: A,B,C,P znajdują się na tym samym okręgu, wynika w podanym wyżej sposobie z następujących rozważań:

Z sumy kątów trójkąta ABC (rys. 9.15) wynika, że: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, a ponieważ z założenia $\beta + \gamma = \kappa$, a więc: $\kappa = 180° - \alpha$.

Wyrażenie K z wzoru (9.41) będzie równe jedności:

$$K = \frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin(\kappa-\delta)} = \frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin[180° - (\alpha+\delta)]} = 1,$$

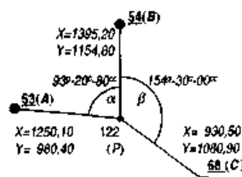
w związku z czym tg δ określony na podstawie wzoru (9.42) wyniesie:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin\kappa - \sin\alpha}{\cos\kappa + \cos\alpha}.$$

Ponieważ $\sin\kappa = \sin\alpha$ oraz $\cos\kappa = -\cos\alpha$, a zatem licznik i mianownik ułamka po prawej stronie powyższego wzoru są równe zero, zaś $\operatorname{tg}\delta$ staje się symbolem nieoznaczonym (0:0).

<u>Przykład</u>:

Obliczyć współrzędne punktu *122* wyznaczonego za pomocą wcięcia wstecz do punktów: <u>*53*</u>, <u>*54*</u>, <u>*68*</u>.



Korzystając z opisanego wyżej sposobu obliczenia wcięcia wstecz, należy wykonać następujące czynności obliczeniowe:

1. Obliczenie azymutów i długości odcinków AB, BC:
   $\Delta x_{AB} = +145{,}10$, $\Delta y_{AB} = +174{,}40$;
   $d_{AB} = a = 226{,}869$ m, $A_{AB} = 55^g82^c19^{cc}$, $A_{BA} = 255^g82^c19^{cc}$
   $\Delta x_{BC} = -464{,}70$, $\Delta y_{BC} = -73{,}90$;
   $d_{BC} = b = 470{,}539$ m, $A_{BC} = 210^g03^c99^{cc}$.
2. Obliczenie kątów: $\gamma(\sphericalangle ABC)$ i κ:
   $\gamma = A_{BA} - A_{BC} = 45^g\,78^c\,20^{cc}$, $\kappa = \gamma + \beta = 200^g\,08^c\,20^{cc}$
3. Obliczenie wartości liczbowej wyrażenia K wg wzoru (9.41a):
   $$K = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a \cdot \sin\beta} = \frac{467{,}863}{149{,}228} = 3{,}135\,236$$
4. Obliczenie kąta δ w oparciu o wzór (9.42):
   $$\operatorname{tg}\delta = \frac{K \cdot \sin\kappa - \sin\alpha}{K \cdot \cos\kappa + \cos\alpha} = \frac{-0{,}998353}{-3{,}028747} = 0{,}329626 \;;\; \delta = 20^g27^c06^{cc}$$
5. Dwukrotne obliczenie współrzędnych punktu P na podstawie kątowego wcięcia w przód:
   $A_{BP} = A_{BA} - \delta = 235{,}5513^g$; $BP = 223{,}072$ m; $A_{AP} = A_{BA} - (\alpha + \delta) = 142{,}3433^g$; $AP = 71{,}429$ m.
   $\Delta x_{BP} = -198{,}18$ m ; $\Delta y_{BP} = -118{,}20$ m. $\Delta x_{AP} = -44{,}08$ m ; $\Delta y_{AP} = +56{,}20$ m

$P \equiv 122$ $\underline{X_P = 1206{,}02\ \text{m}}$; $\underline{Y_P = 1036{,}60\ \text{m}}$ $\underline{X_P = 1206{,}02\ \text{m}}$; $\underline{Y_P = 1036{,}60\ \text{m}}$ ✓

6. Kontrola rachunku poprzez obliczenie kąta *APC* ze współrzędnych:

$$A_{PA} = \text{arctg}\,\frac{-56{,}20}{+44{,}08} = 342{,}3429^g \ ; \ A_{PC} = \text{arctg}\,\frac{+44{,}30}{-275{,}52} = 189{,}8509^g$$

$$\gamma_{obl.} = A_{PC} - A_{PA} = 247{,}5080^g \quad , \quad \gamma_{dane} = \alpha + \beta = 247{,}5080^g \ ✓$$

Ocena dokładności wcięcia wstecz

Metoda analityczna oceny dokładności wcięcia wstecz opiera się o związki funkcyjne pomiędzy szukanymi współrzędnymi X_P, Y_P punktu wcinanego a obserwacjami kątowymi α, β, które zapisać jako różnice azymutów ramion danego kąta:

$$\alpha = A_{PB} - A_{PA} \qquad \beta = A_{PC} - A_{PB}$$

a stąd

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{Y_B - Y_P}{X_B - X_P} - \text{arc tg}\,\frac{Y_A - Y_P}{X_A - X_P}$$

oraz

$$\beta = \text{arc tg}\,\frac{Y_C - Y_P}{X_C - X_P} - \text{arc tg}\,\frac{Y_B - Y_P}{X_B - X_P} \tag{9.43}$$

Zróżniczkowanie powyższych wzorów pozwala uzyskać dwa równania wyrażające związki pomiędzy różniczkami kątów $d\alpha$, $d\beta$ a różniczkami niewiadomych dX_P, dY_P. Po rozwiązaniu układu dwóch równań o dwóch niewiadomych: dX_P, dY_P oraz zastąpieniu różniczek błędami średnimi, a ponadto zakładając jednakową dokładność obydwu kątów, otrzymamy wzór (9.44), w którym występują tzw. *współczynniki kierunkowe* obliczane dla boku ij na podstawie wzorów:

$$a_{ij} = \frac{\Delta x_{ij}}{d_{ij}^2} = \frac{\Delta x_{ij}}{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2} = \frac{\cos A_{ij}}{d_{ij}}$$

$$b_{ij} = \frac{\Delta y_{ij}}{d_{ij}^2} = \frac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2} = \frac{\sin A_{ij}}{d_{ij}} \tag{9.44}$$

oraz wyznacznik D^* obliczany w oparciu o współczynniki kierunkowe:

$$D = \begin{vmatrix} b_{PB} - b_{PA} & -(a_{PB} - a_{PA}) \\ b_{PC} - b_{PB} & -(a_{PC} - a_{PB}) \end{vmatrix} \tag{9.45}$$

Na podstawie podanych wcześniej wielkości można zapisać wzór na średni błąd położenia punktu wciętego wstecz jako:

$$m_P = \pm\frac{m_\alpha}{|D|}\cdot\sqrt{(a_{PC} - a_{PB})^2 + (b_{PC} - b_{PB})^2 + (a_{PB} - a_{PA})^2 + (b_{PB} - b_{PA})^2} \tag{9.46}$$

Błędy średnie kątów są z reguły wyrażane w mierze stopniowej (″) lub gradowej (^{cc}), toteż współczynniki kierunkowe obliczone ze wzorów (9.44) należy wówczas pomnożyć przez odpowiedni zamiennik miary łukowej ρ (ρ''=206 265″ lub ρ^{cc}=636 620^{cc}).

---

* Szczegółowe uzasadnienie podanego wyżej sposobu oceny dokładności punktu wyznaczonego za pomocą kątowego wcięcia wstecz można znaleźć w podręczniku T. Lazzariniego i współautorów „Geodezja. Geodezyjna osnowa szczegółowa"; PPWK Warszawa-Wrocław 1990 r.

Metoda analityczno-graficzna oceny dokładności wcięcia wstecz opiera się na obliczaniu szerokości wstęg wahań za pomocą wzoru (9.29) oraz pola figury błędów powstałej w wyniku ich przecięcia. Przyjmując oznaczenia podane na rys. 9.16 szerokości wstęg wahań dla kątów α i β zapiszemy jako:

$$e_\alpha = \frac{d_{AP} \cdot d_{BP}}{a} \cdot m_\alpha \quad \text{oraz} \quad e_\beta = \frac{d_{BP} \cdot d_{CP}}{b} \cdot m_\beta \tag{9.47}$$

Pole równoległoboku błędów wyniesie natomiast:

$$P_F = \frac{4 \cdot e_\alpha \cdot e_\beta}{\sin \Theta} \tag{9.48}$$

Na rys. 9.16 widać, że kąt Θ utworzony przez osie wyznaczające obu wstęg jest równy sumie kątów pomocniczych $\varphi + \psi$. Każde pojedyncze wcięcie jest prawidłowo zaprojektowane, jeśli kąt Θ pomiędzy osiami wyznaczającymi jest zbliżony do kąta prostego oraz, gdy szerokości wstęg wahań obu elementów wyznaczających są w przybliżeniu równe. Dla wcięcia wstecz pierwszy warunek będzie spełniony, jeżeli: $\alpha + \beta = 270° - \gamma$, natomiast, przy założeniu jednakowej dokładności obydwu kątów, warunek drugi można wyrazić równaniem:

$$\frac{d_{AP} \cdot d_{BP}}{a} = \frac{d_{BP} \cdot d_{CP}}{b}$$

skąd:

$$\frac{a}{b} = \frac{d_{AP}}{d_{CP}} = k$$

Ponieważ punkty dane A, B, C zajmują ustalone położenie, toteż iloraz $a : b = k$ jest wielkością stałą, a zatem dla określonych punktów nawiązania ustalony jest także iloraz długości skrajnych boków wcinających: $d_{AP} : d_{CP} = k$. Miejscem geometrycznym punktów spełniającym warunek stałości stosunku długości boków $AP{:}CP$ jest tzw. *okrąg Apoloniusza* o promieniu r, którego długość można obliczyć ze wzoru:

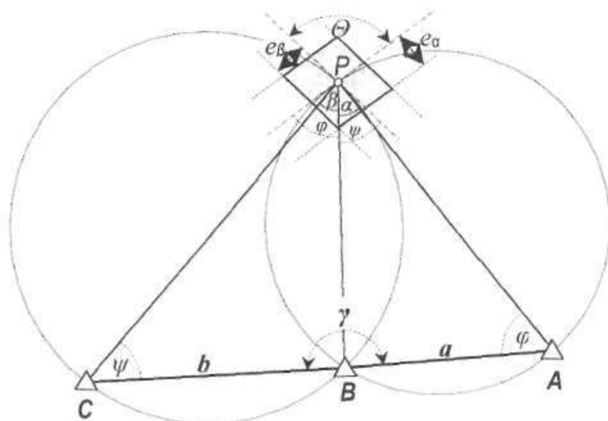
$$r = \frac{k \cdot d_{AC}}{k^2 - 1} \tag{9.49}$$

W lewoskrętnym układzie współrzędnych prostokątnych o początku w punkcie stałym A i osi Oy skierowanej wzdłuż prostej AC współrzędne środka tego okręgu wyniosą:

$$x = 0 \;;\; y = \frac{k \cdot d_{AC}}{k^2 - 1}$$

Z kolei warunek pierwszy spełnią te punkty P, z których odcinek AC jest widoczny pod kątem $\alpha + \beta = 270° - \gamma$, a więc ich miejscem geometrycznym jest inny okrąg o cięciwie AC i jej kącie środkowym $2(\alpha + \beta)$. Wynika to ze znanego twierdzenia, że kąt wpisany w okrąg jest równy połowie kąta środkowego opartego na tej samej cięciwie. Konstrukcja okręgu Apoloniusza i znalezienie położenia jego środka obejmuje następujące czynności graficzne:

- wystawienie prostopadłych do odcinka AC na jego końcach,
- odłożenie od obu prostopadłych jednakowych kątów $(\alpha+\beta)$ i wykreślenie ich ramion,
- zaznaczenie środka okręgu O_1 w punkcie przecięcia się ramion i wykreślenie go poprzez opisanie cięciwy AC.



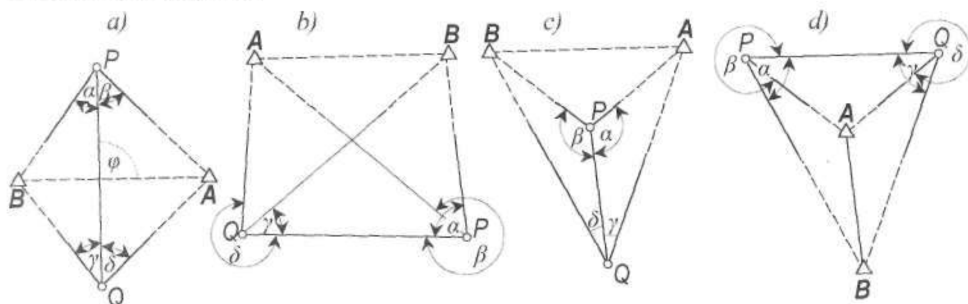
Rys. 9.17. Figura błędów wcięcia wstecz

Dla wcięcia wstecz wykonanego z punktu przecięcia obu okręgów figura błędów jest kwadratem, zaś pole tej figury osiąga minimum w stosunku do innych możliwych położeń punktu P. Najkorzystniejszy przypadek wcięcia wstecz występuje wtedy, gdy punkty dane tworzą trójkąt równoboczny, zaś punkt szukany znajduje się w środku jego ciężkości. Długości celowych d są wtedy jednakowe. Do wstępnych i przybliżonych analiz dokładności można wykorzystywać wzór:

$$m_{P\ [\mathrm{cm}]} = \pm\ 0{,}14 \cdot m_\alpha^{[\mathrm{cc}]} \cdot d_{[\mathrm{km}]}{}^{*} \tag{9.50}$$

9.7. Zadanie Hansena

Zadanie Hansena polega na równoczesnym wyznaczeniu współrzędnych dwóch punktów szukanych P, Q na podstawie wykonania na nich pomiarów kątowych α, β, (na stanowisku P) oraz γ, δ (na stanowisku Q) do dwóch punktów znanych A, B. Ponieważ kąty poziome mierzy się wyłącznie na punktach wcinanych, toteż zadanie Hansena jest często określane jako *dwustanowiskowe wcięcie wstecz*. W ramach tego zadania mogą wystąpić różne przypadki wzajemnej konfiguracji punktów danych i szukanych pokazane na rysunkach 9.18 a, b, c, d.



Rys. 9.18. Przypadki konfiguracji punktów znanych i wyznaczanych w zadaniu Hansena

* Powyższy wzór został zamieszczony w książce: T. Michalski : Triangulacja szczegółowa ; PPWK Warszawa 1975.

9.7.1. Rozwiązanie zadania Hansena za pomocą symboli rachunkowych S. Hausbrandta

W celu ujednolicenia przebiegu obliczeń i dostosowania go do wszystkich zilustrowanych wyżej przypadków zadania Hansena, ustalono jednakowe zasady określania kątów: α, β, γ, δ, stanowiących dane wyjściowe do procesu obliczeniowego:

- kąt α jest kątem prawoskrętnym liczonym od kierunku PQ do kierunku PB,
- kąt β jest kątem prawoskrętnym liczonym od kierunku PA do kierunku PQ,
- kąt γ jest kątem prawoskrętnym liczonym od kierunku QB do kierunku QP,
- kąt δ jest kątem prawoskrętnym liczonym od kierunku QP do kierunku QA.

Zastosowanie powyższych zasad umożliwia ustalenie właściwego zakresu kątów α, β, γ, δ pokazanych na rysunkach 9.18 a, b, c, d.

Tok rachunku zadania Hansena składa się z następujących etapów:

1. Wyznaczenie dostosowanych do określonego przypadku zadania wartości kątów α, β, γ, δ na podstawie kątów pomierzonych,
2. Obliczenie cotangensów kątów α, β, γ, δ.
3. Obliczenie tangensa kąta pomocniczego φ zawartego pomiędzy bokami AB i PQ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta}{\begin{vmatrix} \operatorname{ctg}\alpha & \operatorname{ctg}\beta \\ \operatorname{ctg}\gamma & \operatorname{ctg}\delta \end{vmatrix}_1} \tag{9.51}$$

4. Zestawienie form rachunkowych prostych i obliczenie wartości ich funkcji zerowych: A_0, B_0, C_0, D_0:

$$A_0 = \begin{vmatrix} -\operatorname{tg}\varphi & +1 \\ \operatorname{ctg}\alpha & +1 \end{vmatrix}_0 ;\; B_0 = \begin{vmatrix} +\operatorname{tg}\varphi & +1 \\ \operatorname{ctg}\beta & +1 \end{vmatrix}_0 ;\; C_0 = \begin{vmatrix} +\operatorname{tg}\varphi & +1 \\ \operatorname{ctg}\gamma & +1 \end{vmatrix}_0 ;\; D_0 = \begin{vmatrix} -\operatorname{tg}\varphi & +1 \\ \operatorname{ctg}\delta & +1 \end{vmatrix}_0 \tag{9.52}$$

5. Zestawienie form rachunkowych złożonych F, Φ i obliczenie ich funkcji względnych, prostych (1), (2) prowadzących do wyznaczenia współrzędnych punktów szukanych P, Q:

$$(X_P, Y_P) = F_{(1,2)} = \begin{vmatrix} X_A & Y_A \\ -1 & A_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_B & Y_B \\ +1 & B_0 \end{vmatrix}_{(1,2)} \tag{9.53}$$

$$(X_Q, Y_Q) = \Phi_{(1,2)} = \begin{vmatrix} X_A & Y_A \\ +1 & C_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_B & Y_B \\ -1 & D_0 \end{vmatrix}_{(1,2)} \tag{9.54}$$

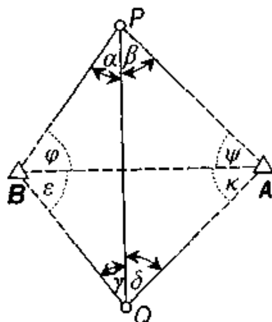
Dla uniknięcia omyłek przy zestawianiu tych form należy zwracać uwagę, czy jednakowe znaki przy jedynce i tangensie kąta φ występują jednocześnie w tych samych formach składowych wzorów (9.52) oraz (9.53), (9.54)

6. Wykonanie obliczenia kontrolnego poprzez ponowne wyznaczenie ze wzoru (9.55) wartości tangensa kąta φ uzyskanego wcześniej z zależności (9.51):

$$\operatorname{tg}\varphi = \begin{vmatrix} \Delta x_{PQ} & \Delta y_{PQ} \\ \Delta x_{AB} & \Delta y_{AB} \end{vmatrix}_0 \tag{9.55}$$

7. Przeprowadzenie kontroli ostatecznej, polegającej na obliczeniu ze współrzędnych co najmniej dwóch pomierzonych kątów np. $\sphericalangle APB$ oraz $\sphericalangle AQB$ i uzyskaniu zgodności kątów kontrolnych z kątami wyjściowymi.

9.7.2. Rozwiązanie zadania Hansena za pomocą kątów pomocniczych φ i ψ



Rys. 9.19. Kąty pomocnicze φ, ψ

Sposób ten przypomina analogiczne rozwiązanie stosowane wcześniej dla wcięcia wstecz. Położenie pomocniczych kątów φ, ψ zostało pokazane na rys. 9.19, z którego wynika, że oznaczenie φ odnosi się obecnie do innego kąta niż przy sposobie Hausbrandta.

Na podstawie sumy kątów w trójkącie *ABP* dla przypadku z rys. 9.18a można napisać:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{180° - (\alpha + \beta)}{2} \tag{9.56}$$

Dla przypadku z rys. 9.18 b analogiczna zależność przyjmie postać:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{180° - (\alpha + \beta)}{2} + 180° \tag{9.57}$$

Po wprowadzeniu pomocniczego kąta μ i zastosowaniu twierdzenia sinusów w trójkątach *ABP* i *ABQ* uzyskujemy wzory:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin \gamma \cdot \sin(\beta + \delta)}{\sin \delta \cdot \sin(\alpha + \gamma)} \tag{9.58}$$

Konstrukcja zadania spełnia też znany z wcięcia wstecz związek (9.33):

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \operatorname{tg}(45° - \mu)$$

Po obliczeniu wartości kątów pomocniczych φ, ψ wg wzorów (9.34) i (9.35) można określić współrzędne punktu *P* za pomocą wcięcia w przód w trójkącie *ABP*. Współrzędne punktu *Q* obliczymy podobnie z wcięcia w przód w trójkącie *ABQ* po wcześniejszym wyliczeniu kątów: ε, κ (rys. 9.19), które wyniosą:

- dla przypadku *a* (rys. 9.18a):

$$\varepsilon = 180° - (\alpha + \gamma + \varphi) \quad \text{oraz} \quad \kappa = 180° - (\beta + \delta + \psi), \tag{9.59}$$

- dla przypadku *b* (rys. 9.18b):

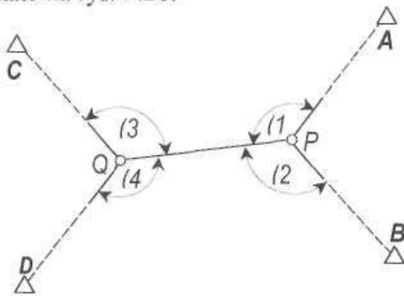
$$\varepsilon = \alpha + \gamma + \varphi - 180° \quad \text{oraz} \quad \kappa = \beta + \delta + \psi - 540° \tag{9.59a}$$

Zadanie Hansena jest nierozwiązalne, gdy kierunek *PQ* przechodzi przez jeden z punków znanych *A* lub *B* albo jednocześnie przez oba te punkty, ponieważ wtedy odwrotność tg μ staje się wielkością nieoznaczoną

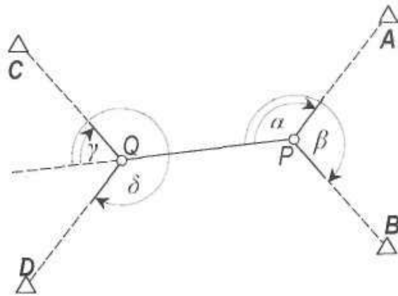
9.8. Uogólnione zadanie Hansena (zadanie Mareka)

Zadanie to polega na określeniu współrzędnych wzajemnie widocznych punktów *P, Q*, na których pomierzono dwie pary kątów. Każdy z tych kątów ma jedno ramię wspólne, określone przez punkty wyznaczane *P, Q*, natomiast drugie ramię jest określone przez punkt wyznaczany i jeden z czterech punktów *A, B, C, D* o znanych współrzędnych (rys. 9.20).

Dla ujednolicenia procesu obliczeniowego został ustalony sposób liczenia kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (rys. 9.21), które są zawsze kątami prawoskrętnymi, czyli liczonymi zgodnie z ruchem wskazówek zegara od kierunku *PQ* na stanowisku *P* oraz jego przedłużenia na stanowisku *Q*. Przeważnie kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ muszą być osobno obliczone, ponieważ nie są tożsame z kątami bezpośrednio pomierzonymi, którymi są z reguły kąty *(1), (2), (3), (4)* wskazane na rys. 9.20.



Rys. 9.20. Zadanie Mareka



Rys. 9.21. Kąty wyjściowe do obliczenia zadania Mareka

W ramach opisanego niżej sposobu rozwiązania zadania Mareka należy dokonać następujących czynności rachunkowych:

1. Obliczyć kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ na podstawie kątów pomierzonych:
   Zgodnie z rysunkami 9.20 oraz 9.21 można zapisać:

$$\alpha = (1)\ ;\ \beta = 360^\circ - (2)\ ;\ \gamma = 180^\circ - (3)\ ;\ \delta = 180^\circ + (4)$$

2. Zestawić formy rachunkowe złożone F, Φ wg wzorów (9.60), (9.61):

$$F \equiv \begin{vmatrix} X_A & Y_A \\ \operatorname{ctg}\alpha & +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_B & Y_B \\ -\operatorname{ctg}\beta & -1 \end{vmatrix} \tag{9.60}$$

$$\Phi \equiv \begin{vmatrix} X_C & Y_C \\ \operatorname{ctg}\gamma & +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_D & Y_D \\ -\operatorname{ctg}\delta & -1 \end{vmatrix} \tag{9.61}$$

3. Obliczyć azymut boku *PQ*:

$$\operatorname{tg} A_{PQ} = \frac{F_{(1)} - \Phi_{(1)}}{\Phi_{(2)} - F_{(2)}} \tag{9.62}$$

4. Obliczyć azymuty boków łączących punkty wcinane z punktami znanymi:

$$A_{PA} = A_{PQ} + \alpha\ ;\ A_{PB} = A_{PQ} + \beta\ ;\ A_{QC} = A_{PQ} + \gamma\ ;\ A_{QD} = A_{PQ} + \delta \tag{9.63}$$

5. Obliczyć współrzędne punktu P na podstawie wcięcia kierunkowego (azymutalnego) w ΔABP:

$$f \equiv \begin{vmatrix} \Delta x_{AB} & \Delta y_{AB} \\ \text{tg}\, A_{PB} & -1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta x_{AP} = \frac{f_2}{\text{tg}\, A_{PB} - \text{tg}\, A_{PA}} \tag{9.64}$$

$$\Delta y_{AP} = \Delta x_{AP} \cdot \text{tg}\, A_{PA} \tag{9.65}$$

$$X_P = X_A + \Delta x_{AP} \quad ; \quad Y_P = Y_A + \Delta y_{AP}$$

6. Obliczyć współrzędne punktu Q na podstawie wcięcia kierunkowego (azymutalnego) w trójkącie CDQ:

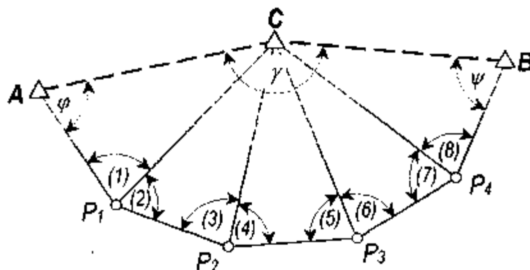
$$g \equiv \begin{vmatrix} \Delta x_{CD} & \Delta y_{CD} \\ \text{tg}\, A_{QD} & -1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta x_{CQ} = \frac{g_2}{\text{tg}\, A_{QD} - \text{tg}\, A_{QC}} \tag{9.66}$$

$$\Delta y_{CQ} = \Delta x_{CQ} \cdot \text{tg}\, A_{QC} \tag{9.67}$$

$$X_Q = X_C + \Delta x_{CQ} \quad ; \quad Y_Q = Y_C + \Delta y_{CQ}$$

7. Wykonać kontrolę rachunku, polegająca na obliczeniu ze współrzędnych przynajmniej po jednym kącie pomierzonym na każdym ze stanowisk P, Q.

9.9. Wyznaczenie grup punktów, wcięcia wielokrotne

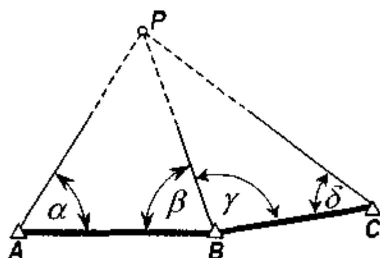


Rys. 9.22. Siatka do wyznaczenia grupy punktów

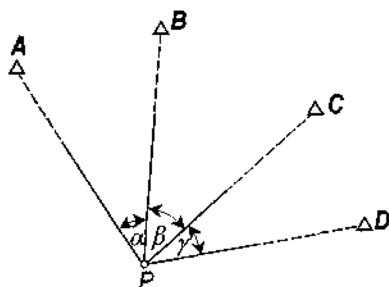
Konstrukcja pokazana na rys. 9.22 nie zawiera obserwacji nadliczbowych (ponieważ $n = 8$; $u = 8$), a zatem w myśl przepisów instrukcji G-2 nie powinna być stosowana do zagęszczania osnowy poziomej. Możliwe jest jednak jej wykorzystanie do rachunku współrzędnych przybliżonych poprzedzającego wyrównanie spostrzeżeń pośredniczących. Rachunek zadania rozpoczynamy od wyznaczenia kąta γ ze współrzędnych punktów: A, B, C, a potem, podobnie jak w zadaniu Hansena, można wykonać obliczenie wartości kątów pomocniczych: φ, ψ. Po ich określeniu obliczamy azymuty boków: AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4C, a następnie współrzędne punktów wyznaczanych.

Powszechnie stosowane do zagęszczania sieci triangulacyjnych niezbędnego dla zapewnienia dogodnych nawiązań osnów poligonowych są wcięcia wielokrotne. *Wcięcia wielokrotne* są konstrukcjami geometrycznymi zawierającymi obserwacje nadliczbowe, założonymi przeważnie dla określenia współrzędnych pojedynczego punktu, rza-

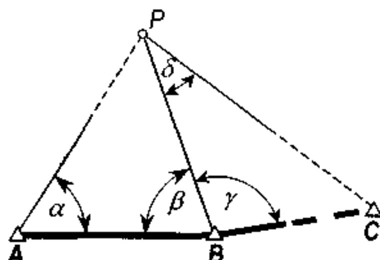
dziej zaś dla dwóch punktów lub ich grupy. W przypadku jednego punktu można zastosować wielokrotne wcięcia kątowe, liniowe lub kątowo-liniowe (rys. 9.23 – 9.26).



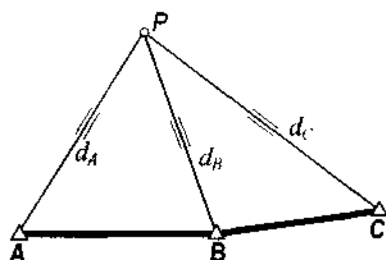
Rys. 9.23. Wielokrotne wcięcie w przód



Rys. 9.24. Wielokrotne wcięcie wstecz



Rys. 9.25. Wielokrotne wcięcie kombinowane

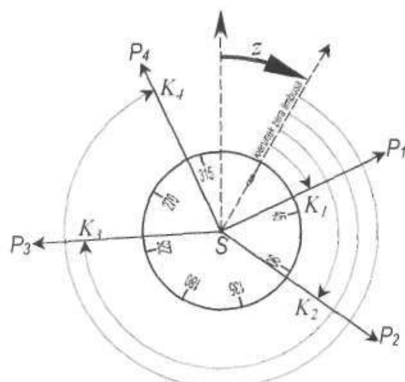


Rys. 9.26. Wielokrotne wcięcie liniowe

Obecność obserwacji nadliczbowych w konstrukcji wcięć wielokrotnych powoduje wystąpienie problemu wyrównania, które z reguły wykonywane jest metodą spostrzeżeń pośredniczących. Tok postępowania podczas tego wyrównania obejmuje następujące czynności:

1. Obliczenie przybliżonych współrzędnych x_0, y_0 punktu wcinanego na podstawie dowolnie wybranego wcięcia pojedynczego.
2. Obliczenie wartości pomierzonych elementów konstrukcyjnych wcięcia kątów $\alpha_{prz.}$ lub długości $d_{prz.}$ na podstawie współrzędnych przybliżonych.
3. Zestawienie równań błędów obserwacji kątowych na podstawie wzoru (2.7) lub równań błędów obserwacji liniowych w oparciu o wzór (2.10).
4. Przekształcenie układu równań błędów na układ równań normalnych, który w przypadku wcięcia pojedynczego punktu składa się z dwóch równań o dwu niewiadomych.
5. Rozwiązanie układu równań normalnych, obliczenie współrzędnych punktu wcinanego, poprawek spostrzeżeń i ich wyrównanych wartości.
6. Dokonanie oceny dokładności.

Wyrównanie wcięć, w których obserwacjami kątowymi są k i e r u n k i powinno uwzględnić obecność w równaniach obserwacyjnych dodatkowej niewiadomej z zwanej *niewiadomą orientującą* lub *stałą orientującą*. Ilość niewiadomych z, występujących w danym zadaniu wyrównawczym jest równa liczbie stanowisk, na których wykonano obserwacje kierunkowe. Niewiadoma z jest azymutem (kątem kierunkowym) kreski zera po-



Rys. 9. 27. Niewiadoma orientacyjna

działu limbusa teodolitu ustawionego na danym stanowisku pomiarowym S, z którego dokonano pomiaru kierunków: K_1, K_2, K_3,..., K_n. Zgodnie z rys. 9.27 przybliżoną wartość z_i niewiadomej orientującej można określić jako różnicę azymutu A_i^P dowolnej celowej obliczonego na podstawie współrzędnych danych i przybliżonych oraz pomierzonego kierunku K_i dla tej celowej.

$$z_i = A_i^P - K_i \tag{9.68}$$

W praktyce wartość przybliżoną z_0 niewiadomej orientującej oblicza się najczęściej jako średnią arytmetyczną z wartości z_i dla wszystkich n kierunków danego stanowiska:

$$z_0 = \frac{[A^P - K]}{n} \tag{9.69}$$

Dla wartości prawdziwych: azymutu A_i i-tej celowej, odpowiadającego jej kierunku K_i wychodzącego ze stanowiska S do punktu celu P_i oraz niewiadomej orientującej z, zapiszemy funkcję:

$$A_i = z + K_i = \operatorname{arc\,tg} \frac{Y_{P_i} - Y_S}{X_{P_i} - X_S} \tag{9.70}$$

Przechodząc we wzorze (9.70) do wartości obserwowanych napiszemy ogólnie:

$$z_0 + dz + K_i + v_{K_i} = A_i^P + dA$$

stąd:

$$v_{K_i} = dA - dz + (A_i^P - z_0 - K_i)$$

gdzie: A_i^P – przybliżona wartość azymutu (ze współrzędnych przybliżonych).

$$dA = \begin{vmatrix} dx_S & dy_S \\ A & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_{P_i} & dy_{P_i} \\ -A & -B \end{vmatrix}_1$$

$$v_{K_i} = \begin{vmatrix} dx_S & dy_S \\ A & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_{P_i} & dy_{P_i} \\ -A & -B \end{vmatrix}_1 - dz + \underbrace{(A_i^P - z_0 - K_i)}_{\text{wyraz wolny } l_i} \tag{9.71}$$

W równaniach błędów spostrzeżeń kierunkowych oprócz poprawek współrzędnych dx, dy punktów wyznaczanych wystąpi także poprawka dz niewiadomej orientującej stanowiska S.

W konstrukcji wcięcia wstecz jedynym punktem szukanym, dostarczającym dwu niewiadomych: dx, dy jest stanowisko S, natomiast punkty celu są punktami znanymi, toteż dla wyrównania wielokrotnego wcięcia wstecz równanie poprawki obserwacji kierunkowej przyjmie prostszą postać:

$$v_{K_i} = \begin{vmatrix} dx & dy \\ A & B \end{vmatrix}_i - dz + l_i = B \cdot dx - A \cdot dy - dz + l_i \qquad (9.72)$$

Wyrazy A, B są współczynnikami kierunkowymi celowych wstecz, obliczonymi na podstawie wzorów (2.5). W ramach kontroli ułożenia równań błędów sprawdzamy czy znak współczynnika przy niewiadomej dx jest zgodny ze znakiem przyrostu Δy, zaś znak współczynnika przy dy powinien być przeciwny do znaku Δx.

Do równań błędów ułożonych według formuły (9.72) można zastosować typową procedurę wyrównania spostrzeżeń pośredniczących, wprowadzającą niewiadomą dz wraz z pozostałymi niewiadomymi do równań normalnych. Drugi sposób wyrównania polega na stosunkowo łatwym, dzięki zależności (9.73), wyeliminowaniu tej niewiadomej już na etapie równań błędów, ponieważ poprawki kierunków v_k tylko wtedy spełnią podstawowy warunek wyrównania $[v_K v_K]$ = minimum, gdy:

$$[v_K] = 0 \qquad (9.73)$$

Po podsumowaniu stronami n równań błędów układu otrzymamy:

$$[v_K] = [B]dx - [A]dy - n \cdot dz + [l]$$

Związek (9.73) wynika z wcześniejszej zależności (7.51), w myśl której $[cv] = 0$. Ponieważ wszystkie współczynniki c przy niewiadomej dz w układzie równań błędów wynoszą -1, a więc $[-v_K] = 0$, czyli także $[v_K] = 0$. Poprawkę niewiadomej orientującej określimy zatem na podstawie wzoru:

$$dz = \frac{[B]}{n} \cdot dx - \frac{[A]}{n} \cdot dy + \frac{[l]}{n} = 0 \qquad (9.74)$$

Po odjęciu prawej strony równania (9.71) od każdego równania błędów układu (9.69), wyeliminujemy niewiadomą dz i otrzymamy układ, z którego równanie dla i-tego kierunku przyjmie postać:

$$v_{K_i} = \left(B_i - \frac{[B]}{n}\right)dx + \left(A_i - \frac{[A]}{n}\right)dy + \left(l_i - \frac{[l]}{n}\right) = B_i' \cdot dx - A_i' \cdot dy + L_i' \qquad (9.75)$$

gdzie:

$$A_i' = A_i - \frac{[A]}{n} \;\; ; \;\; B_i' = B_i - \frac{[B]}{n} \;\; ; \;\; L_i' = l_i - \frac{[l]}{n} \qquad (9.76)$$

Współczynnik A_i', B_i' nazywamy zredukowanymi współczynnikami równań poprawek, zaś element L_i' jest zredukowanym wyrazem wolnym. Znak „prim" nad symbolem współczynnika pozwala na odróżnienie tych współczynników od typowych współczynników kierunkowych. Kontrolą obliczenia elementów zredukowanych jest zerowanie się sum:

$$[A'] = 0 \;\; ; [B'] = 0 \;\; ; [L'] = 0 \qquad (9.77)$$

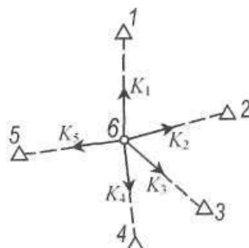
Po zestawieniu równań normalnych na podstawie elementów zredukowanych, przeprowadzamy ich rozwiązanie, które dostarcza poprawek niewiadomych dx, dy. W dalszym ciągu realizujemy typową procedurę wyrównania spostrzeżeń pośredniczących, którą pokażemy na zamieszczonym niżej przykładzie wyrównania wielokrotnego, kierunkowego wcięcia wstecz.

Przykład:

Obliczyć współrzędne punktu *6* na podstawie wyrównania wielokrotnego, kierunkowego wcięcia wstecz.

Dane:

Stanowisko	Cel	Kierunek [grady]	Współrzędne	
			X	*Y*
6	1	0,0000	19 557,61	18 524,23
	2	71,1170	15 569,30	23 921,68
	3	123,7750	10 148,30	23 584,40
	4	188,4730	9 626,28	17 736,07
	5	290,7960	13 652,55	9 822,40



Rozwiązanie:

1. Obliczenie współrzędnych przybliżonych punktu wcinanego na podstawie pojedynczego wcięcia wstecz:

FORMA RACHUNKOWA NA **WCIĘCIE WSTECZ** z punktu: **6**

Szkic: A, B, C, St, α_1, α_2

Δx_{AB}	-3988,31	Δy_{AB}	+5397,45	Δx_{AC}	-9409,31	Δy_{AC}	+5060,17
ctg α_1	+0,487618	+1	+1	−ctg α_2	0,391845	−1	−1
f_1	-6620,20	f_2	+3452,68	Δx_{ASt}	-5956,25	Δy_{ASt}	-907,08
F_0	-0,15229	+1	+1	X_{St}	**13 601,36**	Y_{St}	**17 617,15**

Ozn pkt.	*X*	*Y*	Kąty	g	c	cc
A(1)	19 557,61	18 524,23	α_1	71	11	70
B(2)	15 569,30	23 921,68	α_2	123	77	50
C(3)	10 148,30	23 584,40				

Wzory:

$$F = \left|f\right|g\right| = \begin{vmatrix} \Delta x_{AB} & \Delta y_{AB} \\ \text{ctg}\,\alpha_1 & +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_{AC} & \Delta y_{AC} \\ -\text{ctg}\,\alpha_2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_{AP} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ F_0 & 1 \end{vmatrix}_{(1)} \quad \Delta y_{AP} \quad F_0 \cdot \Delta x_{AP}$$

Kontrola: Obliczenie kątów ze współrzędnych

$$\text{tg}\,\alpha_1 = \begin{vmatrix} \Delta x_{SA} & \Delta y_{SA} \\ \Delta x_{SB} & \Delta y_{SB} \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} 5956,25 & 907,08 \\ 1967,94 & 6304,53 \end{vmatrix}_{(1)} = +2,050789$$

$$\text{tg}\,\alpha_2 = \begin{vmatrix} \Delta x_{SA} & \Delta y_{SA} \\ \Delta x_{SC} & \Delta y_{SC} \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} 5956,25 & 907,08 \\ -3453,06 & 5967,25 \end{vmatrix}_{(1)} = -2,552021$$

$\alpha_1^{obl} = 71,1170^g$✓; $\alpha_2^{obl} = 123,7751^g$✓

$X_0 = 13\,601,36$ m ; $Y_0 = 17\,617,15$ m

2. Obliczenie przybliżonej wartości z_0 niewiadomej orientacyjnej, kierunków przybliżonych i wyrazów wolnych równań błędów:

Stanowisko	Cel	Kierunki pomierzone K_i	Azymuty przybliżone A^P	Stała orientująca $z_i = A_i^P - K_i$	Azymuty przybliżone A_i^P	Wyrazy wolne $l_i = A_i^P - z_0 - K_i$
1	2	3	4	5	6	7
6	1	0,0000	9,6212	9,6212	-0,0005	-5^{cc}
	2	71,1170	80,7382	9,6212	71,1165	-5^{cc}
	3	123,7750	133,3962	9,6212	123,7745	-5^{cc}
	4	188,4730	198,0960	9,6230	188,4443	$+13^{cc}$
	5	290,7960	300,4181	9,6221	290,8664	$+4^{cc}$

$z_0 = 9,6217^g \approx z_{śr}$

3. Obliczenie współczynników kierunkowych: A, B oraz współczynników zredukowanych: A', B', L'.

Bok	Przyrosty		Wsp. kierunkowe		W. wolny	Współczynniki zredukowane		
	Δx	Δy	B	A	l	B'	$-A'$	L'
6–1	5956,25	907,08	15,9	104,5	-5	-6,3	-119,0	-5,4
6–2	1967,94	6304,53	92,0	28,7	-5	69,8	-43,2	-5,4
6–3	-3453,06	5967,25	79,9	-46,2	-5	57,7	31,7	-5,4
6–4	-3975,08	118,92	4,8	-160,0	13	-17,4	145,5	12,6
6–5	51,19	-7794,75	-81,7	0,5	4	-103,9	-15,0	3,6
Σ:	×	×	111,0	-72,5	2	0,0	0,0	0,0
$\frac{1}{n}\Sigma$:			22,2	-14,5	0,4	×	×	×

4. Obliczenie współczynników i zestawienie równań normalnych:

$$19337{,}41\cdot dx \; -1408{,}27\cdot dy - 1248{,}05 = 0$$
$$\underline{-1408{,}27\cdot dx + 38426{,}57\cdot dy + 2483{,}62 = 0}$$
$$17929{,}14\cdot dx + 37018{,}40\cdot dy + 1235{,}57 = 0$$

5. Wyznaczenie niewiadomych z układu równań normalnych:
$dx = +0{,}060_0$ m ; $dy = -0{,}062_4$ m.
Kontrola: 17929,14·0,0600 +37018,40·(-0,0624) + 1235,57 = +1,37 ≈ 0
X_6 = 13 601,36 m +0,060 m = **13 601,420** m
Y_6 = 17 617,15 m – 0,062 m = **17 617,088** m

6. Obliczenie poprawek i kierunków wyrównanych, kontrola ogólna:

Cel	Kierunek K	$B'dx$	$-A'dy$	L'	v	$K + v$
1	0,0000	-0,377	7,428	-5,4	1,651	0,00017
2	71,1170	4,189	2,699	-5,4	1,488	71,11715
3	123,7750	3,463	-1,982	-5,4	-3,918	123,77461
4	188,4730	-1,044	-9,084	12,6	2,472	188,47325
5	290,7960	-6,231	0,939	3,6	-1,692	290,79583
Suma	×	×	×	0,0	0,001	×

$[vv] = 29{,}26$
$[vv] = -1248{,}05\ dx + 2483{,}62\ dy + 259{,}2 = 29{,}26$

7. Obliczenie współczynników wagowych, ocena dokładności:
$Q_{11} = 0{,}000052$; $Q_{12} = 0{,}000002$; $Q_{22} = 0{,}000026$

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} = \sqrt{\frac{29{,}26}{5-3}} = \pm 3{,}8^{cc}$$

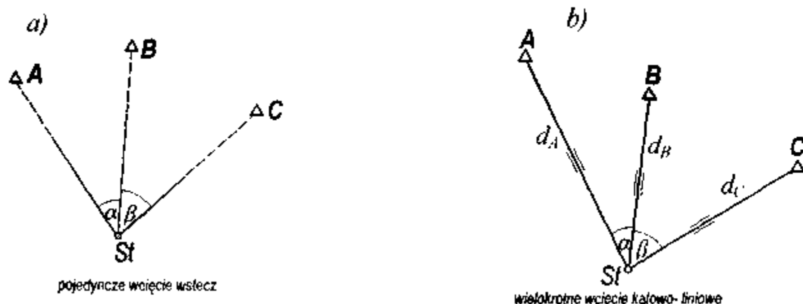
Uwaga: Oprócz współrzędnych punktu wcinanego trzecią niewiadomą jest stała orientująca z.

$m_x = m_0\sqrt{Q_{11}} = \pm 0{,}027_6$ m ; $m_y = m_0\sqrt{Q_{22}} = \pm 0{,}019_5$ m; $m_P = \pm 0{,}033_8$ m

9.10. Stanowiska swobodne

Szczególny rodzaj wcięć przedstawiają tzw. *stanowiska swobodne*, które obecnie są często wykorzystywane do uzupełniania osnowy pomiarowej podczas pomiaru szczegółów metodą biegunową przy użyciu instrumentów typu *total station*. Stanowisko swobodne jest dogodnie usytuowanym, niestabilizowanym punktem ustawienia tachimetru elektronicznego. Położenie tego stanowiska można wyznaczać kątowym wcięciem wstecz(gdy na punktach znanych nie można ustawić pryzmatu) lub wcięciem kątowo-liniowym, dokonując pomiaru kątów poziomych lub kierunków oraz odległości do co najmniej dwóch widocznych punktów o znanych współrzędnych.

Najprostszymi konstrukcjami wykorzystywanymi do określenia współrzędnych prostokątnych stanowiska swobodnego i dostarczającymi minimum niezbędnych obserwacji, są wcięcia pojedyncze. Każde dalsze zwiększenie liczby obserwacji kątowych lub liniowych, wiążących stanowisko swobodne z punktami o znanych współrzędnych (rys. 9.28), dostarcza obserwacji nadliczbowych, stwarzając tym samym problem wyrównania oraz możliwość dokonania oceny dokładności poprzez obliczenie średniego błędu położenia punktu.



Rys. 9.28. Przykłady wcięć wyznaczających stanowiska swobodne

9.10.1. Obliczenie i wyrównanie stanowisk swobodnych

Obliczenie współrzędnych stanowisk swobodnych wyznaczonych wcięciami pojedynczymi zostało opisane wcześniej w ust. 9.4, 9.6. Wcięcia zawierające kąty i długości w ilości nadliczbowej wyrównujemy metodą pośredniczącą jako sieci kątowo-liniowe, przy zastosowaniu postępowania pokazanego na przykładzie kątowo-liniowego wcięcia wstecz do trzech punktów znanych (rys. 9.28 b), zawierającego trzy spostrzeżenia nadliczbowe.

Przykład:

Wyniki pomiaru i ich błędy:

$\alpha = 95{,}6441^g$; $\beta = 125{,}5180^g$; $m_\alpha = m_\beta = \pm 20^{cc}$

$d_A = 711{,}50$ m; $d_B = 569{,}40$ m; $d_C = 421{,}10$ m; $m_d = \pm 0{,}02$ m

Współrzędne punktów znanych: X_A=5000,00 , Y_A=4000,00 ; X_B=4754,51 , Y_B=4845,49 ; X_C=4000,00 , Y_C=4500,00.

1. Obliczenie współrzędnych przybliżonych stanowiska swobodnego na podstawie pojedynczego wcięcia wstecz:

Szkic:

A B C St α_1 α_2

FORMA RACHUNKOWA NA **WCIĘCIE WSTECZ** z punktu: ***St***

Δx_{AB}	-245,49	Δy_{AB}	+845,49	Δx_{AC}	-1000,00	Δy_{AC}	+500,00
ctg α_1	+0,0685293	**+1**	+1	−ctg α_2	-2,8966721	**−1**	−1
f_1	-303,431	f_2	+828,667	Δx_{ASt}	-592,484	Δy_{ASt}	+394,012
F_0	+0,665017	**+1**	+1	X_{St}	**4407,516**	Y_{St}	**4394,012**

Ozn. pkt.	X	Y	Kąty	g	c	cc
A	5000,00	4000,00	α_1	95	64	41
B	4754,51	4845,49	α_2	221	16	21
C	4000,00	4500,00				

Wzory:

$$F=\left|f\right|\left|g\right|=\begin{vmatrix}\Delta x_{AB} & \Delta y_{AB}\\ \text{ctg}\,\alpha_1 & +1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Delta x_{AC} & \Delta y_{AC}\\ -\text{ctg}\,\alpha_2 & -1\end{vmatrix}$$

$$\Delta x_{AP}=\begin{vmatrix}f_1 & f_2\\ F_0 & 1\end{vmatrix}_{(1)} \quad \Delta y_{AP} \quad F_0\cdot\Delta x_{AP}$$

Kontrola: Obliczenie kątów ze współrzędnych

$$\text{tg}\,\alpha_1=\begin{vmatrix}\Delta x_{StA} & \Delta y_{StA}\\ \Delta x_{StB} & \Delta y_{StB}\end{vmatrix}_0=\begin{vmatrix}+592,484 & -394,012\\ +346,994 & +451,478\end{vmatrix}_0=+14,5921987$$

$$\text{tg}\,\alpha_2=\begin{vmatrix}\Delta x_{StA} & \Delta y_{StA}\\ \Delta x_{StC} & \Delta y_{StC}\end{vmatrix}_0=\begin{vmatrix}+592,484 & -394,012\\ -407,516 & +105,998\end{vmatrix}_0=+0,3452242$$

$\alpha_1^{obl}=95,64407^g$✓ ; $\alpha_2^{obl}=221,16213^g$✓

X_0 = **4407,516** m ; Y_0 = **4394,012** m

Obliczenie współrzędnych przybliżonych umożliwia w dalszym toku postępowania zastąpienie niewiadomych współrzędnych stanowiska X_{St}, Y_{St} swobodnego poprawkami dx_{St}, dy_{St} (lub krócej: dx, dy), spełniającymi zależności:

$$X_{St}=X_0+dx_{St}\ ;\ Y_{St}=Y_0+dy_{St}\,.$$

2. Obliczenie przybliżonych długości boków *St-A*, *St-B*, *St-C* i współczynników kierunkowych odległości na podstawie współrzędnych przybliżonych:

Punkty od	Punkty do	Odległość d_{prz}	Odległość d_{obs}	d_{prz}-d_{obs} [m]	Azymut (grady)	sin *A*	cos *A*
St	A	711,535	711,500	+0,035	362,6393	-0,554	0,833
St	B	569,418	569,400	+0,018	58,2834	0,793	0,609
St	C	421,073	421,100	-0,027	183,8015	0,252	-0,968

3. Obliczenie kątów α, β na podstawie współrzędnych przybliżonych:

Punkty Centralny	Lewy	Prawy		Kąt przybl. (grady)	Kąt obs. (grady)	$\alpha_{prz}-\alpha_{obs}$ [cc]
St	A	B	α	95,64407	95,64410	-0,3
St	B	C	β	125,51806	125,51800	+0,6

4. Obliczenie współczynników kierunkowych obserwacji kątowych na podstawie wzoru (2.5) oraz zestawienie równań błędów obserwacji kątowych i liniowych na podstawie wzorów (2.7), (2.10):

Wzory:

$$A=\frac{\Delta x}{\Delta x^2+\Delta y^2}\cdot\rho^{cc}=\frac{\cos A}{d}\cdot\rho^{cc}\quad ;$$

$$B=\frac{\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}\cdot\rho^{cc}=\frac{\sin A}{d}\cdot\rho^{cc}$$

Bok od - do	Współczynniki kierunkowe *A*	Współczynniki kierunkowe *B*
St-A	745,0	-495,4
St-B	681,3	886,4
St-C	-1463,2	380,6

$$v_\alpha = \begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{matrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{matrix} \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix}_1 + \alpha_{prz} - \alpha_{obs}$$

$$v_d = \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -\cos A & -\sin A \end{vmatrix} \begin{matrix} dx_K & dy_K \\ \cos A & \sin A \end{matrix} \Bigg|_2 + d_{prz} - d_{obs}$$

Równania poprawek spostrzeżeń rzeczywistych:

$$v_\alpha = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 745 & -495 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ -681 & 886 \end{matrix} \begin{vmatrix} dx_{St} & dy_{St} \\ -64 & 1382 \end{vmatrix}_1 + 5 = 1382\,dx + 64\,dy - 0{,}3$$

$$v_\beta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 681 & 886 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1463 & -380 \end{matrix} \begin{vmatrix} dx_{St} & dy_{St} \\ -2145 & -506 \end{vmatrix}_1 - 6 = -506\,dx + 2145\,dy + 0{,}6$$

$$v_{d_A} = \begin{vmatrix} dx_{St} & dy_{St} \\ -0{,}833 & 0{,}554 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0{,}833 & -0{,}554 \end{matrix} \Bigg|_2 + 0{,}036 = -0{,}833\,dx + 0{,}554\,dy + 0{,}036$$

$$v_{d_B} = \begin{vmatrix} dx_{St} & dy_{St} \\ -0{,}609 & -0{,}793 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0{,}609 & 0{,}793 \end{matrix} \Bigg|_2 + 0{,}017 = -0{,}609\,dx - 0{,}793\,dy + 0{,}018$$

$$v_{d_C} = \begin{vmatrix} dx_{St} & dy_{St} \\ 0{,}968 & -0{,}252 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ -0{,}968 & 0{,}252 \end{matrix} \Bigg|_2 - 0{,}022 = 0{,}968\,dx - 0{,}252\,dy - 0{,}027$$

W tym samym zadaniu występują wielkości niejednorodne tj. kąty i długości, wyrażone w różnych jednostkach. Zachodzi więc potrzeba zrównoważenia równań błędów poprzez ich obustronne podzielenie przez błędy średnie poszczególnych spostrzeżeń:

$$\begin{aligned}
v_\alpha &= 1382\,dx + 64\,dy - 0{,}3 && \|:20 \\
v_\beta &= -506\,dx + 2144\,dy + 0{,}6 && \|:20 \\
v_{dA} &= -0{,}833\,dx + 0{,}554\,dy + 0{,}036 && \|:0{,}02 \\
v_{dB} &= -0{,}609\,dx - 0{,}793\,dy + 0{,}018 && \|:0{,}02 \\
v_{dC} &= 0{,}968\,dx - 0{,}252\,dy - 0{,}027 && \|:0{,}02
\end{aligned}$$

5. Po podzieleniu równań błędów przez średnie błędy spostrzeżeń otrzymujemy zrównoważony układ równań błędów, czyli równania poprawek spostrzeżeń zrównoważonych:

$$\begin{aligned}
V_\alpha &= 69{,}09\,dx + 3{,}19\,dy - 0{,}02 \\
V_\beta &= -25{,}29\,dx + 107{,}23\,dy + 0{,}03 \\
V_{dA} &= -41{,}63\,dx + 27{,}69\,dy + 1{,}77 \\
V_{dB} &= -30{,}47\,dx - 39{,}65\,dy + 0{,}92 \\
V_{dC} &= 48{,}39\,dx - 12{,}58\,dy - 1{,}33
\end{aligned}$$

Nr	*a*	*b*	*l*	*s*
1	+69,09	+3,19	-0,02	+72,26
2	-25,29	+107,23	+0,03	+81,97
3	-41,63	+27,69	+1,77	-12,17
4	-30,47	-39,65	+0,92	-69,20
5	+48,39	-12,58	-1,33	+34,48
Σ	20,09	+85,88	+1,37	+107,34

6. Zestawienie równań normalnych wg postępowania dla spostrzeżeń pośredniczących, jednakowo dokładnych:

$$10417{,}29\,dx - 3045{,}95\,dy - 168{,}06 = 0$$

$$\underline{-3045{,}95\,dx + 14004{,}35\,dy + 32{,}56 = 0}$$

$$7371{,}34\,dx + 10958{,}40\,dy - 135{,}50 = 0$$

Ozn.	*a*]	*b*]	*l*]	*s*]
[*a*	10417,29	-3045,95	-168,06	7203,28
[*b*	-3045,95	14004,35	32,56	11023,52
[*l*	-168,06	32,56	5,75	-129,75
[*s*	7203,28	11023,52	-129,75	18097,05

7. Rozwiązanie równań normalnych, obliczenie współczynników wagowych:
$dX = +0{,}016$ m; $dY = +0{,}001$ m $\underline{X_{St} = 4407{,}532 \text{ m}; Y_{St} = 4394{,}013 \text{ m}}$

Q_{11}= 0,000102; Q_{12}= 0,000022; Q_{22}= 0,000076

8. Obliczenie poprawek spostrzeżeń zrównoważonych i spostrzeżeń rzeczywistych, spostrzeżenia wyrównane:

Poprawki V	Poprawki v	$L_i + v_i$
1,1292	22,5843	95,6463g
-0,2538	-5,0761	125,5175g
1,1222	0,022444	711,522 m
0,3629	0,007259	569,407 m
-0,5510	-0,01102	421,089 m

Poprawki rzeczywiste v otrzymujemy w wyniku pomnożenia poprawek zrównoważonych V przez odpowiednie błędy średnie spostrzeżeń rzeczywistych.

9. Kontrola ostateczna polegająca na sprawdzeniu spełnienia równań obserwacyjnych, czyli równości spostrzeżeń wyrównanych (L+v) i spostrzeżeń określonych na podstawie współrzędnych punktów znanych i współrzędnych wyrównanych obliczonych jako niewiadome .

Obserwacja ze współrzędnych	Obserwacja wyrównana
95,6464g	95,6463g
125,5175g	125,5175g
711,522 m	711,522 m
569,407 m	569,407 m
421,089 m	421,089 m

10. Ocena dokładności:

$$[VV] = 3{,}0342 \; ; \quad m_0 = \sqrt{\frac{[VV]}{n-u}} = \pm 1{,}006$$

$$m_x = m_0\sqrt{Q_{11}} = \pm 0{,}010_2 \text{ m} \; ; \; m_y = m_0\sqrt{Q_{22}} = \pm 0{,}008_8 \text{ m};$$

$$m_P = \pm 0{,}013_4 \text{ m}$$

9.10. 2. Obliczanie współrzędnych stanowisk swobodnych za pomocą programu komputerowego WinKalk

Popularny i prosty w obsłudze program WinKalk firmy *Coder* umożliwia obliczenie współrzędnych punktu stanowiska swobodnego wyznaczonego za pomocą pojedynczego (klasycznego) wcięcia wstecz lub kombinowanego kątowo-liniowego wcięcia wstecz.

Do obliczenia pojedynczego wcięcia wstecz przystępujemy po wyborze obiektu i wpisaniu do bazy danych oznaczeń i współrzędnych punktów nawiązania: A, B, C (patrz podręcznik *Geodezja I* ust. 8.13.). Jako przykład obliczmy zadanie rozwiązane wcześniej w ust. 9.6 na str. 240. Z menu „Pomiary/Wcięcia" wybieramy opcję „Wstecz", po czym pojawia się okno pokazane na rys. 9.29, w którym wpisujemy numery punktów nawiązania i kierunki pomierzone do nich z punktu wcinanego. Po wpisaniu oznaczenia dowolnego punktu znanego naciśnięcie klawisza [Enter] spowoduje automatyczny zapis w odpowiednich polach jego współrzędnych X, Y. Ostatnim wprowadzanym elementem jest numer punktu wyznaczanego. Po naciśnięciu przycisku (*oblicz wszystko*) program niemal natychmiast podaje współrzędne tego punktu wciętego.

Wcięcie wstecz

Punkt 1	53	X	1250,10	Y	980,40	Kier.1	0,0000
Punkt 2	54	X	1395,20	Y	1154,80	Kier.2	93,2080
Punkt 3	68	X	930,50	Y	1080,90	Kier.3	247,5080
Pkt wcięty	122	X	1206,02	Y	1036,60		

Zapis punktu

Rys. 9.29. Okno obliczenia wcięcia wstecz w programie WinKalk

Podobny przebieg ma obliczenie współrzędnych stanowiska swobodnego powiązanego z punktami znanymi za pośrednictwem obserwacji kątowych i liniowych. Korzystamy przy tym z menu „Pomiary/Stanowisko swobodne", które wywołuje okno „Stanowiska swobodne" (rys. 9.30). W polu „Numer punktu" wpisujemy numer stanowiska, z którego pomierzono kierunki i odległości do punktów znanych. Następnie w odpowiednich komórkach tabeli wpisujemy numery punktów celu, miary do punktów znanych oraz ustalone wcześniej błędy średnie pomierzonych kierunków i odległości. Maksymalna ilość punktów znanych wynosi 50.

WinKalk 3.22 [C:\WINKALK\STSW] - [Stanowiska swobodne]

System Punkty Pomiary Obliczenia Trasy Rejestrator Wyrównanie St.swobodne Okno

Strefa 65: 0 Zapisz Zostaw Uśrednij Dialog

Numer punktu St X 4407,5331 Y 4394,0047

Błąd punktu po wyrównaniu: 0,0125

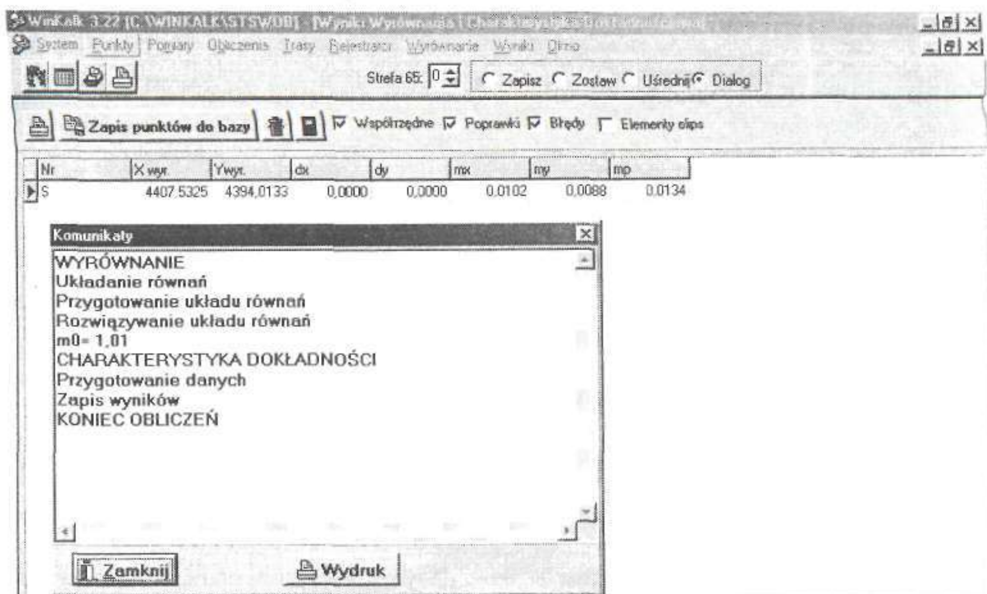
Nr	X	Y	Kierunek	Odległość	Bł.kąta	Bł.od
A	5000,0000	4000,0000	0,0000	711,5000	0,0020	0,0200
B	4754,5100	4845,4900	95,6441	569,4000	0,0020	0,0200
C	4000,0000	4500,0000	221,1621	421,1000	0,0020	0,0200

Rys. 9.30. Obliczenie współrzędnych stanowiska swobodnego przy użyciu programu WinKalk

Po naciśnięciu przycisku następuje wyliczenie współrzędnych przybliżonych za pomocą pojedynczego wcięcia wstecz, a następnie w żółtych polach nad tabelą ukazują się współrzędne wyrównane stanowiska swobodnego i średni błąd jego położenia. Rysunek 9.29 przedstawia wyniki obliczenia przykładu rozwiązanego wcześniej w ust. 9.10.1. Drobne rozbieżności współrzędnych (0,6 mm i 0,9 mm) w porównaniu z uzyskanymi poprzednio rezultatami wyrównania wynikają z przyjęcia jako obserwacji przez program kierunków zamiast kątów.

Posługując się programem WinKalk, otrzymamy identyczne wyniki wyrównania w porównaniu z zamieszczonym wcześniej przykładem, jeśli do obliczenia współrzędnych stanowiska swobodnego, z udziałem odległości i kątów (a nie kierunków), wykorzystamy

menu „Wyrównanie", umożliwiające dokonanie wyrównania stanowiska swobodnego jako płaskiej sieci kątowo-liniowej (rys. 9.31).



Rys. 9.31. Obliczenie współrzędnych stanowiska swobodnego za pomocą funkcji „Wyrównanie"

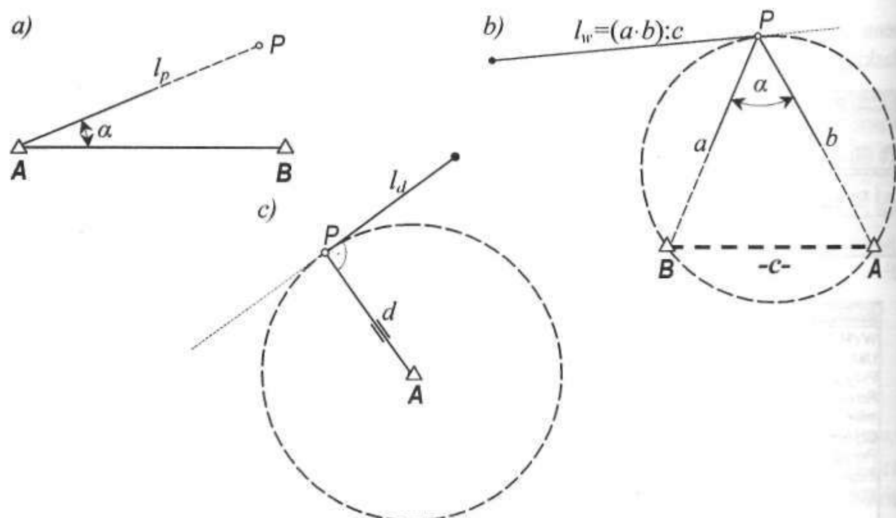
9.11. Konstrukcja geometryczna określająca położenia punktu

Po zaprojektowaniu sieci powierzchniowej lub grupy wielopunktowej osnowy poziomej dokonuje się badania prawidłowości określenia położeń poszczególnych punktów, wykorzystując do tego celu miejsca geometryczne prawdopodobnych położeń poszczególnych punktów wyznaczanych.

Zgodnie z wymogami instrukcji G-2 (§ 11) oraz wytycznymi technicznymi G-2.5 (§ 4) położenie każdego punktu sieci kl. II powinno być wyznaczone dwukrotnie tzn. poprzez dwie niezależne od siebie pary elementów wyznaczających. W konstrukcji geometrycznej określającej położenie punktu jednokrotne wyznaczenie uzyskuje się poprzez przecięcie dwóch linii obrazujących miejsca geometryczne prawdopodobnych położeń punktu. Kąt przecięcia Ψ tych linii powinien zawierać się w przedziale od 45° do 135°.

Miejscem geometrycznym prawdopodobnych położeń punktów mogą być:

1. Celowa w przód (rys. 9.32 a), w przypadku gdy pomierzono kąt poziomy α, którego ramieniem jest bok o długości l_p łączący punkt dany A i punkt wyznaczany P;
2. Okrąg opisany na trójkącie ABP, którego boki PA i PB są celowymi wstecz, stanowiącymi ramiona kąta α pomierzonego na punkcie wyznaczanym P (rys. 9.32 b), z którego widać punkty dane A, B pod kątem α,
3. Okrąg, którego promieniem jest długość d, stanowiąca element wcięcia liniowego, pomierzona pomiędzy punktem danym A a punktem wyznaczanym P (rys. 9.32 c).



Rys. 9.32. Miejsca geometryczne określające prawdopodobne położenia punktu P

Przy badaniu konstrukcji geometrycznej położenia wyznaczanego punktu zamiast elementów pomierzonych przyjmuje się następujące długości odcinków:

1. Dla kąta α pomierzonego na punkcie danym z celową w przód do punktu wyznaczanego – długość l_p celowej w przód.
2. Dla kąta α pomierzonego pomiędzy celowymi wstecz – długość l_w stycznej do okręgu w punkcie P obliczoną ze wzoru:

$$l_w = \frac{a \cdot b}{c} \tag{9.78}$$

   Jeśli zaobserwowano n celowych wstecz, wówczas można z nich uzyskać n–1 odcinków l_w.
3. Dla długości d pomiędzy punktem danym i wyznaczanym zamiast zmierzonej odległości przyjmuje się odcinek l_d stycznej do okręgu w punkcie P o długości równej d.

Jednokrotne wyznaczenie położenia punktu P uzyskuje się w wyniku przecięcia się dowolnej pary odcinków: l_p, l_w, l_d, zaś kąt ich przecięcia Ψ powinien spełniać warunek:

$$45° \leqslant \Psi \leqslant 135°.$$

ROZDZIAŁ 10: Wybrane zagadnienia z dziedziny obliczeń osnów geodezyjnych

10.1. Opracowanie wyników pomiaru osnów poziomych przed wyrównaniem sieci

10.1.1. Opracowanie materiału obserwacyjnego osnowy poziomej

W terenie na poszczególnych stanowiskach pomiarowych należy stopniowo przeprowadzać obliczenia kontrolne w dziennikach pomiaru kątów lub kierunków (tabela 5.1) oraz długości boków (tabela 5.4). Po zakończeniu prac terenowych trzeba sprawdzić czy obserwacje wykonane w sieciach poziomej osnowy szczegółowej są poprawne pod względem prawidłowości obliczeń wstępnych w dziennikach polowych i zgodności rezultatów pomiaru z założeniami technicznymi podanymi w projekcie osnowy. W dalszej kolejności należy opracować kameralnie wyniki obserwacji w formie zestawień, szkiców i materiałów potrzebnych do wykonania wyrównania. Podczas obserwacji mimośrodowych, dla których elementy mimośrodu zostały wyznaczone w sposób pośredni należy obliczyć wartości tych elementów, a następnie poprawki dośrodkowania i wartości poprawione kątów lub kierunków (tabela 10.1) i długości (tabela 10.2).

Tabela 10.1. Dośrodkowanie kierunków (przykład z Wytycznych Techn. G-1.5)

Stanowisko	Nr i nazwa celu	Średni kierunek pomierzony $K_{śr}$			Poprawka mimośrodu		Kierunek poprawiony			Uwagi
					stan.	celu				
1	2	3			4	5	6			7
253 Młynica II	257 Słupice II	0	00	00	+19	–	0	00	00	
	13 Słupice	109	68	67	+8	-15	109	68	81	
	153 Młynica	211	18	97	-18	–	211	18	60	
	250 Oleszna kośc.	301	80	35	-6	–	301	80	10	
	254 Oleszna	337	27	25	+2	–	337	27	08	
	Sumy:	959	95	24	19·5	-95	959	94	19	
			-1	05		-10				
	Sumy:	959	94	19		-105				

Tabela 10.2. Redukcje pomierzonych długości (przykład z Wytycznych Techn. G-1.5)

Nr i nazwa punktu	Długość ukośna	H celu	i pryzmatu	$H_z - H_d$ lub kąt pionowy	Popr. na pochyl.	Długość pozioma	Długość zredukow. ze wzgl. na mimośr.	Długość zredukow. do p. m.	Błąd pomiaru m_d
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13 Słupice	12319,259	226,56	3,14	+14,05	-0,075	1319,184	1319,233	1319,187	0,016
153 Młynica	1701,273	242,07	3,12	$+1,1033^g$		1701,018	1701,034	1700,972	0,019
254 Oleszna	1632.680	194,87	3,11	$-0,6918^g$		1632,584	1632,532	1632,479	0.018

Oprócz zestawienia obserwacji należy także sporządzić wykaz współrzędnych punktów nawiązania wyrównywanej sieci oraz jej szkic zawierający:

a) zasięg wyrównywanej sieci,
b) punkty nawiązania i punkty wyznaczane,

c) kąty, kierunki i długości z pomiarów nowych i adaptowanych,
d) średnie błędy obserwacji i rok ich wykonania.

Czynnościami wstępnymi, poprzedzającymi wyrównanie sieci osnowy poziomej metodą pośredniczącą, są: obliczenie współrzędnych przybliżonych punktów wyznaczanych i średnich błędów wykonanych obserwacji. Do określania współrzędnych przybliżonych można zastosować konstrukcje jednoznacznie wyznaczalne takie jak wcięcia pojedyncze, ciągi poligonowe wiszące lub nawiązane obliczane metodami przybliżonymi. Zgodnie z wytycznymi technicznymi G-2.5 obliczenia wstępne powinny być wykonywane dwukrotnie w sposób niezależny.

10.1.2. Ocena dokładności pomierzonych kierunków lub kątów poziomych

Wstępną ocenę dokładności obserwacji kątowych można wykonać na podstawie wyrównania stacyjnego (np. dla metody kierunkowej w oparciu o wzór (10.5)). Stwierdzono jednak, że uzyskane w ten sposób błędy średnie kąta lub kierunku, będąc z reguły za małe, charakteryzują raczej wewnętrzną zgodność obserwacji i nie zapewniają właściwej ich oceny dokładnościowej. Z tego względu do określenia średnich błędów obserwacji kątowych wykorzystuje się odchyłki kątowe f w wielobokach zamkniętych. Odchyłkę kątową obliczamy jako różnicę sumy pomierzonych kątów wierzchołkowych (sumy praktycznej) i znanej sumy teoretycznej wynikającej z ilości kątów danej figury geometrycznej:

$$f = [\beta]_p - [\beta]_t \tag{10.1}$$

Średni błąd sumy n kątów wieloboku zamkniętego $[\beta]_p$ pomierzonych z jednakową dokładnością wyrażoną błędem średnim m, wynosi: $m_{[\beta]} = m\sqrt{n}$. Suma teoretyczna kątów jest bezbłędna, toteż przewidywana odchyłka zamknięcia wieloboku f wyraża się analogicznym, znanym z poligonizacji wzorem:

$$f = m\sqrt{n} \tag{10.2}$$

Na podstawie znajomości odchyłki f zamknięcia kątów wieloboku można także ocenić dokładność obserwacji kątowych, obliczając średni błąd pojedynczego kąta:

$$m = \frac{f}{\sqrt{n}}$$

Charakterystyka dokładności obserwacji na podstawie pojedynczej figury nie jest wystarczająca, toteż badając dokładność kątów pomierzonych w sieci, należy wykorzystać odchyłki uzyskane ze wszystkich figur zamkniętych danej sieci. Do wstępnej oceny dokładności pomiaru kątów nieregularnej sieci poziomej przed jej wyrównaniem przeważnie wykorzystywany jest *wzór Ferrero**, którego ogólny zapis jest następujący:

$$m = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{3}[f_3^2] + \frac{1}{4}[f_4^2] + \frac{1}{5}[f_5^2] + \cdots + \frac{1}{r}[f_r^2]}{n_3 + n_4 + n_5 + \cdots + n_r}} \tag{10.3}$$

gdzie: f_3 – odchyłka trójkąta, f_4 – odchyłka czworoboku, f_5 – odchyłka pięcioboku itd.

* Wyprowadzenie wzoru Ferrero zostało podane w podręczniku T. Lazzariniego i współautorów „Geodezja: Geodezyjna osnowa szczegółowa" PPWK Warszawa-Wrocław 1990.

n_3 – ilość trójkątów w sieci, n_4 – ilość czworoboków, n_5 – ilość pięcioboków,..., n_r – ilość wieloboków o r kątach.

W przypadku sieci triangulacyjnych, gdzie jako wieloboki zamknięte występują tylko trójkąty (w ilości n), wzór Ferrero przyjmie prostszą, ogólnie znaną formę:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[ff]}{3n}} \tag{10.4}$$

Dla sieci, w której obserwacje stanowią kierunki zamiast kątów, średni błąd pojedynczego kierunku m_k wynosi:

$$m_k = \pm\sqrt{\frac{[ff]}{6n}} \tag{10.5}$$

Jeśli liczba figur zamkniętych w sieci przekracza 20, wówczas ocena dokładności pomierzonych kątów na podstawie wzorów Ferrero: (10.3), (10.4) lub (10.5) jest najbardziej wiarygodna spośród wszystkich znanych sposobów jej dokonywania, ponieważ opiera się z reguły na dużym materiale obserwacyjnym i uwzględnia nie tylko wewnętrzną zgodność wyników, lecz także błędy operacyjne, instrumentalne, centrowania, redukcji oraz błędy wynikające z wpływu warunków zewnętrznych np. refrakcji.

10.1.3. Ocena dokładności pomierzonych długości boków

Ocena dokładności pomiaru elementów liniowych może być dokonana na podstawie obliczenia średniego błędu średniej arytmetycznej uzyskanej dla każdego boku osnowy z wyników pomiaru poszczególnych serii. Jak podano wcześniej, serię stanowi osobny pomiar długości dalmierzem elektrooptycznym, przy czym przed każdą kolejną serią należy ponownie scentrować i spoziomować dalmierz oraz reflektor, dokonując potem nowego wycelowania i pomiaru. W przypadku, gdy boki są mierzone dwukrotnie, np. w kierunkach tam i z powrotem, wtedy można określić średni błąd m_d średniej długości boku na podstawie n różnic Δ poszczególnych par spostrzeżeń w oparciu o wzór:

$$m_d = \pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{10.6}$$

Do wyrównania sieci liniowych i kątowo-liniowych, w których długości boków pomierzono dalmierzami elektrooptycznymi należy zgodnie z wytycznymi G-2.5 przyjmować wartości średnich błędów obliczone w oparciu o wzór (5.25). Dla boków pomierzonych w jednym kierunku, czyli bez zmiany stanowiska instrumentu i reflektora, przyjmuje się błąd wynoszący: $m_d\sqrt{2}$, natomiast dla boków pomierzonych w obu kierunkach błąd równy m_d.

Przed przystąpieniem do wyrównania sieci należy utworzyć zbiory robocze punktów nawiązania i wyznaczanych zawierające: wykaz numerów punktów i ich współrzędnych znanych, przybliżonych oraz dane do oceny dokładności sieci.

10.1.4. Kontrola jakości prac związanych z zakładaniem osnów geodezyjnych

Instrukcja techniczną G-2 „Szczegółowa pozioma i wysokościowa osnowa geodezyjna i przeliczenia współrzędnych między układami" (wydanie z r. 2000) stwierdza, że do przeprowadzenia potwierdzonej protokolarnie kontroli jakości prac geodezyjnych jest zobowiązany ich wykonawca. Celem kontroli jakościowej wykonywanej oddzielnie dla sieci poziomej i wysokościowej jest stwierdzenie czy efekty prac spełniają założone wymagania technologiczne i dokładnościowe oraz czy zachowują one spójność z danymi geodezyjnymi nie wchodzącymi do danej sieci.

Do metod oceny dokładności sieci zalicza się: ocenę na podstawie wyrównania metodą najmniejszych kwadratów, estymację i test statystyczny, pomiary wielokrotne (powtarzane), porównanie wyników prac z danymi geodezyjnymi o wyższej dokładności.

Kontrola jakości prac związanych z zakładaniem osnowy geodezyjnej obejmuje następujące trzy etapy:

1) Sprawdzenie wykonanych obserwacji, dzienników polowych, szkiców, wyników pomiarów i innej dokumentacji technicznej z obowiązującymi wymaganiami technicznymi i projektem technicznym.
2) Wstępna analiza jakościowa zbiorów obserwacyjnych przeprowadzana po usunięciu błędów grubych.
3) Ocena poprawności wyników wyrównania sieci oraz ocena spełnienia założeń dokładności dla określonej klasy sieci.
4) Sprawdzenie w terenie poprawności osadzenia znaków geodezyjnych i dokumentacji z tym związanej.

10.2. Opracowanie wyników pomiaru osnów wysokościowych przed wyrównaniem sieci

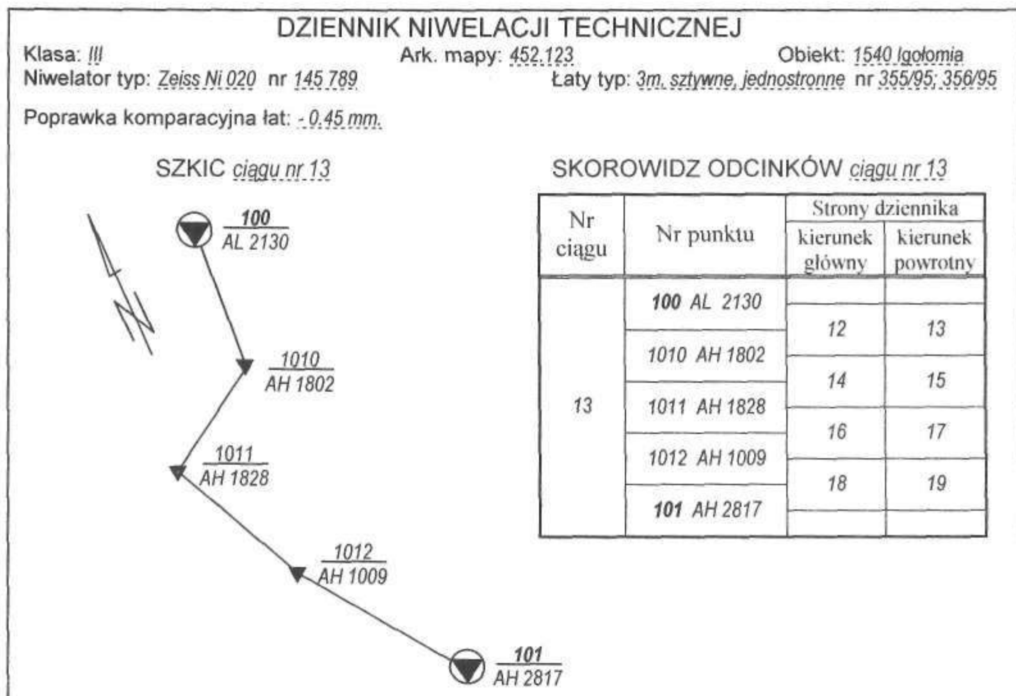
Prace związane z opracowaniem materiału polowego uzyskanego podczas pomiaru sieci niwelacyjnych kl. I, II dzielą się na trzy etapy:

1. Opracowanie i analiza materiałów pomiarowych, dokonywane przez obserwatora podczas pomiaru oraz po jego zakończeniu dla poszczególnych elementów konstrukcyjnych sieci niwelacyjnej: odcinka, linii i poligonu niwelacyjnego.
2. Opracowanie kameralne, obejmujące sprawdzenie dzienników polowych i zestawienie pomierzonych różnic wysokości poszczególnych elementów sieci, obliczenie dla nich i wprowadzenie odpowiednich poprawek, dokonanie wstępnej oceny dokładności.
3. Wyrównanie sieci i ocena dokładności po wyrównaniu oraz sporządzenie zbioru danych w postaci katalogu wysokości punktów.

Opracowanie wyników pomiaru szczegółowej osnowy wysokościowej obejmuje podobny tok postępowania, przy czym należy wykonać następujące czynności:

1. Sprawdzić różnice wysokości *h* obliczone w terenie na poszczególnych stanowiskach niwelatora.
2. Obliczyć z dokładnością do 0,01 km długości odcinków niwelacyjnych, będących sumą długości celowych.
3. Sprawdzić obliczenia poprzez wykonanie kontroli sumowych na każdej stronie dziennika niwelacyjnego.

4. Obliczyć z dokładnością do 0,5 mm różnice wysokości dla odcinków niwelacji w kierunku głównym i powrotnym oraz średnie różnice wysokości.
5. Obliczyć poprawki różnic wysokości ze względu na średnią długość metra kompletu łat użytych do pomiaru poszczególnych odcinków niwelacji i poprawić różnice wysokości.
6. Na ostatnich stronach dzienników dokonać zestawienia wyników pomiaru różnic wysokości odcinków niwelacyjnych dla kierunków głównych wraz z podaniem odchyłek otrzymanych i dopuszczalnych dla kierunków: głównego i powrotnego.



DZIENNIK NIWELACJI TECHNICZNEJ

Klasa: *III* Ark. mapy: *452.123* Obiekt: *1540 Igołomia*

Niwelator typ: *Zeiss Ni 020* nr *145 789* Łaty typ: *3m, sztywne, jednostronne* nr *355/95; 356/95*

Poprawka komparacyjna łat: *- 0.45 mm.*

SZKIC *ciągu nr 13*

SKOROWIDZ ODCINKÓW *ciągu nr 13*

Nr ciągu	Nr punktu	Strony dziennika – kierunek główny	Strony dziennika – kierunek powrotny
13	***100*** *AL 2130*		
		12	*13*
	1010 AH 1802		
		14	*15*
	1011 AH 1828		
		16	*17*
	1012 AH 1009		
		18	*19*
	101 *AH 2817*		

Rys. 10.1. Szkic linii niwelacyjnej i skorowidz odcinków (fragment)

Po dokonaniu kontroli dzienników pomiarowych dla poszczególnych linii niwelacyjnych należy wykonać zestawienie (tabela 10.3) obejmujące następujące dane:

1) numer znaku i opis jego położenia;
2) długość odcinka niwelacji z dokładnością do 0,01 km;
3) numer i stronę dziennika pomiarowego, datę pomiaru i ilość stanowisk;
4) różnica wysokości z pomiarów w kierunku głównym i powrotnym oraz poprawki komparacyjne łat z dokładnością do 0,1 mm;
5) różnice dwukrotnego pomiaru różnicy wysokości: otrzymane i dopuszczalne;
6) średnie różnice wysokości h dla poszczególnych odcinków niwelacyjnych;
7) wysokości reperów na końcach linii niwelacyjnej;
8) długość linii w km, odchyłkę otrzymana i dopuszczalną (w uwagach).

Ocena dokładności pomiaru niwelacyjnego przed wyrównaniem sieci polega na obliczeniu średniego błędu m_1 pomiaru linii niwelacyjnej na 1 km w oparciu o pary spostrzeżeń na podstawie wzoru:

$$m_1 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{ff}{R}\right]\cdot\frac{1}{n_R}} \tag{10.7}$$

gdzie: f – różnica dwukrotnego pomiaru różnicy wysokości odcinka niwelacji w kierunku głównym i powrotnym,

R – długość odcinka w km,

n_R – liczba odcinków wykorzystanych do oceny dokładności.

Tabela 10.3. Zestawienie wyników pomiaru szczegółowej osnowy wysokościowej i obliczenie wysokości punktów wysokościowych

OBLICZENIE WYSOKOŚCI PUNKTÓW NIWELACJI TECHNICZNEJ									
Układ wysokości: *Kronsztad*			Klasa: *III*		Ark. mapy: *452.123*			Obiekt: *1540 Igołomia*	
Nr ciągu (linii)	Nr punktu Ozn. głowicy	Dł. odc. R w km	Różnica wysokości h kier. główny / powrotny	f_{otrz} / f_{dop} [mm]	$h_{śr.}$ [mm]	Popr. łat [mm]	$h_{popr.}$ [mm]	Popr. wyrów. [mm]	Wysokość wyrównana H [m]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	*100* *AL 2130*								$57{,}281_5$
			-2373 / *+2371*	*-2.0* / *6.0*	*-2372,0*	*+1,1*	*-2370,9*	*+1,8*	
	1010 *AH 1802*	*1,00*							*54,912*
			-4827 / *+4827*	*0.0* / *7.3*	*-4827,0*	*+2,2*	*-4824,8*	*+2,7*	
	1011 *AH 1828*	*1,50*							*50,090*
			-1542 / *+1544*	*+2.0* / *2.8*	*-1543,0*	*+0,7*	*-1542,3*	*+0,8*	
	1012 *AH 1009*	*0,50*							*48,548*
			+1479 / *-1483*	*-4.0* / *7.3*	*+1481,0*	*-0,7*	*+1480,3*	*+2,7*	
	101 *AH 2817*	*1,50*							$50{,}031_5$
Sumy		*4,50*	*-7263* / *+7259*	*-4.0* / *12.0*	*-7261,0*	*+3,3*	-7257_7	*8,0* / *+8,5*	$\Delta H = -7{,}249_7$ m
									$m_o = 3.6$ mm

Średni błąd m_2 pomiaru 1 km całej sieci można wyznaczyć z odchyłek zamknięć poligonów niwelacyjnych ze wzoru:

$$m_2 = \pm\sqrt{\left[\frac{\varphi\varphi}{F}\right]\cdot\frac{1}{n_F}} \tag{10.8}$$

gdzie: φ – odchyłka zamknięcia poligonu niwelacyjnego,

F – długość obwodnicy poligonu w km,

n_F – liczba poligonów wykorzystanych do oceny dokładności.

Tabela 10.4. Dopuszczalne błędy średnie na 1 km pomiaru linii i poligonu niwelacyjnego

Błędy średnie	III klasa	IV klasa
m_1	*2,5 mm*	*6,0 mm*
m_2	*3,5 mm*	*8,0 mm*

Wartości tych błędów nie powinny przekraczać odpowiednich wartości zawartych w tabeli 10.4. W przypadku przekroczenia odchyłek dopuszczalnych pomiar odcinka lub linii należy powtórzyć przynajmniej w jednym kierunku.

10.3. Przybliżone wyrównanie osnów wysokościowych i poziomych

10.3.1. Zasady ogólne wyrównywania sieci geodezyjnych

Do wyrównania osnów: podstawowej i szczegółowej stosuje się ścisłe metody wyrównania, zaś do osnów pomiarowych w dawniejszych standardach technicznych dopuszczano stosowanie metod przybliżonych np. metody punktów węzłowych. Wyrównanie osnowy poziomej metodą najmniejszych kwadratów, opartą na warunku: $[pvv]$ = minimum, wykonuje się przy założeniu bezbłędności punktów nawiązania należących do wyższej klasy dokładnościowej w stosunku do sieci podlegającej wyrównaniu, na płaszczyźnie odwzorowania, dawniej w układzie państwowym „1965", obecnie zaś w układzie „2000". Spostrzeżeniom niejednorodnym i niejednakowo dokładnym należy przed wyrównaniem przypisać wagi, obliczane jako wielkości odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów średnich obserwacji. Wagi podaje się z dokładnością do 0,01.

Sieci niwelacyjne klas I – IV wyrównywane są metodą ścisłą (pośredniczącą lub warunkową) przy założeniu bezbłędności punktów nawiązania, należących do wyższych klas w stosunku do klasy sieci podlegającej wyrównaniu. Wagi ciągów niwelacyjnych przyjmuje się jako liczby odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów średnich, zaś w sytuacji, gdy średnie błędy niwelacji na 1 km dla poszczególnych ciągów są zbliżone do siebie, wówczas można przyjmować wagi ciągów jako liczby odwrotnie proporcjonalne do długości ciągów w km. W tym przypadku średni błąd jednostkowy – m_0 wyraża dokładność niwelacji na odcinku 1 km. Obiektami wyrównania mogą być: pojedyncze ciągi (linie) niwelacyjne, sieci niwelacyjne jednowęzłowe i wielowęzłowe.

10.3.2. Wyrównanie pojedynczego ciągu niwelacyjnego, nawiązanego obustronnie

Najprostsze wyrównanie dotyczy pojedynczego ciągu wysokościowego, nawiązanego obustronnie do dwóch reperów wyższej klasy, sprowadzające się do wykonania następujących czynności:

1. Określenie sum różnic wysokości pomiędzy reperami końcowymi linii (ciągu):
   - *sumy praktycznej* (pomierzonej) $[\Delta H]_p$ stanowiącej sumę średnich różnic wysokości w kierunku głównym i powrotnym linii (ze znakiem dla kierunku głównego) dla poszczególnych odcinków niwelacji, wchodzących w skład danej linii o długości L (w km),
   - *sumy teoretycznej* $[\Delta H]_t$ obliczonej na podstawie znanych wysokości reperów nawiązania: początkowego – P i końcowego – K:

$$[\Delta H]_t = H_K - H_P \tag{10.9}$$

2. Obliczenie odchyłki wysokościowej – f_h, stanowiącej różnicę wyżej wymienionych sum:

$$f_h = [\Delta H]_p - [\Delta H]_t \tag{10.10}$$

3. Obliczenie poprawek v_i dla średnich różnic wysokości z poszczególnych odcinków niwelacji o długości R (w km):

$$v_i = -\frac{f_h}{L} \cdot R_i \tag{10.11}$$

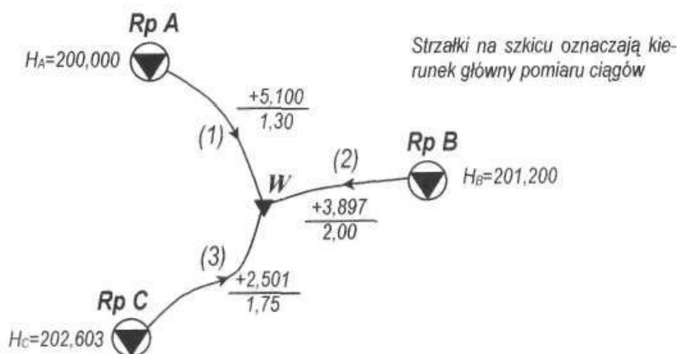
4. Poprawienie spostrzeżeń, czyli dodanie poprawek v do różnic wysokości poszczególnych odcinków niwelacyjnych (tabela 10.3).

5. Obliczenie wysokości reperów danej linii na podstawie wyrównanych różnic wysokości odcinków.
6. Ocena dokładności głównie w oparciu o analizę źródeł błędów.

10.3.3. Wyrównanie sieci niwelacyjnych metodą punktów węzłowych

Metoda punktów węzłowych jest przybliżoną metodą wyrównania wykorzystywaną dla obliczania sieci niwelacyjnych osnowy pomiarowej zaś, w drodze wyjątku (przed zaplanowaną modernizacją osnowy podstawowej), także jednowęzłowych sieci nawiązanych klasy IV. Dawniej metoda ta była również dość powszechnie stosowana do obliczania niezależnych (nie nawiązanych) sieci niwelacyjnych o małych rozmiarach. Wyrównanie wykonuje się dwuetapowo. Pierwszym etapem obliczenia jest wyznaczenie wysokości punktów węzłowych sieci, zaś drugim – określenie wysokości poszczególnych punktów w ciągach sposobem opisanym wcześniej w ust. 10.3.2.

Istota metody polega na wielokrotnym obliczeniu wysokości poszczególnych punktów węzłowych, przy czym za każdym razem należy wychodzić z innego punktu nawiązania i dochodzić do punktu węzłowego możliwie najkrótszą drogą. Dodatkowym warunkiem metody jest wykorzystanie do obliczeń wysokości punktu węzłowego różnic wysokości wszystkich tych ciągów, które do niego dochodzą.



Rys. 10.2. Szkic najprostszej sieci niwelacyjnej nawiązanej trójpunktowo

Kolejność czynności podczas wyrównania rozpatrzymy na przykładzie najprostszej sieci niwelacyjnej nawiązanej trójpunktowo do reperów: *Rp A*, *Rp B*, *Rp C*, złożonej z trzech ciągów niwelacyjnych: (*1*), (*2*), (*3*), zbiegających się w punkcie węzłowym – *W* (rys. 10.2).

1. Sporządzenie szkicu sieci przed przystąpieniem do obliczeń. Na szkicu tym należy zaznaczyć:
   - punkty nawiązania, punkty węzłowe, ciągi (linie) niwelacyjne oraz oznaczenia tych elementów,
   - dane wysokości punktów nawiązania,
   - strzałki oznaczające kierunki główne pomiaru poszczególnych ciągów,

- różnice wysokości dla poszczególnych ciągów h_i wyrażone w metrach, zgodne z zaznaczonym kierunkiem pomiaru oraz długości L_i ciągów wyrażone w km. Zapis obu wielkości ma zwykle postać pseudoułamkową: $\frac{h_i}{L_i}$.

2. Określenie wysokości punktu węzłowego W, przy każdorazowym wyjściu z innego punktu nawiązania:

$H'_W = H_A + h_1 = 200{,}000 + 5{,}100 = 205{,}100$ m z wagą $p_1 = 1:1{,}30 = 0{,}77$

$H''_W = H_B + h_2 = 201{,}200 + 3{,}897 = 205{,}097$ m z wagą $p_2 = 1:2{,}00 = 0{,}50$

$H'''_W = H_C + h_3 = 202{,}603 + 2{,}501 = 205{,}104$ m z wagą $p_3 = 1:1{,}75 = 0{,}57$

3. Otrzymane w ten sposób wyniki traktujemy jako spostrzeżenia bezpośrednie niejednakowo dokładne, z których jako najbardziej prawdopodobną uważamy średnią arytmetyczną ogólną obliczaną ze wzoru (7.37):

$$x = \frac{[pL]}{[p]}$$

Stosując oznaczenia przyjęte w przykładzie, zapiszemy powyższy wzór w postaci:

$$H_W = \frac{H'_W \cdot p_1 + H''_W \cdot p_2 + H'''_W \cdot p_3}{p_1 + p_2 + p_3} \tag{10.12}$$

4. Dla przeprowadzenia kontroli rachunku i oceny dokładności obliczymy poprawki v, przy czym zgodnie z podanym wcześniej wzorem (7.27):

$$v_i = x - L_i$$

Kontrolę rachunku średniej arytmetycznej i poprawek stanowi spełnienie zależności (7.38) wyrażonej wzorem:

$$[pv] = 0$$

5. W ramach oceny dokładności należy obliczyć ze wzoru (7.39) średni błąd jednostkowy, czyli błąd spostrzeżenia typowego o wadze równej 1 (w tym wypadku jest to średni błąd niwelacji na 1 km):

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$$

oraz średni błąd średniej arytmetycznej ogólnej ze wzoru (7.40):

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}}$$

przy czym: n – ilość dróg wykorzystanych do obliczenia wysokości punktu węzłowego.

Obliczenia wykonane według podanego wyżej toku postępowania zostały zestawione w tabeli 10.5.

Tabela 10.5. Obliczenie wysokości punktu węzłowego

Punkt węzłowy nr: *W* Układ wysokości: *Kronsztad* Nr ark.: *452.114* Obiekt: *1540 Igołomia*

Nr ciągu (linii)	Długość ciągu – L w km	Waga ciągu $p_i = \frac{1}{L_i}$	Nr punktu nawiązania	Wysokość punktu nawiązania	Różnica wysokości h	Niewyrównana wysokość H_i punktu węzłowego	Poprawki $v_i = H_w - H_i$ [mm]	pv
1	1,30	0,77	Rp A	200,000	+5,100	205,100	+0,4	+0,31
2	2,00	0,50	Rp B	201,200	+3,897	205,097	+3,4	+1,70
3	1,75	0,57	Rp C	202,603	+2,501	205,104	-3,6	-2,05
–	$[p]$=	1,84	–	–	–	–	$[pv]$=	-0,04
H_w = **205,100₄** m;		$[pvv]$ = 13,28;		$m_0 = \pm 2{,}58$ mm;		$m_{H_w} = \pm 1{,}9$ mm		

10.3.4. Wyrównanie sieci poligonowych metodą punktów węzłowych

Podstawowymi elementami sieci poligonowych są pojedyncze ciągi poligonowe. Ciąg poligonowy jest wielobokiem zamkniętym lub otwartym, w którym kolejne punkty poligonowe tworzą boki i kąty podlegające pomiarowi. *Sieć poligonowa* jest poziomą siecią kątowo-liniową złożoną z poszczególnych ciągów poligonowych, łączących punkty nawiązania oraz *punkty węzłowe*, czyli punkty, w których schodzą się co najmniej trzy równorzędne ciągi poligonowe. Najprostszą siecią poligonową jest układ trzech ciągów zbiegających się w pojedynczym punkcie węzłowym (rys. 10.3). Głównymi zadaniami punktów węzłowych są: skracanie zbyt długich ciągów, ograniczenie liczby rzędów sieci oraz ułatwienie jej obliczania. Sieci poligonowe *nawiązane* stanowią osnowę połączoną geometrycznie za pośrednictwem boków i kątów nawiązania z punktami nawiązania należącymi do osnowy poziomej o wyższej dokładności niż zakładana sieć poligonowa. W wyjątkowych przypadkach bywają także zakładane sieci poligonowe *niezależne*, które nie są nawiązywane do punktów osnowy wyższej klasy. Kompromis pomiędzy siecią nawiązaną wielopunktowo i niezależną stanowi sieć poligonowa nawiązana jednopunktowo z orientacją. Nawiązanie to polega na przeniesieniu współrzędnych na jeden z punktów sieci oraz wykonaniu nawiązania kierunkowego na jednym z jej boków.

Celem obliczenia sieci poligonowej jest określenie współrzędnych prostokątnych X, Y punktów poligonowych wchodzących w jej skład. Ponieważ materiał obserwacyjny sieci zawiera spostrzeżenia nadliczbowe, narzucające określone równania warunkowe, toteż obliczenie współrzędnych punktów poligonowych jest powiązane z wyrównaniem spostrzeżeń niejednorodnych: wierzchołkowych kątów poziomych i długości boków poligonowych. Wyrównanie małych sieci może być wykonane mniej pracochłonnymi metodami przybliżonymi lub znacznie bardziej złożonymi metodami ścisłymi, w wyniku czego dla poszczególnych spostrzeżeń zostają określone poprawki spełniające podstawowy warunek teorii najmniejszych kwadratów $[pvv]$ = minimum. W ramach przybliżonej metody obliczania ciągów poligonowych wyrównanie wykonujemy dwuetapowo, tzn. najpierw poprawiamy kąty na podstawie obliczonych odchyłek kątowych, a następnie przyrosty współrzędnych otrzymane na podstawie wcześniej poprawionych kątów.

Na rysunkach 2.16 a, b pokazano najprostsze sieci poligonowe: niezależną i nawiązaną, zawierające po trzy ciągi. Występujący w sieci niezależnej (rys. 2.16 b) punkt węzłowy *W-A* jest zarazem punktem wyjściowym o znanych lub przyjętych współrzędnych, natomiast punktem węzłowym obliczanym jest w obydwu sieciach węzeł oznaczony

symbolem *W-1*. Bok wychodzący z punktu węzłowego, wykreślony na szkicu sieci linią pogrubioną, oznacza w sieci niezależnej bok o zadanym azymucie (z punktu *W-A*) lub w obu rodzajach sieci bok o azymucie, który zostanie obliczony podczas pierwszego etapu wyrównania, jakim jest wyznaczenie azymutów boków przywęzłowych.

Swego czasu metody przybliżone były powszechnie stosowane do wyznaczania współrzędnych punktów osnów szczegółowych i pomiarowych. Wynikało to z dawniejszej niedoskonałości techniki obliczeniowej, a więc z trudności związanych z czasochłonnym, żmudnym wyrównaniem ścisłym dużych sieci. Przy aktualnym poziomie komputerowych metod obliczeniowych i rozwoju profesjonalnego oprogramowania do wyrównywania osnowy metodami ścisłymi rachunek nawet bardzo rozległych sieci, obejmujących niejednokrotnie obszar całego kraju, nie stanowi już dziś istotnego problemu, w związku z czym praktyczne zastosowanie metod przybliżonych straciło obecnie na znaczeniu.

Rys. 10.3. Szkic sieci poligonowej nawiązanej trójpunktowo

Najczęściej wykorzystywanym przybliżonym sposobem wyrównania sieci poligonowych jest *metoda kolejnego obliczania punktów węzłowych*, polegająca na wykorzystaniu wyższej dokładności określenia położenia punktów węzłowych, które uzyskuje się za pomocą większej liczby elementów wyznaczających niż w przypadku zwykłych punktów poligonowych. Początkowe etapy obliczenia sieci są więc związane z wyznaczeniem wielkości związanych z punktami węzłowymi:

- azymutów A_w tzw. *boków przywęzłowych*, czyli boków wychodzących z punktów węzłowych, zaznaczanych na szkicu sieci linią pogrubioną,
- współrzędnych X_W, Y_W punktów węzłowych.

W metodzie punktów węzłowych, stosowanej do obliczania nawiązanych sieci poligonowych, przyjmuje się trzy zasady ustalania dróg obliczeniowych, oznaczanych w formularzach (tabele 10.6, 10.7) za pośrednictwem zapisu numerów ciągów wchodzących w skład wybranej drogi, biegnącej od punktu nawiązania do węzła:

1. Ilość dróg obliczeniowych, łączących punkty nawiązania z węzłami, jest równa ilości ciągów dochodzących do danego punktu węzłowego.
2. Obliczenie elementów węzła wykonuje się możliwie najkrótszą drogą, wychodząc każdorazowo z innego punktu nawiązania.
3. Do określenia azymutu lub współrzędnych każdego punktu węzłowego sieci muszą być wykorzystane wszystkie ciągi dochodzące do danego punktu węzłowego.

Na podstawie sumy utworzonej przez liczbę n kątów lewych $[\alpha]$ lub prawych $[\beta]$ i azymutu początkowego A_P można obliczyć końcowy azymut A_K boku przy węźle na podstawie znanego wzoru:

$$A_K = A_P + [\alpha] - n \cdot 180^\circ \qquad \text{lub} \qquad A_K = A_P - [\beta] + n \cdot 180^\circ \tag{10.13}$$

Azymut A_n wybranego boku przywęzłowego lub azymut jego boku odwrotnego określamy na podstawie sumy tego samego rodzaju kątów, występujących wzdłuż wybranej drogi obliczeniowej, poczynając od kąta nawiązania, zaś kończąc na najbliższym kącie z ramieniem boku przywęzłowego zaznaczonym na szkicu grubą linią. Ujednolicone wyniki tych obliczeń traktujemy jako spostrzeżenia bezpośrednie (odnoszące się do tej samej wielkości wyznaczanej) niejednakowo dokładne i uśredniamy je obliczając ze zmodyfikowanego wzoru (7.25 a) na średnią arytmetyczną ogólną A_w, w zapisie dla wielkości przybliżonej A_P:

$$A_w = A_p + \frac{[(A_n - A_p)\cdot p_{kt}]}{[p_{kt}]} \tag{10.14}$$

W sieci poligonowej przedstawionej na rys. 10.3 obliczenie azymutu boku przywęzłowego A_{W-3} wykonuje się trzykrotnie w oparciu o azymuty wyjściowe: A_{AB}, A_{CD}, A_{EF}, otrzymane ze współrzędnych punktów nawiązania, i sumy kątów w ciągach: *I, II, III*. Wagi p_{kt}, będące niemianowanymi liczbami określającymi dokładność danego spostrzeżenia, są odwrotnie proporcjonalne do liczby kątów n_{kt} biorących udział w obliczaniu sum $[\alpha]$, $[\beta]$. Dla ułatwienia rachunku odwrotność tej liczby mnożymy przez 10, korzystając z wzoru:

$$p_{kt} = \frac{10}{n_{kt}} \tag{10.15}$$

Ocena dokładności wyznaczenia azymutu boku przywęzłowego dokonywana jest poprzez obliczenie średniego błędu średniej arytmetycznej ogólnej m_x na podstawie poprawek v, stanowiących różnice pomiędzy średnią arytmetyczną a poszczególnymi spostrzeżeniami: $v_i = x - L_i$. Poprawność średniej arytmetycznej i poprawek kontrolujemy sprawdzając zerowanie się sumy iloczynów poprawek przez wagi: $[pv] = 0$, po czym obliczamy $[pvv]$ i błąd m_x na podstawie wzoru (7.40). Po uzyskaniu wyrównanych azymutów boków przywęzłowych każdy ciąg sieci uzyska obustronne nawiązanie kątowe, toteż na podstawie znanych azymutów A_P, A_K krańcowych boków można obecnie dla każdego ciągu obliczyć sumę teoretyczną kątów $[\alpha]_t$ lub $[\beta]_t$ i odchyłkę kątową f_{kt}. Należy także wyznaczyć odchyłkę dopuszczalną $f_{kt\,max}$. Do dalszych czynności obliczeniowych można przystąpić, jeśli spełniony jest warunek: $f_{kt} \leqslant f_{kt\,max}$.

Po równomiernym rozrzuceniu odchyłki f_{kt} na poszczególne kąty ciągu, obliczamy dla każdego ciągu z kątów poprawionych azymuty i przyrosty boków poligonowych zawartych pomiędzy punktem nawiązania a węzłem, po czym w podobny sposób przystę-

pujemy do wielokrotnego wyznaczenia współrzędnych punktu węzłowego, korzystając przy tym z tych samych dróg obliczeniowych jak podczas określania azymutów boków przywęzłowych. Obliczanie współrzędnych X_W, Y_W polega na dodawaniu do współrzędnej (X_0 lub Y_0) wyjściowego punktu nawiązania sumy przyrostów boków znajdujących się pomiędzy tym punktem a obliczanym punktem węzłowym, czyli:

$$X_W = X_0 + [\Delta x]_{0\text{-}W} \qquad \text{oraz} \qquad Y_W = Y_0 + [\Delta y]_{0\text{-}W} \qquad (10.16)$$

Dalsze czynności przebiegają podobnie jak podczas wyznaczania azymutów węzłowych tzn. otrzymane współrzędne X_W lub Y_W danego węzła traktujemy również jako spostrzeżenia bezpośrednie niejednakowo dokładne, którym przypisujemy wagi $p_x = p_y$ (identyczne dla obu współrzędnych tego samego węzła), odwrotnie proporcjonalne do długości drogi obliczeniowej L wyrażonej w metrach. Wagi współrzędnych punktu węzłowego obliczamy na podstawie wzoru:

$$p_x = p_y = \frac{1000}{L} \qquad (10.17)$$

gdzie: L – długość drogi (odcinka) obliczenia wyrażona w metrach, będąca sumą długości boków poligonowych zawartych pomiędzy punktem nawiązania a punktem węzłowym.

Ostateczne współrzędne punktów węzłowych są średnimi arytmetycznymi ogólnymi z niewyrównanych współrzędnych tych punktów, obliczanymi dla każdego węzła osobno dla obu współrzędnych, czyli dla X_W, Y_W na podstawie wzoru na średnią arytmetyczną ogólną z udziałem wielkości przybliżonej.

$$X_w = X_p + \frac{[(X_n - X_p) \cdot p_L]}{[p_L]} \qquad (10.18)$$

$$Y_w = Y_p + \frac{[(Y_n - Y_p) \cdot p_L]}{[p_L]} \qquad (10.18\,a)$$

Wykonujemy także wyznaczenie poprawek (v_x, v_y) oraz kontrolę i ocenę dokładności. Błędy średnie m_x, m_y obu współrzędnych punktu węzłowego pozwalają na określenie średniego błędu m_P jego położenia:

$$m_P = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \qquad (10.19)$$

Znajomość współrzędnych punktów nawiązania i punktów węzłowych umożliwia dokończenie obliczenia poszczególnych ciągów poligonowych, ponieważ na początku i końcu każdego z nich znajduje się znany punkt. Pozwala to na określenie sum teoretycznych przyrostów: $[\Delta x]_t$, $[\Delta y]_t$, odchyłek przyrostów: f_x, f_y i odchyłki liniowej f_L. Odchyłka ta nie może przekroczyć wartości dopuszczalnej ($f_L \leq f_{L\ max}$)Po rozrzuceniu odchyłek f_x, f_y proporcjonalnie do bezwzględnej wartości przyrostów uzyskujemy z przyrostów poprawionych i współrzędnych punktów nawiązania współrzędne punktów poligonowych, kończąc tym samym zadanie obliczenia sieci poligonowej.

Przykład:

Stosując metodę punktów węzłowych dokonać obliczenia sieci poligonowej nawiązanej, pokazanej na rys. 10.3.

Tabela 10.6. Obliczenie azymutów węzłowych

Obliczenie azymutu węzłowego boku 2 - 3										
Droga oblicz. (nr-y ciągów)	Punkt początkowy	Ilość kątów n_{ki}	Waga odcinka $p_{ki}=\frac{10}{n_{ki}}$	Azymut wyjściowy A_o (g c cc)	Suma kątów lewych lub prawych (g c cc)	Nie-wyrównany azymut węzłowy A_n (g c cc)	Iloczyny $(A_n-A_p)p_{ki}$ (cc)	Poprawki $v=A_w-A_n$ (cc)	Iloczyny $p_{ki}\cdot v$	Uwagi, szkice, obliczenia pomocnicze
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I	*B*	*3*	*3,33*	*208 18 99*	L *417 21 80*	2-3 *25 40 79*	*213,12*	*-13,6*	*-45,29*	A_p = 25,4015g
II	*D*	*2*	*5,00*	*289 11 90*	P *463 71 00*	3-2 *225 40 90*	*375,00*	*-24,6*	*-123,00*	
III	*F*	*3*	*3,33*	*341 32 05*	P *515 91 90*	2-3 *25 40 15*	*0*	*+50,4*	*+167,83*	
$m=3$		$[p_{ki}]$= *11,66*		$p_{ki}(m-1)$ = *23,32*		Sumy:	*588,12*	×	*-0,46*	$[pvv]$=*12100,4*
m – ilość dróg obl. A_w			n_{ki} – ilość kątów odcinka	Azymut wyrównany: **$A_{2\text{-}3}$** $A_w=A_p+\frac{[(A_n-A_p)\cdot p_{ki}]}{[p_{ki}]}$ = 25g40c15cc+50,4cc=**25g40c65,4cc**						$\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p](m-1)}}$ m_{1w}= ± 22.8cc

Tabela 10.7. Obliczanie współrzędnych punktów węzłowych

Obliczenie współrzędnych punktu węzłowego: W-2													
Nr-y ciągów	Punkt początkowy	Długość odcinka l	aga odcinka $p_l=\frac{1000}{l}$	Współrzędne punktu wyjściowego X_o	Współrzędne punktu wyjściowego Y_o	Suma przyrostów $[\Delta x]$	Suma przyrostów $[\Delta y]$	Niewyrównane współrzędne X_n X_o $[\Delta x]$	Niewyrównane współrzędne Y_n Y_o $[\Delta y]$	Poprawki v_x X_w-X_n cm	Poprawki v_y Y_w-Y_n cm	Iloczyny pv_x	Iloczyny pv_y
1	2	3	4	5		6	7	8	9	10	11	12	13
I	*B*	*250,85*	*3,99*	*1625,05*	*1844,50*	*-124,78*	*+160,89*	*1500,27*	*2005,39*	*+0,6*	*+1,1*	*+2,4*	*+4,4*
II	*D*	*270,10*	*3,70*	*1733,70*	*2137,35*	*-233,40*	*-131,97*	*1500,30*	*2005,38*	*-2,4*	*+2,1*	*-8,9*	*+7,8*
III	*F*	*248,79*	*4,02*	*1325,30*	*2179,40*	*+174,96*	*-173,97*	*1500,26*	*2005,43*	*+1,6*	*-2,9*	*+6,4*	*-11,7*
$m=3$		$[p_l]$= *11,71*		$p_l(m-1)$ =*23,42*				X_p *5000,01*	Y_p *6979,88*	◀Sumy▶		*-0,1*	*+0,5*

Wyrównane współrzędne punktu węzłowego:

$$X_w=X_p+\frac{[(X_n-X_p)\cdot p_l]}{[p_l]}=\mathbf{1500{,}27_6}$$

$$Y_w=Y_p+\frac{[(Y_n-Y_p)\cdot p_l]}{[p_l]}=\mathbf{2005{,}40_1}$$

Ocena dokładności:

$[pv_xv_x]$=33,04 ; $[pv_yv_y]$=55,15 ; $m_x=\pm\sqrt{\frac{[pv_xv_x]}{[p](m-1)}}=\pm 0{,}012$ m

$m_y=\pm\sqrt{\frac{[pv_yv_y]}{[p](m-1)}}=\pm 0{,}015$ m ; $m_P=\sqrt{m_x^2+m_y^2}=\pm 0{,}019$ m

Szkic sieci:



Tabela 10.8. Obliczenie ciągów poligonowych

Nr ciągu	Nr punktu	Kąty poziome (α- lewe, β- prawe) g c cc	Azymuty A g c cc	Długości boków d	Przyrosty Δx	Δy	Współrzędne X	Y	Nr punktu	Uwagi, szkice
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I	A	α - lewe								
			208 18 99							
	B	-5 175 41 20					1625,05	1844,50	B	
			183 60 14	120,35	+1 -116,38	+30,66				
	1	-4 120 50 10					**1508,68**	**1875,16**	**1**	
			104 10 20	130,50	-8,40	+1 +130,23				
	W-2	-5 121 30 50					**1500,28**	**2005,40**	**2-W**	
			25 40 65	L=250,85						
	3								3	
			f_{kt} +0 14 $f_{kt\,max}$ ±3 12	Σp Σt	-124,78 -124,77	+160,89 +160,90				
	Σp Σt	417 21 80 417 21 66		f_L=0,01₄	f_x=-0,01	f_y=-0,01	$f_{L\,max}$=0,15			
II	C	β - prawe								
			289 11 90							
	D	+12 248 29 70					1733,70	2137,35	D	
			240 82 08	128,90	-1 -103,30	+1 -77,10				
	3	+13 215 41 30					**1630,39**	**2060,26**	**3**	
			225 40 65	141,20	-1 -130,10	+1 -54,87				
	W-2						**1500,28**	**2005,40**	**W-2**	
			f_{kt} -0 25 $f_{kt\,max}$ ±2 54	L=270,10						
	Σp Σt	463 71 00 463 71 25		Σp Σt	-233,40 -233,42	-131,97 -131,95				
				f_L=0,03	f_x=+0,02	f_y=-0,02	$f_{L\,max}$=0,15			
III	E	β - prawe								
			341 32 05							
	F	-17 200 30 80					1325,30	2179,40	F	
			341 01 42	110,54	+1 66,39	-2 -88,38				
	4	-16 183 51 40					**1391,70**	**2091,00**	**4**	
			357 50 18	138,25	+1 108,57	-1 -85,59				
	W-2	-17 132 09 70					**1500,28**	**2005,40**	**W-2**	
			25 40 65	L= 248,79						
	3									
			f_{kt} +0 50 $f_{kt\,max}$ 3 12	Σp Σt	+174,96 +174,98	-173,97 -174,00				
	Σp Σt	515 91 90 515 91 40		f_L=0,04	f_x=-0,02	f_y=+0,03	$f_{L\,max}$=0.15			

10.4. Podstawy wyrównania ścisłego osnów poziomych

Wyrównanie ścisłe sieci geodezyjnych, zawierających spostrzeżenia nadliczbowe, polega na takim poprawieniu wyników pomiarów, aby doprowadzić je do matematycznej zgodności oraz wyznaczyć najbardziej prawdopodobne wartości niewiadomych, którymi są współrzędne lub wysokości punktów wyrównywanej sieci. Do wyrównania ścisłego stosujemy jedną z dwu równorzędnych metod: pośredniczącą lub warunkową. W przypadku wyrównania metodą warunkową doprowadza się obserwacje do ścisłego spełnienia równań matematycznych (warunków) wiążących ze sobą wartości wyrównane spostrzeżeń. W wyniku wyrównania przeprowadzonego metodą pośredniczącą nastąpi spełnienie związków funkcyjnych, zachodzących pomiędzy obserwacjami wyrównanymi a niewiadomymi. Wyrównanie oparte jest na sformułowanej przez C. F. Gaussa zasadzie najmniejszej sumy kwadratów poprawek v (błędów pozornych), która przybiera postać warunku:

- $[vv]$ = minimum – dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych,
- $[pvv]$ = minimum lub $\left[\frac{vv}{mm}\right] = \min$. – dla spostrzeżeń niejednakowo dokładnych.

Biorąc pod uwagę omówione wcześniej zagadnienia z zakresu zakładania, pomiaru i obliczenia nawiązanych osnów geodezyjnych, należy stwierdzić, że ich wyrównanie jest obecnie przeprowadzane z reguły metodą pośredniczącą przy użyciu komputerowej techniki obliczeniowej, z wykorzystaniem specjalistycznego oprogramowania np. programu *GEONET*, którego krótką charakterystykę podano w ust. 10.6. Przebieg wyrównania n obserwacji dla u niewiadomych, którymi w przypadku osnowy poziomej są z reguły współrzędne X, Y punktów wyznaczanych, zaś dla osnowy wysokościowej – wysokości H tych punktów, został omówiony w rozdziale 7.

W sieciach osnowy poziomej wielkościami mierzonymi są kierunki lub kąty oraz długości boków. Równania poprawek tych obserwacji wyznaczamy w oparciu o podane wcześniej wzory: (2.7) (2.7 a), (2.10), wymagające obliczenia na podstawie współrzędnych przybliżonych współczynników kierunkowych A_i, B_i wg wzoru (2.5) lub sin φ, cos φ. W sieciach kątowo-liniowych występują obserwacje niejednorodne: kąty i długości, toteż ich równania błędów przed ułożeniem równań normalnych muszą być zrównoważone poprzez obustronne podzielenie poszczególnych wyjściowych równań błędów przez średnie błędy spostrzeżeń.

10.5. Wyrównanie ścisłe osnów wysokościowych

10.5.1. Wyrównanie osnów wysokościowych metodą pośredniczącą

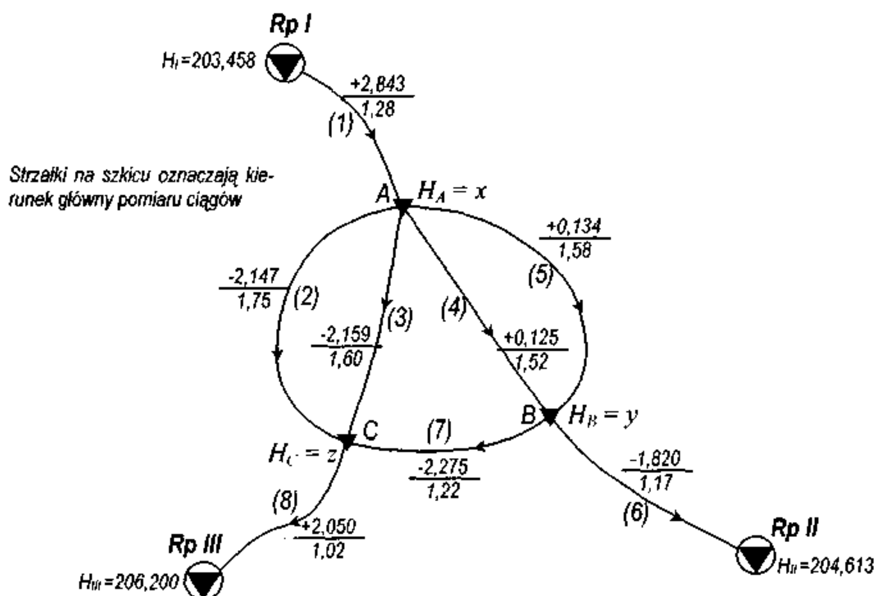
Wyrównanie ścisłe sieci niwelacyjnych osnowy szczegółowej wykonuje się metodami: pośredniczącą lub warunkową przy założeniu bezbłędności punktów nawiązania, należących do wyższych klas. Stosowanie metody warunkowej będzie celowe wtedy, gdy liczba warunków (spostrzeżeń nadliczbowych) r jest mniejsza od ilości niewiadomych u. Liczba koniecznych do rozwiązania równań normalnych w metodzie warunkowej jest równa r, natomiast w metodzie pośredniczącej – u. Podany tu czynnik wyboru metody wyrównania nie ma obecnie tak istotnego znaczenia jak niegdyś, ponieważ współcześnie obliczenia wykonywane są przeważnie metodą pośredniczącą przy wykorzystaniu techniki komputerowej.

Podczas wyrównania sieci niwelacyjnych *metodą pośredniczącą* rolę obserwacji spełniają różnice wysokości w ciągach niwelacyjnych, niewiadomymi są wysokości punktów wyznaczanych, zaś jako wagi spostrzeżeń przyjmuje się przeważnie odwrotności długości ciągów niwelacyjnych, wyrażone w kilometrach.

Przebieg czynności wstępnych związanych z wyrównaniem został w skrócie przedstawiony na przykładzie sieci niwelacyjnej zilustrowanej na rys. 10.4.

Przykład:

1. Zestawienie ilości elementów wyjściowych i wybór niewiadomych:
   $n = 8, \quad u = 3, \quad r = n_n = 5 \quad ; \quad H_A = x, \quad H_B = y, \quad H_C = z.$
2. Obliczenie przybliżonych wartości niewiadomych:
   $x_0 = H_I + h_1 = 203{,}458 + 2{,}843 = 206{,}301$ m
   $y_0 = H_{II} - h_6 = 204{,}613 - (-1{,}820) = 206{,}433$ m
   $z_0 = H_{III} - h_8 = 206{,}200 - 2{,}050 = 204{,}150$ m.



Rys. 10.4. Szkic trójwęzłowej sieci niwelacyjnej nawiązanej trzypunktowo

3. Zestawienie równań obserwacyjnych, wag spostrzeżeń i obliczenie wyrazów wolnych równań błędów (w mm):

$h_1 + v_1 = x - H_I$	$p_1 = 0{,}78$	$l_1 = x_0 - H_I - h_1 = 0$
$h_2 + v_2 = z - x$	$p_2 = 0{,}57$	$l_2 = z_0 - x_0 - h_2 = -4$
$h_3 + v_3 = z - x$	$p_3 = 0{,}62$	$l_3 = z_0 - x_0 - h_3 = +8$
$h_4 + v_4 = y - x$	$p_4 = 0{,}66$	$l_4 = y_0 - x_0 - h_4 = +7$
$h_5 + v_5 = y - x$	$p_5 = 0{,}63$	$l_5 = y_0 - x_0 - h_5 = -2$
$h_6 + v_6 = H_{II} - y$	$p_6 = 0{,}85$	$l_6 = H_{II} - y_0 - h_6 = 0$
$h_7 + v_7 = z - y$	$p_7 = 0{,}82$	$l_7 = z_0 - y_0 - h_7 = -8$
$h_8 + v_8 = H_{III} - z$	$p_8 = 0{,}98$	$l_8 = H_{III} - z_0 - h_8 = 0$

4. Zestawienie równań błędów:
   Równania błędów w postaci algebraicznej i tabelarycznej:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= dx \\
v_2 &= -dx + dz - 4 \\
v_3 &= -dx + dz + 8 \\
v_4 &= -dx + dy + 7 \\
v_5 &= -dx + dy - 2 \\
v_6 &= -dy \\
v_7 &= -dy + dz - 8 \\
v_8 &= -dz
\end{aligned}
$$

n	*a*	*b*	*c*	*l*	*s*	*p*
1	+1	•	•	0	+1	0,78
2	-1	•	+1	-4	-4	0,57
3	-1	•	+1	+8	+8	0,62
4	-1	+1	•	+7	+7	0,66
5	-1	+1	•	-2	-2	0,63
6	•	-1	•	0	-1	0,85
7	•	-1	+1	-8	-8	0,82
8	•	•	-1	0	-1	0,98
Σ	-3	0	+2	+1	0	5,91

5. Zestawienie układu równań normalnych:

Ozn.	*a*]	*b*]	*c*]	*l*]	*s*]
[*pa*	+3,26	-1,29	-1,19	-6,04	-5,26
[*pb*	-1,29	+2,96	-0,82	+9,92	10,77
[*pc*	-1,19	-0,82	+2,99	-3,88	-2,90
[*pl*	-6,04	+9,92	-3,88	136,14	136,14
[*ps*	-5,26	10,77	-2,90	136,14	138,75

6. Obliczenie niewiadomych: dx, dy, dz w wyniku rozwiązania układu równań normalnych:
   dx = +1,29 mm; dy = -2,47 mm; dz = +1,13 mm.
   Kontrola rozwiązania przez podstawienie niewiadomych do równania sumowego:
   $0{,}78 \cdot 1{,}29 + 0{,}85 \cdot (-2{,}47) + 0{,}98 \cdot 1{,}13 + 0 = 0{,}014 \approx 0$

   Obliczenie wyrównanych wysokości punktów węzłowych sieci niwelacyjnej:
   $x = H_A = x_0 + dx = 206{,}301 + 0{,}00129 = 206{,}30229$ m
   $y = H_B = y_0 + dy = 206{,}433 - 0{,}00247 = 206{,}43053$ m
   $z = H_C = z_0 + dz = 204{,}150 + 0{,}00113 = 204{,}15113$ m

7. Obliczenie poprawek v, wyrównanie różnic wysokości h, kontrola generalna:

Nr *n*	p_i wagi	*h* [m] pomierzone	*v* [mm] poprawka	*h* [m] wyrównane	$L_i+v_i= =F_i(x,y,z)$
1	0,78	+2,843	+1,3	+2,8443	+2,8443
2	0,57	-2,147	-4,2	-2,1512	-2,1512
3	0,62	-2,159	+7,8	-2,1512	-2,1512
4	0,66	+0,125	+3,3	+0,1283	+0,1282
5	0,63	+0,134	-5,7	+0,1283	+0,1282
6	0,85	-1,820	+2,5	-1,8175	-1,8175
7	0,82	-2,275	-4,4	-2,2794	-2,2794
8	0,98	+2,050	-1,1	+2,0489	+2,0489

8. Kontrola ogólna, ocena dokładności:
   $[pvv] = 99{,}12$
   $[pal]dx + [pbl]dy + [pcl]dz + [pll] = -6{,}04 \cdot 1{,}29 + 9{,}92 \cdot (-2{,}47) - 3{,}88 \cdot 1{,}13 + 136{,}14 =$
   $= 99{,}46$
   Współczynniki wagowe: $Q_{11}=0{,}546$; $Q_{12}=0{,}323$; $Q_{13}=0{,}306$; $Q_{22}=0{,}556$; $Q_{23}=0{,}281$; $Q_{33}=0{,}533$.

   Średni błąd niwelacji na 1 km: $m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} = \pm 4{,}45$ mm

   Średnie błędy niewiadomych: $m_x = \pm 3{,}3$ mm; $m_y = \pm 3{,}3$ mm; $m_z = \pm 3{,}2$ mm.

10.5.2. Wyrównanie osnów wysokościowych metodą warunkową

Układanie warunków w sieciach niwelacyjnych nie nastręcza dużych trudności, toteż do ich wyrównania metoda spostrzeżeń zawarunkowanych jest wykorzystywana dość często. Ma to miejsce szczególnie wtedy, gdy metoda ta prowadzi do mniejszej liczby równań normalnych niż metoda pośrednicząca. W ramach procesu wyrównania rolę spostrzeżeń niejednakowo dokładnych odgrywają różnice wysokości (spady) w poszczególnych ciągach niwelacyjnych, a więc ilość spostrzeżeń n podlegających wyrównaniu jest równa liczbie c ciągów sieci, zaś ilość niewiadomych u odpowiada liczbie szukanych punktów p, dla których należy wyznaczyć wysokość. Liczba niezależnych warunków r wynosi więc: $c - p$. Zgodnie z założeniami podanymi w ust. 7.7 metoda warunkowa jest korzystniejsza w przypadku, gdy $r < u$, a więc po uwzględnieniu powyższych oznaczeń dla: $c - p < p$. Można więc napisać:

$$c < 2p \tag{10.20}$$

Z nierówności (10.20) wynika, że z punktu widzenia kryterium ilości równań normalnych, wybór metody warunkowej do wyrównania ścisłego sieci niwelacyjnej nastąpi wtedy, gdy liczba ciągów sieci – c jest mniejsza od podwojonej liczby punktów wyznaczanych – $2p$. Dla $c = 2p$ wybór jest obojętny, natomiast gdy: $c > 2p$, należy do wyrównania wykorzystać metodę pośredniczącą. W tym ostatnim przypadku mamy do czynienia z sieciami niwelacyjnymi „mocno związanymi", czyli, ze względu na dokładność, lepiej skonstruowanymi.

W sieciach niwelacyjnych mamy do czynienia z warunkami dwojakiego rodzaju. Są to:

1. *Warunki oczek zamkniętych* (zamkniętych poligonów niwelacyjnych): suma wyrównanych spadów w zamkniętym poligonie niwelacyjnym jest równa zero:

$$[h + v] = 0 \tag{10.21}$$

2. *Warunki poligonów otwartych*, wynikające ze znanych wysokości punktów nawiązania sieci, przyjmowanych jako bezbłędne: Suma wyrównanych różnic wysokości w ciągach zawartych pomiędzy dwoma znanymi reperami: początkowym – R_P, i końcowym – R_K jest równa różnicy wysokości tych reperów:

$$[h + v] = H_{R_K} - H_{R_P} \tag{10.22}$$

Ilości warunków obliczymy na podstawie wzorów:

Ilość wszystkich warunków: $r = c - p$ (10.23)

Ilość warunków oczek zamkniętych: $r_1 = c - P + 1$ (10.24)

Ilość warunków poligonów otwartych: $r_2 = R - 1$ (10.25)

Kontrola: $r = r_1 + r_2$ (10.26)

Oznaczenia: P – ilość wszystkich punktów sieci, czyli $P = p + R$;
R – ilość znanych reperów danej sieci.

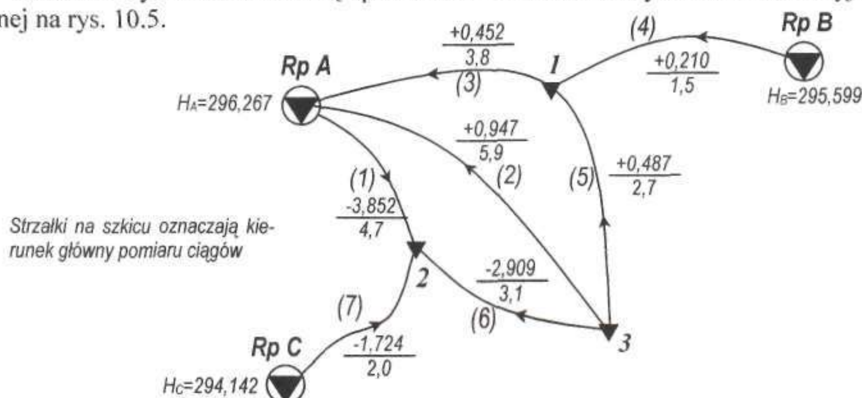
Dla ustalenia w równaniach warunkowych znaków różnic wysokości i ich poprawek podczas układania powyższych warunków należy przyjąć kierunek od – do, określający następstwo zapisu ciągów w równaniach. Jeśli kierunek układania warunku jest zgodny ze strzałką ciągu na szkicu sieci, wskazującą główny kierunek pomiaru, to znak różnicy wysokości ciągu pozostaje w równaniu bez zmian, zaś przy niezgodności wspomnianych kierunków – znak różnicy wysokości należy zmienić na przeciwny.

Niekiedy dla uniknięcia znaków plus lub minus przy wartościach spadów strzałka na szkicach sieci niwelacyjnych oznacza kierunek spadku terenu („spływu wody"), który w tym wypadku wskazuje na punkt położony niżej. Wynika stąd, że wyjściowe różnice wysokości ciągów nie są wówczas opatrzone znakami. W myśl reguł wyrażonych wzorami (10.21), (10.22) w równaniach warunkowych przyjmujemy wówczas znak minus dla wartości spadów i ich poprawek wykazujących zgodność kierunków: układania warunku i strzałek na szkicu oraz znak plus, gdy kierunki zestawiania równań i na szkicu są przeciwne.

Wagi ciągów niwelacyjnych potrzebne do zróżnicowania dokładności są najczęściej przyjmowane jako odwrotności długości ciągów wyrażonych w kilometrach. Nie ma jednak potrzeby ich obliczania, ponieważ w metodzie warunkowej do określania współczynników równań normalnych i równań poprawek wyrażonych przez korelaty potrzebne są odwrotności wag, którymi są dane długości ciągów niwelacyjnych.

Przykład:

Dokonać wyrównania metodą spostrzeżeń zawarunkowanych sieci niwelacyjnej, pokazanej na rys. 10.5.



Rys. 10.5. Szkic sieci niwelacyjnej nawiązanej trójpunktowo z trzema punktami wyznaczanymi

1. Określenie ilości warunków:

   Ilość wszystkich warunków: $r = c - p = 7 - 3 = 4$

   Ilość warunków oczek zamkniętych: $r_1 = c - P + 1 = 7 - 6 = 1 = 2$

   Ilość warunków poligonów otwartych: $r_2 = R - 1 = 3 - 1 = 2$

   Kontrola: $r = r_1 + r_2 = 2 + 2 = 4$

2. Zestawienie równań warunkowych:

$$-L_1-v_1-L_2-v_2+L_6+v_6=0$$
$$L_2+v_2-L_3-v_3-L_5-v_5=0$$
$$L_1+v_1-L_7-v_7=H_C-H_A$$
$$-L_3-v_3-L_4-v_4=H_B-H_A$$

3. Obliczenie odchyłek:

$\omega_a=-L_1-L_2+L_6=$ −4 mm

$\omega_b=L_2-L_3-L_5=$ +8 mm

$\omega_c=L_1-L_7+H_A-H_C=$ − 3 mm

$\omega_d=-L_3-L_4+H_A-H_B=$ +6 mm

4. Równania odchyłek:

Ozn.	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	ω	s
a	-1	-1	•	•	•	+1	•	-4	-5
b	•	+1	-1	•	-1	•	•	+8	+7
c	+1	•	•	•	•	•	-1	-3	-3
d	•	•	-1	-1	•	•	•	+6	+4
Σ	0	0	-2	-1	-1	+1	-1	+7	+3
$1:p$	4,7	5,9	3,8	0	2,7	3,1	2,0	×	×

5. Zestawienie równań normalnych korelat:

Ozn.	$a]$	$b]$	$c]$	$d]$	ω	s
$\left[\frac{a}{p}\right.$	+13,7	-5,9	-4,7	•	-4	-0,9
$\left[\frac{b}{p}\right.$	-5,9	+12,4	•	+3,8	+8	+18,3
$\left[\frac{c}{p}\right.$	-4,7	•	+6,7	•	-3	-1,0
$\left[\frac{d}{p}\right.$	•	+3,8		+5,3	+6	+15,1
Σ	+3,1	+10,3	+2,0	+9,1	+7,0	+31,5

6. Rozwiązanie równań normalnych korelat:

$k_a=+0{,}5657$ $k_b=-0{,}0373$ $k_c=-0{,}8446$ $k_d=-1{,}1053$

7. Zestawienie równań poprawek wyrażonych przez korelaty i obliczenie poprawek:

Ozn.	$1:p$	k_a=+0,5657	k_b=-0,0373	k_c=+0,8446	k_d=-1,1053	v
v_1	4,7	-4,7	•	+4,7	•	+1,31
v_2	5,9	-5,9	+5,9	•	•	-3,55
v_3	3,6	•	-3,6	•	-3,6	+4,34
v_4	1,5	•	•	•	+1,5	+1,66
v_5	2,7	•	-2,7	•	•	+0,10
v_6	3,1	+3,1	•	•	•	+1,75
v_7	2,0	•	•	-2,0	•	-1,69

$[pvv]=11{,}73$

8. Kontrola ogólna:

$[pvv]=-[\omega\cdot k]=11{,}73$

9. Spostrzeżenia wyrównane :
$L_1 + v_1 = -3{,}852 + 0{,}0013 = -3{,}8507$ m
$L_2 + v_2 = +0{,}947 - 0{,}0036 = +0{,}9434$ m
$L_3 + v_3 = +0{,}452 + 0{,}0043 = +0{,}4563$ m
$L_4 + v_4 = +0{,}210 + 0{,}0017 = +0{,}2117$ m
$L_5 + v_5 = +0{,}487 + 0{,}0001 = +0{,}4871$ m
$L_6 + v_6 = -2{,}909 + 0{,}0018 = -2{,}9072$ m
$L_7 + v_7 = -1{,}724 - 0{,}0017 = -1{,}7257$ m

10. Kontrola generalna:
$-L_1-v_1-L_2-v_2+L_6+v_6 = +3{,}8507 - 0{,}9434 - 2{,}9072 = 0{,}0001 \approx 0$
$L_2+v_2-L_3-v_3-L_5-v_5 = +0{,}9434 - 0{,}4563 - 0{,}4871 = 0$
$L_1+v_1-L_7-v_7 - H_C + H_A = -3{,}8507 + 1{,}7257 - 294{,}142 + 296{,}267 = 0$
$-L_3-v_3-L_4-v_4 - H_B + H_A = -0{,}4563 - 0{,}2117 - 295{,}599 + 296{,}267 = 0$

11. Obliczenie średniego błędu typowego spostrzeżenia, (błędu niwelacji na 1 km):
$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{11{,}73}{4}} = \pm 1{,}7 \text{ mm}$$

10.6. Ogólne informacje o programie GEONET® (na podstawie instrukcji programu)

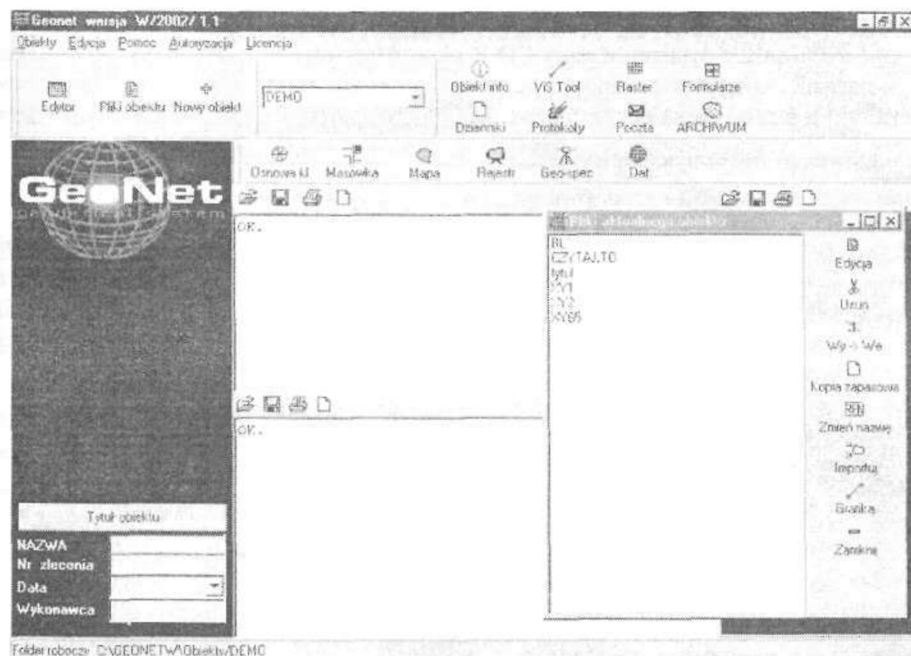
10.6.1. Zastosowania programu

Do obliczenia osnów geodezyjnych, a zwłaszcza dużych sieci, wykorzystuje się obecnie specjalistyczne programy komputerowe, spośród których na szczególną uwagę zasługuje pakiet programów geodezyjnych „*GEONET*", opracowany przez prof. Romana Kadaja. Poprzednia wersja tego programu (H/96) działała w systemie operacyjnym DOS, zaś wersja aktualna *GEONET W/2001* pracuje pod kontrolą systemu operacyjnego Windows ('95, '98, '2000, NT) i została wyposażona w wygodne okna dialogowe (rys. *10.6*). Przed instalacją należy uwzględnić fakt, że sam system zajmuje około 30 MB pamięci dyskowej, zaś jeszcze należy przewidzieć wolny obszar przeznaczony na dane użytkownika. Oprócz podstawowego pakietu programów *GEONET W/2001* dostępny jest również drugi zintegrowany z nim pakiet *GEONET_unitrans* przeznaczony do transformacji licznych układów współrzędnych, które były, bądź aktualnie są stosowane w ramach prac geodezyjno-kartograficznych na terenie Polski. System posiada własny edytor tekstowy i przeglądarkę graficzną (moduł *ViS Tool* w.1.0). System składa się z kilkudziesięciu programów realizujących różne zadania geodezyjne.

Dane wyjściowe dla programu stanowią pliki tekstowe o formacie swobodnym (ASCII), w tym również pliki uzyskane z rejestratorów automatycznych instrumentów typu *total station* lub niwelatorów cyfrowych. Program działa w trybie wsadowym przekształcając wejściowe zbiory danych w pliki wynikowe. Wszelkie obliczenia są wykonywane na plikach zlokalizowanych w obiekcie aktywnym (aktualnym). Obiektem aktywnym jest wybrany podkatalog katalogu OBIEKTY. Pliki (protokoły) wynikowe są tworzone w tym samym obiekcie i mają postać plików tekstowych (ASCII).

Jednym z podstawowych zadań realizowanych przez system *GEONET* jest wyrównanie ścisłe sieci podstawowych, szczegółowych osnów geodezyjnych i realizacyjnych

dowolnych wielkości (zawierających nawet do kilkudziesięciu tysięcy punktów), rodzajów i klas, obejmujące również sieci zakładane techniką GPS. W procesie wyrównania w pierwszej kolejności następuje automatyczne i niezawodne wyznaczenie współrzędnych przybliżonych, a następnie wyrównanie ścisłe oraz rozszerzona analiza dokładności i niezawodności sieci.



Rys. 10.6. Okno wejściowe programu

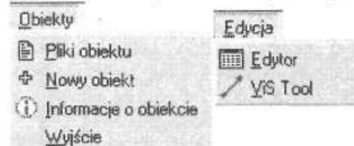
Drugim istotnym zadaniem systemu *GEONET* jest opracowanie danych obserwacyjnych (dotyczących osnowy pomiarowej i pikiet), wykorzystywanych do wykonania numerycznej i graficznej mapy sytuacyjno-wysokościowej, określanych przez autora programu terminem „masówka". Zbiory danych ulegają przetworzeniu połączonym wyodrębnieniem i ścisłym, jednorzędowym wyrównaniem osnowy pomiarowej, której struktura jest automatycznie rozpoznawana w plikach „masówki". Wykrywane są przy tym błędy grube. Dodatkowo po wykonaniu opracowania każda pikieta, obok współrzędnych i kodu, jest charakteryzowana indywidualnym błędem położenia w płaszczyźnie poziomej i wysokości. Przy pomocy programu *GEONET* można dokonać ponownego opracowania map na podstawie zbiorów archiwalnych tj. dawnych dzienników, szkiców i zarysów pomiarowych. Zostają wówczas wyodrębnione i wyrównane jednorzędowo osnowy oparte na ciągach sytuacyjnych i wielorzędowych układach linii pomiarowych.

Innymi zadaniami wykonywanymi przez *GEONET* są:

- wyodrębnienie warstw tematycznych map,
- badanie topologii układów linii granicznych i działek,
- automatyczna interpolacja warstwic w oparciu o pikiety topograficzne,
- obliczanie powierzchni zredukowanych na płaszczyznę odwzorowania,

- transformacje: Helmerta (konforemna) i afiniczna,
- analityczna ortogonalizacja budynków z wyznaczeniem współrzędnych brakujących narożników,
- obliczanie objętości mas ziemnych,
- typowe zadania z rachunku współrzędnych: azymuty i długości, domiary, ciągi, wcięcia, przecięcia itp.

Po instalacji systemu z płyty CD-R okno wejściowe programu (rys. 10.6) otwiera się po naciśnięciu wyprowadzonej na pulpit ikony *Geonet.exe* . W oknie tym u góry ekranu pod paskiem z nazwą **Geonet wersja ...** widoczna jest listwa menu głównego zawierająca opisy: Obiekty Edycja Pomoc Autoryzacja Licencja.



Rys. 10.7. Rozwinięcia menu „Obiekty" i „Edycja"

Po rozwinięciu menu „Obiekty" widoczne są opcje (Pliki obiektu, Nowy obiekt, Informacje o obiekcie, Wyjście), które występują także w formie przycisków z ikonkami i opisami na listwie znajdującej się poniżej paska menu głównego. W rozwinięciu menu „Edycja" obecne są dwie opcje: Edytor i ViS Tool.

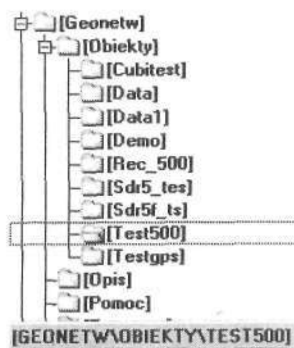
Między wymienionymi pozycjami menu widoczna jest lista obiektów np. Głogoczów pokazująca aktywny obiekt i umożliwiająca jego zmianę poprzez wybór istniejącego obiektu z rozwijalnej listy lub założenie nowego po naciśnięciu przycisku Nowy obiekt.

10.6.2. Moduły funkcjonalne systemu GEONET

Moduły funkcjonalne systemu są pogrupowanymi tematycznie zbiorami zadań, odpowiadających nazwom umieszczonym na listwie menu w oknie głównym. Podział na moduły ma charakter umowny, służący jedynie celom porządkowym i dydaktycznym. W rzeczywistości zadania różnych modułów mogą tworzyć wzajemne związki technologiczne. W systemie GEONET występują następujące moduły:

1. Osnowa kl. - Moduł obliczeniowy OSNOWY (obejmuje podstawowe zadania obliczeniowo-wyrównawcze sieci geodezyjnych, poziomych i wysokościowych, programy łączenia i sortowania zbiorów współrzędnych oraz prezentację szkicu sieci.
2. Masówka - Moduł obliczeniowy MASÓWKI obejmuje obliczenia masówki biegunowej tj. (tachimetrii), masówki ortogonalnej (np. w oparciu o dane archiwalne), sortowania wykazów współrzędnych, automatyczną interpolację warstwic, badanie topologii i obliczanie powierzchni działek, zagadnienia tzw. ortogonalizacji budynków w zbiorach numerycznych, graficzne prezentacje zbiorów punktów.
3. Mapa - Moduł MAPY przewidziany docelowo jako łącznik do zewnętrznych edytorów graficznych.
4. Rejestr - Moduł REJESTRATORÓW obejmuje programy konwersji oryginalnych plików rejestratorów polowych dla różnych formatów firmowych.

5. - Moduł obliczeń SPECJALNYCH obejmuje transformacje płaskie i trójwymiarowe, zagadnienia specjalne dotyczące sieci geodezyjnych: wyrównanie sieci trójwymiarowej, wstępne analizy dokładności sieci, analiza przemieszczeń w sieciach pionowych, poziomych i trójwymiarowych, obliczenia prostych konstrukcji geodezyjnych, przygotowanie danych do tyczenia.
6. - Moduł zadań DEFINIOWANYCH dla celów specjalnych (m.in. zagadnienia obliczeniowe dotyczące osnów górniczych.
7. - Moduł DIAGNOSTYCZNY wykazów współrzędnych zawiera programy porównywania zbiorów.
8. - Moduł GPS obejmuje programy obliczeniowe sieci GPS, w tym programy pomocnicze umożliwiające tworzenie na podstawie wektorów GPS, miar pseudoobserwacji (długości, azymutów, kierunków), które mogą być dołączone do obserwacji klasycznych w wyrównaniu sieci poziomych.
9. - Moduł UKŁADÓW WSPÓŁRZĘDNYCH obejmuje podsystem *GEONET_unitrans* występujący także w dystrybucji jako niezależny pakiet programów. Programy tego modułu umożliwiają przeliczenia współrzędnych pomiędzy różnymi układami państwowymi lub lokalnymi. Do modułu mogą być dołączone specjalne programy konwersji map wektorowych zapisanych w plikach **dwg* (AutoCad) lub **dgn* (MicroStation).
10. - Moduł GEOIDY zawiera programy współpracujące z numerycznym modelem polskiej geoidy niwelacyjnej, umożliwiając obliczanie niwelacji satelitarnej wykonanej przy wykorzystaniu pomiarów GPS. Programy alternatywne umożliwiają transformowanie wysokości elipsoidalnych na normalne (lub odwrotnie) poprzez lokalną aproksymację geoidy (quasi-geoidy) w oparciu o punkty dostosowania pozyskane z niwelacji.
11. - Moduł INSPEKTOR jest przeznaczony do automatycznej kontroli poprawności opracowań.
12. Moduł obsługi WEJŚCIA /WYJŚCIA. Oprócz ogólnych narzędzi edycyjnych (tekstowych i graficznych) wbudowanych w interfejs systemu *GEONET* do modułu zaliczamy procedury o następujących nazwach zewnętrznych: FORMULARZE – edytor standardowych plików wejściowych w postaci sformatowanej dla systemu *GEONET*, DZIENNIKI – sformatowane pliki wejściowe, PROTOKOŁY – obsługa protokołów wynikowych. Ponadto moduł uzupełnia łącznik WORD umożliwiający bezpośrednie wejście do popularnego edytora tekstu Ms Word.



Rys. 10.8. Drzewo podkatalogów katalogu „Obiekty"

13. Inne moduły lub programy, które mogą być uwidocznione na górnej, prawej listwie menu, są aktualnie w fazie projektowej. W przygotowaniu znajdują się moduły ARCHIWUM (BANK) umożliwiający archiwizację gotowych obiektów oraz moduł obsługi rastrów RASTER.

Wszelkie obliczenia są wykonywane i zapisywane w protokołach tworzących pliki tekstowe zlokalizowane w obiekcie roboczym, czyli aktywnym (ustawionym w oknie głównym). Obiektem aktywnym jest zawsze podkatalog katalogu „Obiekty" (rys. 10.8). System GEONET w/2001/1.0 działa, podobnie jak poprzednia wersja GEONET-H, w trybie wsadowym. Zbiory wejściowe dla realizowanych programów mają ściśle określone nazwy standardowe i są opisane w oknach poszczególnych zadań. Pliki aktualnie ustawionego obiektu (rys. 10.9) wyświetlane są po naciśnięciu na pasku menu kursorem myszki przycisku [Pliki obiektu].



Rys. 10.9. Lista plików aktywnego obiektu

W grupie "Pliki obiektu" występują etykiety edycyjne o nazwach: "układ", "skala", "limbus", "dalmierz", odpowiadające nazwom plików parametrowych tworzonych wewnątrz aktywnego obiektu. Podczas dokonywania zmian najpierw zaznaczamy plik, a następnie określamy opcję zadania np. „Edycja", „Usuń", „Zamiana zbioru wynikowego na zbiór wejściowy" (tylko w programie GEONET_unitrans), „Kopia zapasowa" (kopiuje plik uzupełniając nazwę oryginalną o dopisek: KOPIA), „Zmień nazwę", „Importuj", „Grafika" (edytor Vis-Tool), „Zamknij". Opcja „Edycja" prowadzi do uruchomienia zaznaczonego pliku w formie notatnika.

Edytor graficzny *Vis-Tool* posiada szereg funkcji umożliwiających: redagowanie szkicu sieci lub masówki na kilku warstwach, nanoszenie punktów dodatkowych i napisów, pomiar odległości i azymutów, podział obszaru na sekcje dla zadanej skali i globalnego początku, automatyczne szukanie punktów, plotowanie, drukowanie lub zapis rysunku wektorowego do pliku, tworzenie kartometrycznych wydruków wybranych fragmentów na drukarce.

W systemie GEONET na proces obliczeniowy sieci geodezyjnych (poziomych, wysokościowych), złożonych wyłącznie z obserwacji klasycznych, składają się następujące zadania:

1) wstępna kontrola wsadowych zbiorów obserwacyjnych sieci lub automatyczne tworzenie takich zbiorów w oparciu o zbiory masówki (biegunowej, ortogonalnej),
2) obliczenie współrzędnych przybliżonych,
3) ścisłe wyrównanie sieci poziomej metodą najmniejszych kwadratów,
4) obliczenia niwelacji trygonometrycznej,
5) ścisłe wyrównanie sieci niwelacyjnej,
6) łączenie i sortowanie zbiorów wynikowych osnowy poziomej i wysokościowej,
7) sortowanie zbioru punktów na arkusze sekcyjne.

Etapami obliczenia osnowy realizowanymi przez program w osobnych oknach są:
1) wstępna kontrola sieci,

2) obliczenie współrzędnych przybliżonych punktów wyznaczanych,
3) wyrównanie ścisłe sieci osnowy.

W ramach kontroli wstępnej program analizuje automatycznie strukturę sieci na podstawie zadanych zbiorów obserwacyjnych (kątów, długości, kierunków, azymutów-kątów kierunkowych) oraz punktów nawiązania i tworzy odpowiedni protokół. Po wyborze odpowiedniej opcji program sprawdza zbiory obserwacji masowych (biegunowych, ortogonalnych) i pobiera z nich potrzebne miary dla wyznaczenia osnowy. To ostatnie zadanie jest typowe dla technologii tzw. *sieci modularnych*, gdzie osnowę pomiarową zakłada się równocześnie z pomiarem sytuacyjno-wysokościowym. Do tego celu mogą być wykorzystane dane modułów ortogonalnych pochodzących z archiwaliów takich jak szkice lub zarysy pomiarowe. Program odszukuje automatycznie dane tworzące osnowę pomiarową (ciągi sytuacyjne i związki liniowe) oraz przygotowuje je do ścisłego wyrównania w całości (jednorzędowo).

Obliczenie współrzędnych przybliżonych dla punktów złożonej i dużej sieci osnowy poziomej jest jednym z trudniejszych zadań obliczeń geodezyjnych. Trudność ta wynika między innymi z ogólnej dowolności geometrycznej struktur sieci. W programie zastosowano ideę obliczeniową sieci modularnych, opartą na analogii stosowanej w aerotriangulacji. Pojedynczym modułem jest zbiór obserwacji przyporządkowanych do pojedynczego stanowiska obserwacyjnego. Moduły określone najpierw w indywidualnych układach lokalnych są transformowane równocześnie do układu zewnętrznego (stosuje się przy tym warunki na punkty wiążące – łączne dla par modułów). Metoda, przy założeniu pewnych numerycznych modyfikacji okazuje się bardzo skuteczna i szybka, nawet dla sieci o kilku tysiącach punktów. W istotnym zakresie metoda ta decyduje o automatyzacji całego procesu obliczenia osnowy i masówki.

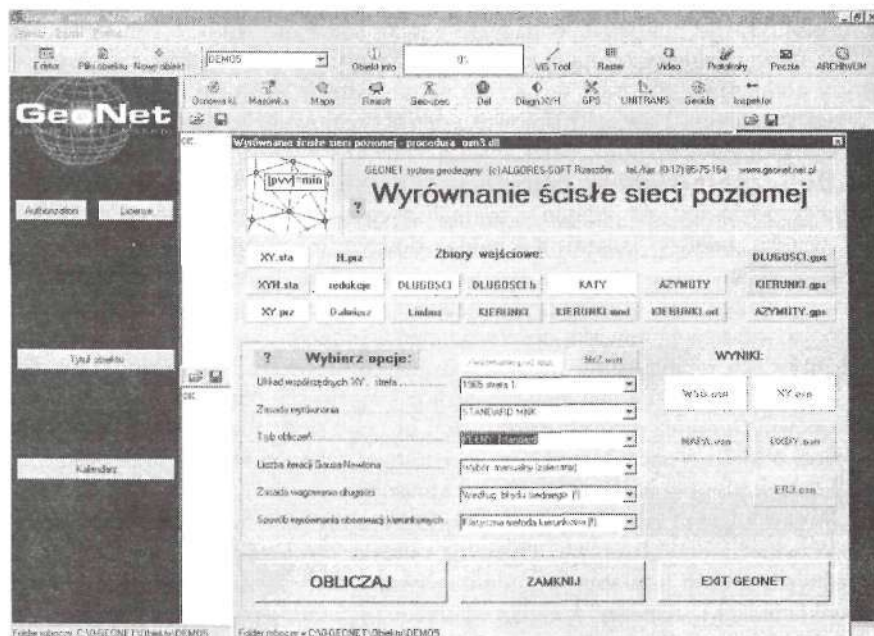
Wyrównanie ścisłe (rys. 10.10) jest realizowane bezpośrednio po wyznaczeniu współrzędnych przybliżonych. Operator określa opcje takie jak np. wybór układu współrzędnych, sposób ustalania wag dla obserwacji, tryb obliczeń: kontrolny lub z pełną analizą dokładności i „naciska" klawisz wykonania [Obliczaj]. W trakcie realizacji programu są automatycznie wprowadzane redukcje odwzorowawcze obserwacji oraz redukcje długości na określoną elipsoidę.

W celach kontrolnych program ma możliwość wyrównywania tylko zdefiniowanych fragmentów sieci (podsieci), zastosowania tzw. *estymacji mocnej* do wykrywania błędów w obserwacjach. Opcjonalnie można też realizować wyrównanie sieci z założeniem błędności wybranych lub wszystkich punktów nawiązania. Ten sam program stosuje się też do wyrównania dwuwymiarowych sieci zintegrowanych. Do zbiorów obserwacji klasycznych zostają wówczas włączone pseudo-obserwacje utworzone z wektorów GPS. W wersji dystrybucyjnej programu maksymalne liczebności zbiorów mogą być następujące:10 000 punktów, 50 000 długości, 200 000 obserwacji kątowych lub kierunkowych. Dla celów specjalnych powyższe ograniczenia mogą ulec zmianie.

Program niwelacji trygonometrycznej tworzy zbiór różnic wysokości pomiędzy punktami mierzonej osnowy (pomiarowej, szczegółowej). Źródłem danych mogą być zbiory pomiarów masówki, z których wybierane są automatycznie elementy pomiaru wysokościowego samej osnowy. Niezbędne informacje o osnowie są już „przekazane" automatycznie przez wykonany wcześniej program wstępnej kontroli danych. Jeśli instrument rejestruje zamiast kątów zenitalnych – przewyższenia to (opcjonalnie) koryguje się je jedynie ze względu na krzywiznę Ziemi i refrakcję atmosferyczną. Jeśli zmierzono tylko kąt

zenitalny to brakujące długości mogą być automatycznie obliczane ze współrzędnych wyznaczonych w sieci poziomej.

Metodologia obliczeń zachowuje pełną dokładność numeryczną niwelacji trygonometrycznej dla długich wektorów. Na podstawie założonych błędów średnich obserwacji elementarnych (długości, kąta zenitalnego, wysokości instrumentu i sygnału) wyznacza się elementy potrzebne do określenia wag. Utworzony zbiór wraz z ewentualnie istniejącym już zbiorem niwelacji geometrycznej jest podstawą do ścisłego wyrównania sieci wysokościowej.



Rys. 10.10. Okno dialogowe programu GEONET W/2001 „Wyrównanie ścisłe sieci poziomej"

Wyrównania ścisłe sieci niwelacyjnej działa podobnie jak wyrównanie sieci poziomej w trybie wsadowym. Zbiory obserwacyjne mogą pochodzić zarówno z niwelacji geometrycznej lub (i) niwelacji trygonometrycznej (tym samym programem możemy też wyrównywać niwelację satelitarną). Program dopuszcza 3 sposoby wagowania obserwacji, tj. w odwrotnej proporcji do:

- długości ciągów [w km] (sieci państwowe),
- liczby stanowisk (sieci do obserwacji przemieszczeń),
- kwadratu błędu średniego (niwelacje trygonometryczne).

W celach kontrolnych (identyfikacji błędów) można zastosować estymację mocną. Protokół końcowy zawiera pełną analizę dokładnościową wszystkich elementów sieci – wysokości punktów, miar obserwacji i poprawek. Weryfikacja poprawności sieci następuje przez porównanie każdej poprawki z jej błędem średnim.

Maksymalne liczebności zbiorów w wersji dystrybucyjnej programu wynoszą: 10 000 punktów, 30 000 obserwacji.

ROZDZIAŁ 11:
Transformacja współrzędnych na płaszczyźnie

11.1. Transformacja Helmerta

11.1.1. Założenia ogólne transformacji współrzędnych

Zadanie geodezyjne zwane transformacją współrzędnych polega na przeliczeniu współrzędnych punktów z jednego układu współrzędnych prostokątnych płaskich $O^P x\, y$, zwanego *układem pierwotnym*, na inny układ prostokątny, płaski $O^W X\, Y$ tzw. *układ wtórny**. W praktyce z problemem transformacji spotykamy się najczęściej podczas zmiany systemu odniesień przestrzennych, a szczególności obowiązującego na obszarze kraju układu współrzędnych prostokątnych płaskich np. podczas przejścia z układu „1965" na układ „2000" lub wtedy, gdy punkty, których współrzędne są obliczone w różnych układach np. lokalnym i państwowym należy ujednolicić poprzez wyrażenie ich w tym samym, najczęściej państwowym, układzie współrzędnych.

Działaniami zmieniającymi parametry układu prostokątnego są: *przesunięcie* (translacja) układu pierwotnego w stosunku do układu wtórnego o pewien wektor $\bar{u}$ oraz *obrót* tego układu (rotacja) o kąt skręcenia γ (rys. 11.2). Dodatkowo w obu układach może także nastąpić *zmiana skali* odległości o pewien współczynnik s, zwany *współczynnikiem redukcji* lub *współczynnikiem przeskalowania*, który stanowi stały stosunek długości tego samego odcinka w układzie wtórnym d^W i pierwotnym d^P:

$$s = \frac{d^W}{d^P} \tag{11.1}$$

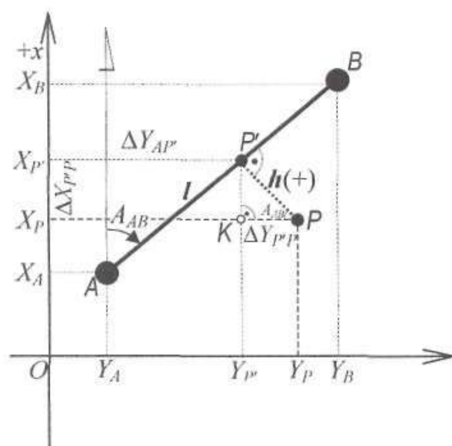
Najprostszym i ogólnie znanym przypadkiem transformacji jest popularne zadanie geodezyjne, polegające na obliczeniu współrzędnych punktu na domiarze prostokątnym (rys. 11.1), realizowane za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} X_P &= X_A + \Delta x_{AP'} + \Delta x_{P'P} = X_A + l \cdot \cos A_{AB} - h \cdot \sin A_{AB} \\ Y_P &= Y_A + \Delta y_{AP'} + \Delta y_{P'P} = Y_A + l \cdot \sin A_{AB} + h \cdot \cos A_{AB} \end{aligned} \tag{11.2}$$

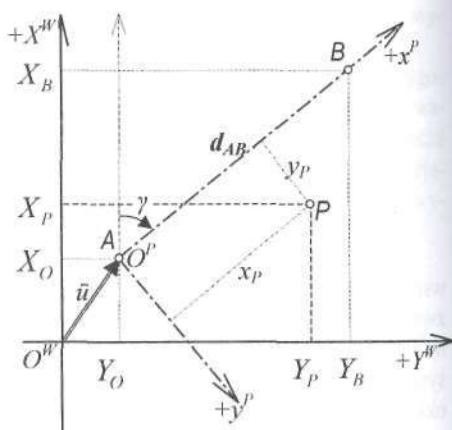
Na rys. 11.2, ilustrującym zmiany układu pierwotnego w stosunku do układu wtórnego, nietrudno zauważyć wyraźne analogie w porównaniu z rys. 11.1. Domiary prostokątne l, h są współrzędnymi liczonymi w układzie prawoskrętnym, którego oś x stanowi bok osnowy pomiarowej z początkiem w punkcie miary bieżącej ↑0,00. Po zmianie we wzorach (11.2) odpowiadających sobie symboli, których znaczenie zestawiono w tabeli 11.1, otrzymamy transformacyjne wzory na przeliczenie współrzędnych punktu P (x_P , y_P) w układzie pierwotnym na współrzędne tego punktu w układzie wtórnym (X_P, Y_P):

$$\begin{aligned} X_P &= X_O + x_P \cdot \cos\gamma - y_P \cdot \sin\gamma \\ Y_P &= Y_O + x_P \cdot \sin\gamma - y_P \cdot \cos\gamma \end{aligned} \tag{11.3}$$

* Oznaczenia x, y zapisane małymi literami oznaczają współrzędne w układzie pierwotnym, zaś duże litery X, Y – identyfikują współrzędne w układzie wtórnym.



Rys. 11.1. Punkt na domiarze prostokątnym



Rys. 11.2. Układy: pierwotny i wtórny

Tabela 11.1. Oznaczenia odpowiadających sobie elementów w zadaniach: obliczenia punktu na domiarze prostokątnym i transformacji

Symbol	Oznaczenie elementu z rys. 11.1	Symbol	Analogiczne oznaczenie z rys. 11.2
A	Początek linii pomiarowej (miara bieżąca *0,00 m*)	O^P	Początek układu pierwotnego
X_P	Współrzędne punktu na domiarze prostokątnym	X_P	Współrzędne punktu P w układzie wtórnym
Y_P		Y_P	
X_A	Współrzędne początku linii pomiarowej	X_O	Współrzędne początku O^P układu pierwotnego w układzie wtórnym
Y_A		Y_O	
l	Miara odciętej punktu P	x_P	Współrzędne punktu P w układzie pierwotnym
h	Miara rzędnej punktu P	y_P	
A_{AB}	Azymut linii pomiarowej AB	γ	Kąt skręcenia układu pierwotnego w stosunku do układu wtórnego

Punkty A, B wyznaczające na rys. 11.1, 11.2 bok osnowy stanowią w zadaniu transformacji tzw. *punkty dostosowania*, czyli punkty, których współrzędne są znane w obydwu układach. Do jednoznacznego rozwiązania tego zadania konieczne są co najmniej dwa takie punkty. W przypadku, gdy liczba punktów dostosowania jest większa od dwóch, wystąpi problem wyrównania transformacji.

Jeśli w obu układach występuje pewna różnica skal, wynikająca przeważnie ze zróżnicowanych odwzorowań kartograficznych, określających oba układy prostokątne, wówczas do wzorów (11.3) należy wprowadzić współczynnik przeskalowania s:

$$X_P = X_O + s \cdot x_P \cdot \cos\gamma - s \cdot y_P \cdot \sin\gamma$$
$$Y_P = Y_O + s \cdot x_P \cdot \sin\gamma - s \cdot y_P \cdot \cos\gamma \qquad (11.4)$$

Iloczyny współczynnika s przez funkcje sinus i cosinus kąta skręcenia γ, występujące we wzorach (11.4), noszą nazwę *współczynników przekształcenia: u, v*:

$$u = s \cdot \sin \gamma \qquad v = s \cdot \cos \gamma \tag{11.5}$$

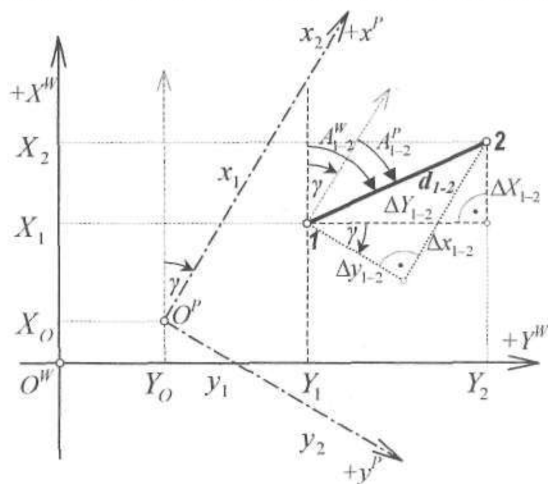
Współczynniki te oblicza się na podstawie znanych przyrostów boków pomiędzy sąsiednimi punktami dostosowania w obu układach. Po wprowadzeniu oznaczeń ze wzorów (11.5) do wzorów (11.4) otrzymamy:

$$X_P = X_O + v \cdot x_P - u \cdot y_P \qquad Y_P = Y_O + u \cdot x_P + v \cdot y_P \tag{11.6}$$

Geometryczna interpretacja transformacji Helmerta to zmiana układu wtórnego w stosunku do pierwotnego poprzez skręcenie układu pierwotnego wokół jego początku O^P o pewien kąt γ oraz zmiana długości odcinków łączących te punkty stosownie do stałego współczynnika skali s ($s = d_W : d_P$). Wynika stąd, że w tym typie transformacji figury utworzone przez punkty nie ulegają w układzie wtórnym zniekształceniom kątowym, doznając tylko konforemnego skrętu połączonego z przemieszczeniem i ewentualną zmianą skali, a więc zostaje zachowany kształt geometryczny sieci utworzonej przez punkty transformowane.

11.1.2. Transformacja współrzędnych przy dwóch punktach dostosowania

Transformacja współrzędnych przy dwóch punktach dostosowania (transformacja liniowa), stanowiących niezbędne minimum do realizacji przeliczenia jednego układu na drugi, jest zadaniem jednoznacznie wyznaczalnym, a więc nie zawierającym danych nadliczbowych.



Rys. 11.3. Transformacja przy dwóch punktach dostosowania

Znajomość współrzędnych punktów dostosowania: *1, 2* w układzie pierwotnym: $x_1, y_1; x_2, y_2$ oraz wtórnym: $X_1, Y_1; X_2, Y_2$ umożliwia obliczenie odpowiednich przyrostów,

a następnie współczynnika skali s oraz kąta skręcenia γ. Zgodnie z rys. 11.3 można zapisać:

$$s = \frac{d^W}{d^P} = \sqrt{\frac{\Delta X_{1-2}^2 + \Delta Y_{1-2}^2}{\Delta x_{1-2}^2 + \Delta y_{1-2}^2}} \tag{11.7}$$

oraz $\gamma = A_{1-2}^W - A_{1-2}^P$

stąd:
$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(A_{1-2}^W - A_{1-2}^P) = \frac{\operatorname{tg} A_{1-2}^W - \operatorname{tg} A_{1-2}^P}{1 + \operatorname{tg} A_{1-2}^W \cdot \operatorname{tg} A_{1-2}^P} \tag{11.8}$$

Podobnie jak przy obliczaniu kąta ze współrzędnych wg wzoru (11.8) można też zapisać funkcje tangens kąta γ jako iloraz odpowiednich przyrostów (Δy:Δx). Po podstawieniu ilorazów przyrostów:

$$\operatorname{tg} A_{1-2}^W = \frac{\Delta Y_{1-2}}{\Delta X_{1-2}} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg} A_{1-2}^P = \frac{\Delta y_{1-2}}{\Delta x_{1-2}}$$

i zastosowaniu symboli rachunkowych S. Hausbrandta, otrzymamy:

$$\operatorname{tg}\gamma = \begin{vmatrix} \Delta x_{1-2} & \Delta y_{1-2} \\ \Delta X_{1-2} & \Delta Y_{1-2} \end{vmatrix}_0 \tag{11.8a}$$

Pary wzorów (11.6) zapisane dla dwóch dowolnych punktów transformowanych P oraz N umożliwiają po odjęciu stronami określenie zależności na obliczenie przyrostów w układzie wtórnym na podstawie znajomości przyrostów w układzie pierwotnym i współczynników przekształcenia u, v :

$$\begin{aligned} \Delta X_{P-N} &= v \cdot \Delta x_{P-N} - u \cdot \Delta y_{P-N} \\ \Delta Y_{P-N} &= u \cdot \Delta x_{P-N} + v \cdot \Delta y_{P-N} \end{aligned} \tag{11.9}$$

Po utworzeniu formy rachunkowej prostej g można powyższe wzory zapisać za pomocą symboli Hausbrandta:

$$g \equiv \begin{vmatrix} \Delta x_{P-N} & \Delta y_{P-N} \\ u & v \end{vmatrix} \; ; \quad \Delta X_{P-N} = g_1 \; ; \quad \Delta Y_{P-N} = g_2 \tag{11.10}$$

Współczynniki przekształcenia u, v można wyznaczyć na podstawie przyrostów współrzędnych punktów dostosowania w obu układach: Δx_{1-2}, Δy_{1-2}, ΔX_{1-2}, ΔY_{1-2}, .

Ponieważ: $\gamma = A_{1-2}^W - A_{1-2}^P$ i $s = d_W : d_P$, toteż:

$$u = s \cdot \sin\gamma = \frac{d_{1-2}^W}{d_{1-2}^P} \cdot (\sin A_{1-2}^W \cdot \cos A_{1-2}^P - \sin A_{1-2}^P \cdot \cos A_{1-2}^W) = \frac{\Delta x_{1-2} \cdot \Delta Y_{1-2} - \Delta X_{1-2} \cdot \Delta y_{1-2}}{\Delta x_{1-2}^2 + \Delta y_{1-2}^2}$$

$$v = s \cdot \cos\gamma = \frac{d_{1-2}^W}{d_{1-2}^P} \cdot (\cos A_{1-2}^W \cdot \cos A_{1-2}^P + \sin A_{1-2}^P \cdot \sin A_{1-2}^W) = \frac{\Delta x_{1-2} \cdot \Delta X_{1-2} + \Delta y_{1-2} \cdot \Delta Y_{1-2}}{\Delta x_{1-2}^2 + \Delta y_{1-2}^2}$$

Po utworzeniu formy rachunkowej f wzory na współczynniki u, v zapiszemy w postaci funkcji: $f^{[1]}$, $f^{[2]}$:

$$f \equiv \begin{vmatrix} \Delta x_{1-2} & \Delta y_{1-2} \\ \Delta X_{1-2} & \Delta Y_{1-2} \end{vmatrix} \; ; \qquad u = f^{[1]} \; ; \; v = f^{[2]} . \tag{11.11}$$

Przeprowadzenie transformacji współrzędnych przy dwóch punktach dostosowania wymaga zatem wykonania następujących czynności:

1) Wpisanie w tabeli 11.2 danych wyjściowych tj.: oznaczeń wszystkich punktów i ich współrzędnych w układzie pierwotnym oraz współrzędnych punktów dostosowania w obu układach:
2. Obliczenie w układzie pierwotnym i wtórnym przyrostów boku wyznaczonego przez parę punktów dostosowania *1, 2*:

$$\Delta x_{1-2} = x_2 - x_1 \; ; \Delta y_{1-2} = y_2 - y_1 \; ; \Delta X_{1-2} = X_2 - X_1 \; ; \; \Delta Y_{1-2} = Y_2 - Y_1 \; .$$

3. Obliczenie współczynników transformacji u, v na podstawie wzorów (11.11).
4. Obliczenie przyrostów w układzie pierwotnym pomiędzy sąsiednimi punktami zbioru zgodnie z kolejnością zapisu w tabeli na zasadzie: współrzędna punktu następnego N minus współrzędna punktu poprzedniego P:

$$\Delta x_{P-N} = x_N - x_P \quad ; \quad \Delta y_{P-N} = y_N - y_P$$

Tabela 11.2. Formularz obliczeniowy transformacji współrzędnych

Oznaczenie lub nr punktu	Układ pierwotny				Układ wtórny				Oznaczenie lub nr punktu	Uwagi
	Współrzędne		Przyrosty		Przyrosty		Współrzędne			
	x	y	Δx	Δy	ΔX	ΔY	X	Y		

5. Obliczenie analogicznych przyrostów $\Delta X_{P\text{-}N}$; $\Delta Y_{P\text{-}N}$ w układzie wtórnym na podstawie wzorów (11.10).
6. Obliczenie współrzędnych punktów w układzie wtórnym wg schematu: współrzędna punktu następnego N równa się współrzędnej punktu poprzedniego P plus przyrost współrzędnych między tymi punktami uzyskany wcześniej w wyniku transformacji:

$$X_N = X_P + \Delta X_{P\text{-}N} \; ; \; Y_N = Y_P + \Delta Y_{P\text{-}N}$$

11.1.3. Transformacja przy więcej niż dwóch punktach dostosowania

W przypadku, gdy liczba punktów dostosowania n jest większa od 2, wówczas wystąpi problem wyrównania, którego zasada opiera się na sformułowaniu, że suma kwadratów różnic v_x, v_y zadanych współrzędnych punktów dostosowania $\overline{X}$, $\overline{Y}$ i ich współrzędnych X, Y uzyskanych po transformacji ma osiągnąć minimum.

$$[v_P^2] = [v_x^2 + v_y^2] = \min . \tag{11.12}$$

przy czym: $v_{x_i} = \overline{X}_i - X_i$ oraz $v_{y_i} = \overline{Y}_i - Y_i$.

Współrzędne punktów dostosowania w układzie wtórnym ulegają w wyniku wyrównania pewnym zmianom, jednak zmiany te w myśl powyższego założenia powinny być

możliwie jak najmniejsze. Współczynniki przekształcenia *u, v* występują jako niewiadome w równaniach (11.9), których ilość wynosi $2n$ tzn. jest równa podwójnej liczbie punktów dostosowania. Występujące w nich przyrosty boków pomiędzy sąsiednimi punktami dostosowania tu zastępuje się przyrostami pomiędzy kolejnymi punktami dostosowania a tzw. *biegunem przekształcenia B*. Biegun przekształcenia *B*, zwany też niekiedy środkiem ciężkości zespołu punktów dostosowania, stanowi niejako nowy punkt tego rodzaju, zaś jego współrzędne są w obu układach: pierwotnym i wtórnym obliczane jako średnie arytmetyczne ze współrzędnych punktów dostosowania:

$$X_B = \frac{[X]}{n}; Y_B = \frac{[Y]}{n}; \quad x_B = \frac{[x]}{n}; y_B = \frac{[y]}{n} \tag{11.13}$$

Równania poprawek dla *i*-tego punktu dostosowania przyjmują postać:

$$v_{x_i} = \Delta x_{B-i} \cdot u + \Delta y_{B-i} \cdot v - \Delta X_{B-i}$$

$$v_{y_i} = \Delta y_{B-i} \cdot u - \Delta x_{B-i} \cdot v - \Delta Y_{B-i}$$

Po wprowadzeniu zasady najmniejszej sumy kwadratów poprawek v_x, v_y wyrażonej wzorem (11.12) otrzymujemy układ dwóch równań normalnych Gaussa o dwóch niewiadomych *u, v*. Po jego rozwiązaniu uzyskujemy współczynniki transformacji, po czym na podstawie wzorów (11.9) - przyrosty wtórne, a z nich z kolei - współrzędne w układzie wtórnym. Przedstawiony dalej sposób rachunkowego rozwiązania transformacji Helmerta, realizujący opisaną procedurę, został opracowany przez S. Hausbrandta i obejmuje następujące czynności:

1. Przygotowanie formularza (tabela 11.2) i wpisanie do niego danych wyjściowych zadania tj.: współrzędnych wszystkich punktów w układzie pierwotnym oraz współrzędnych punktów dostosowania w układzie wtórnym. Na początku i końcu zapisu w tabeli należy zostawić po jednym wolnym wierszu na wpisanie obliczanych w następnej kolejności współrzędnych punktu *B*.
2. Obliczenie współrzędnych *bieguna przekształcenia B* jako średnich arytmetycznych ze współrzędnych punktów dostosowania. Przy *n* punktach dostosowania otrzymamy:

$$x_B = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}; \qquad y_B = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

$$X_B = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}; \; Y_B = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}$$

3. Obliczenie w obu układach przyrostów współrzędnych pomiędzy poszczególnymi punktami dostosowania a biegunem:

$$\Delta x_{B\text{-}1} = x_1 - x_B;\ \Delta y_{B\text{-}1} = y_1 - y_B;\ \Delta x_{B\text{-}2} = x_2 - x_B;\ \Delta y_{B\text{-}1} = y_2 - y_B;\ \Delta x_{B\text{-}n} = x_n - x_B;\ \Delta y_{B\text{-}n} = y_n - y_B;$$

$$\Delta X_{B\text{-}1} = X_1 - X_B;\Delta Y_{B\text{-}1} = Y_1 - Y_B;\Delta X_{B\text{-}2} = X_2 - X_B;\Delta Y_{B\text{-}1} = Y_2 - Y_B;\Delta X_{B\text{-}n} = X_n - X_B;\Delta Y_{B\text{-}n} = Y_n - Y_B$$

4. Zestawienie formy rachunkowej *F* złożonej z *n* form rachunkowych prostych i obliczenie współczynników przekształcenia: $u = F^{[1]}$; $v = F^{[2]}$.

$$(u,v) = \begin{vmatrix} \Delta x_{B-1} & \Delta y_{B-1} \\ \Delta X_{B-1} & \Delta Y_{B-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_{B-2} & \Delta y_{B-2} \\ \Delta X_{B-2} & \Delta Y_{B-2} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} \Delta x_{B-n} & \Delta y_{B-n} \\ \Delta X_{B-n} & \Delta Y_{B-n} \end{vmatrix}^{[1],[2]} \qquad (11.14)$$

5. Obliczenie w układzie pierwotnym przyrostów współrzędnych pomiędzy poszczególnymi parami sąsiednich punktów w kolejności ich zapisu w tabeli transformacji.

   $$\Delta x_{P-N} = x_N - x_P \;\; ; \;\; \Delta y_{P-N} = y_N - y_P \, ,$$

   gdzie: P – punkt poprzedni ; N – punkt następny.
   Obliczenie rozpoczynamy i kończymy na punkcie B, toteż, podobnie jak w ciągu poligonowym zamkniętym, sumy przyrostów powinny być równe zero.
6. Obliczenie analogicznych przyrostów w układzie wtórnym na podstawie wzorów (11.10):
   Kontrolę obliczenia stanowią sumy przyrostów w układzie wtórnym, które podobnie jak przyrosty w układzie pierwotnym powinny w sumie dawać zero.
7. Obliczenie w układzie wtórnym współrzędnych wszystkich punktów według schematu: współrzędna punktu następnego N równa się współrzędnej punktu poprzedniego P plus przyrost współrzędnych między tymi punktami w układzie wtórnym, uzyskany wcześniej z transformacji:

   $$X_N = X_P + \Delta X_{P-N} \;\; ; \;\; Y_N = Y_P + \Delta Y_{P-N}$$

Współrzędne punktów dostosowania w układzie wtórnym otrzymane w wyniku transformacji mogą się nieco różnić od współrzędnych stanowiących dane wyjściowe. Różnice: v_x, v_y pomiędzy współrzędnymi uzyskanymi z transformacji a danymi, będące wskaźnikiem zgodności obu układów, według wcześniejszego założenia spełniają warunek (11.12) sumy kwadratów tych odchyleń, która jest równa minimum. Poprawki: v_x, v_y służą także do oceny dokładności transformacji na podstawie wzorów na średnie błędy współrzędnych i średni błąd położenia punktów transformowanych:

$$m_x = \sqrt{\frac{[v_x v_x]}{n}} \;\; ; \;\; m_x = \sqrt{\frac{[v_y v_y]}{n}} \qquad (11.15)$$

$$m_P = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \qquad (11.16)$$

Dla zilustrowania kontroli rachunku i obliczenia poprawek v_x, v_y dane współrzędne punktów dostosowania wpisujemy w nawiasie w wierszu tabeli zwierającym odpowiednie współrzędne uzyskane z transformacji .

11.2. Transformacja afiniczna

Transformacja afiniczna stanowi jedno z zastosowań znanego w matematyce przekształcenia afinicznego (kolinearnego) i polega na przeliczeniu współrzędnych punktów z układu pierwotnego na układ wtórny w oparciu o założenie, że współrzędne X, Y w układzie wtórnym są funkcjami liniowymi współrzędnych pierwotnych x, y:

$$\begin{aligned} X &= a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y \\ Y &= b_1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot y \end{aligned} \qquad (11.17)$$

Podobnie jak w metodzie Helmerta w transformacji afinicznej zakłada się również niezmienność współrzędnych punktów dostosowania. W efekcie tej transformacji, nie będącej jednak transformacją konforemną, długości i kąty utworzone przez przeliczane punkty mogą ulegać zmianom. Wyznaczenie wartości sześciu współczynników przekształcenia: a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 wymaga trzech punktów dostosowania potrzebnych do zestawienia trzech par równań typu (11.17), w których po zróżniczkowaniu współrzędne można zastąpić przyrostami obliczonymi pomiędzy punktem wyjściowym *1* a pozostałymi punktami dostosowania:

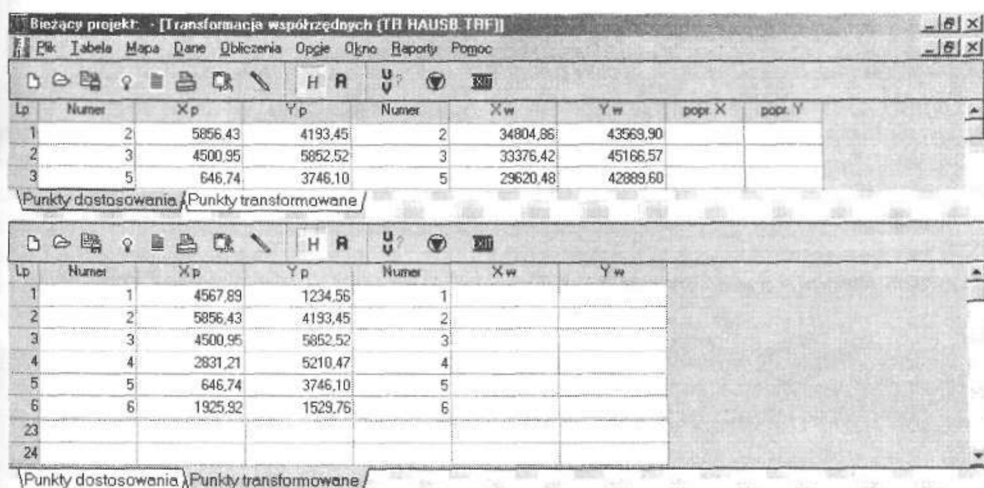
$$\begin{aligned} \Delta X_{1-2} &= a_2 \Delta x_{1-2} + a_3 \Delta y_{1-2} \\ \Delta Y_{1-2} &= b_2 \Delta x_{1-2} + b_3 \Delta y_{1-2} \\ \Delta X^{W}_{1-3} &= a_2 \Delta x_{1-3} + a_3 \Delta y_{1-3} \\ \Delta Y_{1-3} &= b_2 \Delta x_{1-3} + b_3 \Delta y_{1-3} \end{aligned} \qquad (11.18)$$

Wzory (11.18) zawierają wprawdzie cztery niewiadome: a_2, a_3, b_2, b_3, lecz do obliczenia występujących w równaniach czterech przyrostów dla boków *1-2* i *1-3* konieczna jest w dalszym ciągu znajomość w obu układach współrzędnych trzech punktów dostosowania: *1*, *2*, *3*. Po wyznaczeniu tych niewiadomych możemy po podstawieniu współrzędnych punktów dostosowania obliczyć także pozostałe dwa współczynniki transformacji a_1, b_1 z równań (11.17). Równania te służą również do obliczania współrzędnych *X*, *Y* pozostałych punktów, do czego oprócz współczynników transformacji afinicznej potrzebne są tylko współrzędne pierwotne tych punktów. Kontrolę transformacji stanowi porównanie długości boków obliczonych ze współrzędnych pierwotnych i wtórnych.

Przydatność metody afinicznej uwydatnia się przy dużej ilości punktów transformowanych, położonych wewnątrz oczek sieci utworzonych z punktów dostosowania. Dotyczy to szczególnie triangulacji, gdzie jako oczka przyjmuje się pojedyncze trójkąty, zaś punkty wewnątrz każdego z nich transformuje oddzielnie. W przeciwieństwie do transformacji Helmerta wadę transformacji afinicznej stanowi brak charakterystyki zgodności danych, uniemożliwiający wykrycie błędów we współrzędnych punktów dostosowania.

Dokonanie obliczeń w ramach obu metod transformacji umożliwia większość aktualnie stosowanych w naszym kraju komputerowych programów geodezyjnych np. C-Geo (rys. 11.4 – 11.6), WinKalk lub Geonet_unitrans. Zadanie osoby przeprowadzającej obliczenie sprowadza się do wyboru rodzaju transformacji, wpisania danych i uruchomienia programu odpowiednim przyciskiem funkcyjnym.

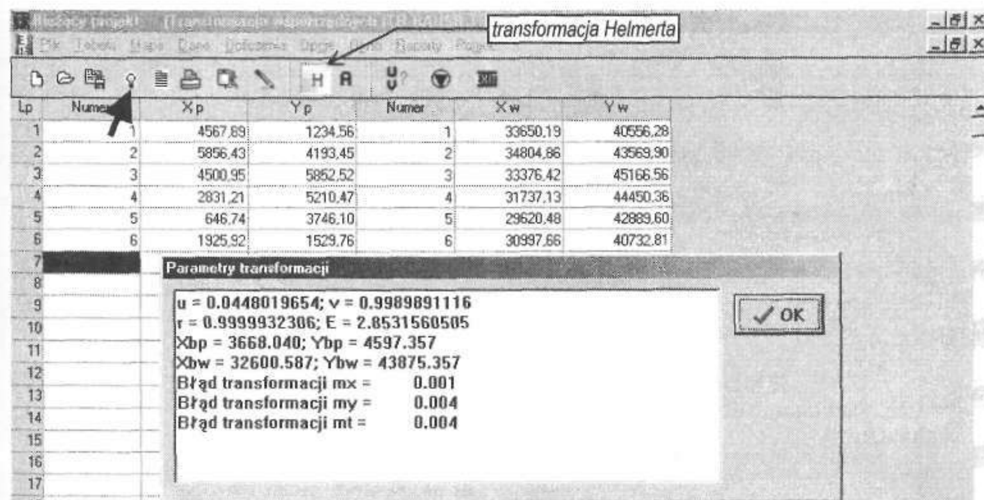
W **programie C-Geo** moduł Transformacja współrzędnych umożliwia transformację metodą Helmerta i afiniczną. Wyboru metody przeliczania dokonuje się przez wciśnięcie odpowiedniej ikonki: H lub A. Do wykonania przeliczenia konieczne jest wprowadzenie co najmniej dwóch (metoda Helmerta) lub trzech (metoda afiniczna) punktów dostosowania. Po wpisaniu współrzędnych punktów dostosowania (rys. 11.4) należy wprowadzić współrzędne punktów transformowanych w układzie pierwotnym. Przełączenie między zapisem danych dla punktów dostosowania a wprowadzaniem punktów transformowanych wykonuje się przez wybranie odpowiedniej zakładki.



Lp	Numer	Xp	Yp	Numer	Xw	Yw	popr. X	popr. Y
1	2	5856.43	4193.45	2	34804.86	43569.90		
2	3	4500.95	5852.52	3	33376.42	45166.57		
3	5	646.74	3746.10	5	29620.48	42889.60		

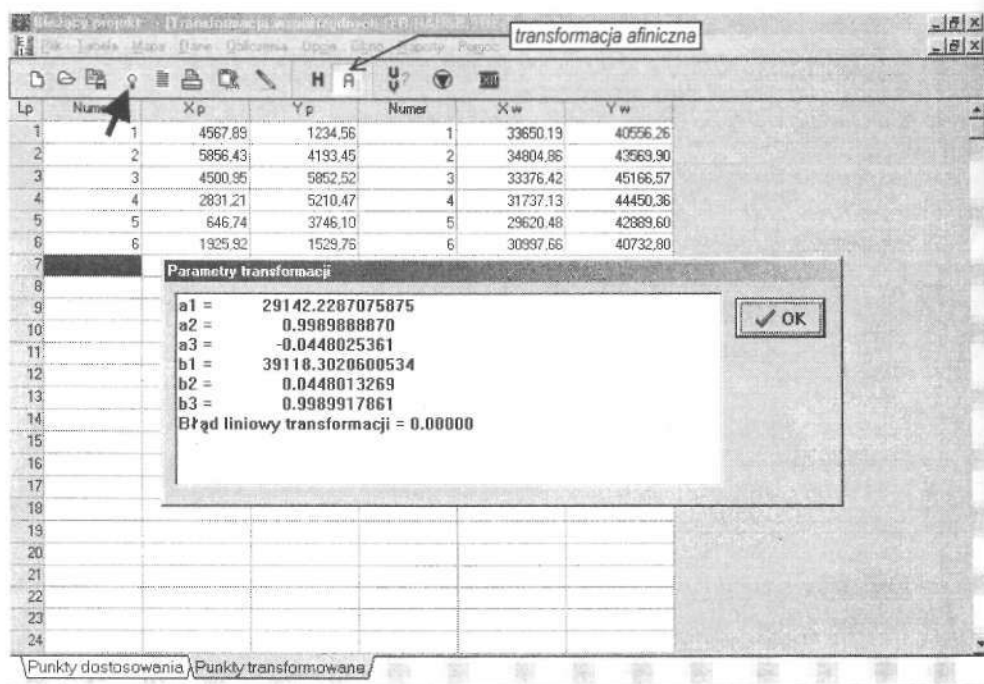
Lp	Numer	Xp	Yp	Numer	Xw	Yw
1	1	4567.89	1234.56	1		
2	2	5856.43	4193.45	2		
3	3	4500.95	5852.52	3		
4	4	2831.21	5210.47	4		
5	5	646.74	3746.10	5		
6	6	1925.92	1529.76	6		
23						
24						

Rys. 11.4. Wprowadzenie danych do transformacji Helmerta w programie C-Geo



Lp	Numer	Xp	Yp	Numer	Xw	Yw
1	1	4567.89	1234.56	1	33650.19	40556.28
2	2	5856.43	4193.45	2	34804.86	43569.90
3	3	4500.95	5852.52	3	33376.42	45166.56
4	4	2831.21	5210.47	4	31737.13	44450.36
5	5	646.74	3746.10	5	29620.48	42889.60
6	6	1925.92	1529.76	6	30997.66	40732.81

Rys. 11.5. Wyniki transformacji Helmerta uzyskane w programie C-Geo po naciśnięciu przycisku wskazanego na rysunku strzałką



Rys. 11.6. Wyniki transformacji afinicznej uzyskane w programie C-Geo po naciśnięciu przycisku wskazanego strzałką

Znaczenie ikon w modułach obliczeniowych C-Geo:

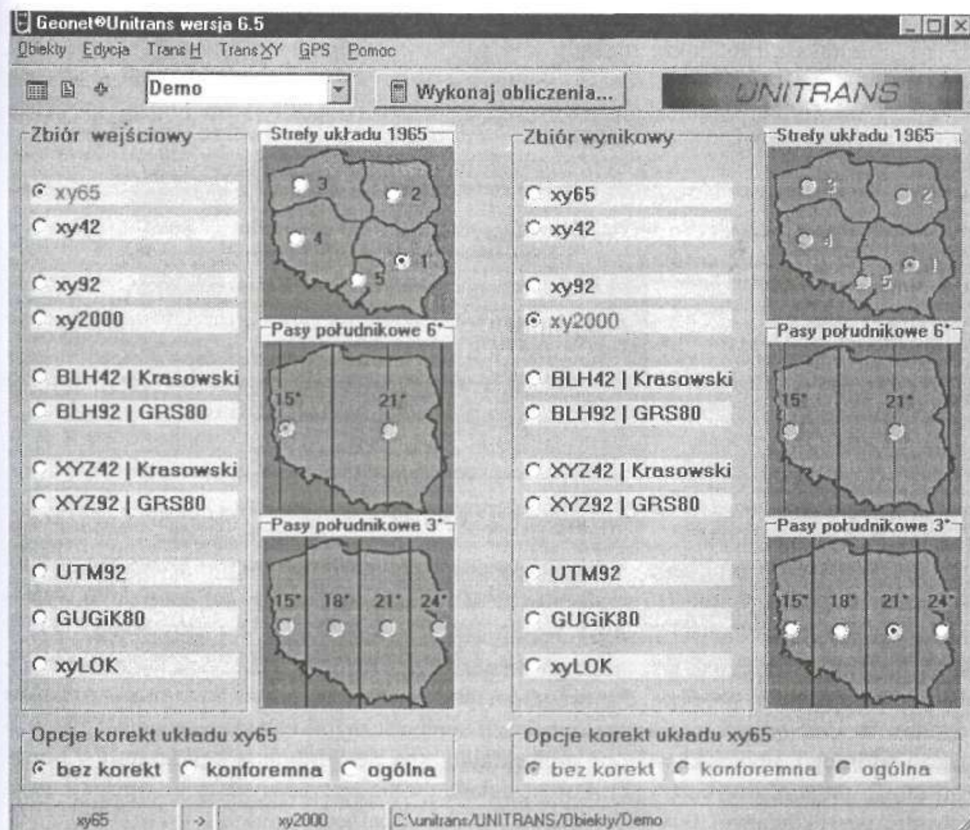
- Nowe dane - wyczyszczenie wpisanych danych.
- Wczytaj zadanie - wczytanie zapisanych wcześniej danych z dysku.
- Zapisz zadanie - zapisanie wprowadzonych danych na dysk.
- Oblicz - wykonanie obliczeń.
- Raport - przygotowanie raportu dla opcji RAPORTY. Wybór tej opcji powoduje wykonanie obliczeń i zapisanie wyników do specjalnego zbioru.
- Wydruk wyników obliczeń
- Rysunek - wykonanie rysunku wyników obliczeń.
- Na mapę - przeniesienie rysunku na mapę. Jeżeli dla aktualnego zbioru roboczego jest założona mapa, użycie tego przycisku powoduje przeniesienie rysunku obliczanej konstrukcji na mapę.
- Edycja kodów punktów - włączenie lub wyłączenie możliwości.
- Zamknięcie modułu.

11.3. Program GEONET® unitrans do transformacji współrzędnych

(opracowanie na podstawie instrukcji obsługi programu)

11.3.1. Zadania modułu podstawowego

Pakiet programów *GEONET®_unitrans* autorstwa prof. R. Kadaja służy głównie do przeliczeń współrzędnych pomiędzy różnymi układami stosowanymi aktualnie lub w przeszłości na obszarze Polski; pozwala też wyznaczać parametry transformacyjne dla układów lokalnych oraz przeliczać wysokości elipsoidalne na normalne. Specjalnymi dodatkami znajdującymi się w wersji programu v6.5 są trzy moduły: programy obliczeniowe sieci GPS, konwersja map numerycznych (*dgn) dla MicroStation, konwersja map numerycznych (*dwg) dla AutoCad. Edytory (tekstowy i graficzny) umożliwiają między innymi wizualne prezentacje zbiorów danych.



Rys. 11.7. GEONET®_unitrans - okno wejściowe

Instalacja programu następuje po uruchomieniu z płyty CD-R programu *instaluj. exe*. Po wybraniu miejsca instalacji i jego potwierdzeniu [OK.] oraz odczekaniu kilku minut uzyskamy na ekranie komunikat informujący o poprawności wykonanej instalacji. Program instalacyjny tworzy w wybranym miejscu na dysku katalog (folder) *UNITRANS*, a w nim podkatalogi:

- PROGRAMY - podkatalog zawiera program wykonawczy *unitrans.exe* i bibliotekę procedur, zawierającą pliki z rozszerzeniem **.dll*. Ikonę programu można wyprowadzić na pulpit Windows.
- POMOC - zawiera pliki informacyjne o programie czytane na ekranie z menu Pomoc.
- OBIEKTY - folder przeznaczony na podkatalogi robocze zakładane przez użytkownika. Podczas instalacji tworzone są podkatalogi przykładowe (testowe): DEMO (katalog zawierający przykładowy zbiór współrzędnych (plik tekstowy) o nazwie *xy65*, z układu „1965" w strefie 1, KRAKOW zawierający plik parametrowy *par.lok* układu lokalnego miasta Krakowa oraz przykładowe zbiory dla celów testowych współrzędnych lokalnych *xy_lok* i odpowiadający zbiór współrzędnych *xy65* układu „1965" w strefie 1, LODZ (zawiera plik parametrowy układu lokalnego miasta Łodzi oraz odpowiadający zbiór współrzędnych z układu 1965,także ze strefy 1.
- W momencie instalacji w środowisku WINDOWS dwa pliki: *objects.ini* oraz *lastobj.ini*, zawierające informacje o ścieżkach dostępu do obiektów pakietu UNITRANS.



Rys. 11.8. Katalog PROGRAMY

Wejście do programu następuje po uruchomieniu programu *unitrans.exe* znajdującego się w podkatalogu UNITRANS\PROGRAMY lub na pulpicie po jej uprzednim wyprowadzeniu. Po tej czynności pojawia się na ekranie wejściowe okno główne (rys. 11.7). W oknie tym umieszczone jest menu główne [Obiekty Edycja Trans H Trans XY GPS Pomoc] oraz przyciski parametryczne i sterujące dla programu podstawowego, przyciski wyboru rodzajów układów wejściowego i wynikowego, opisane symbolicznymi nazwami układów: pierwotnego i wtórnego, przyciski wyboru stref układów (na tle symbolicznych konturów obszarów stref), przyciski wyboru opcji korekt układu „1965"dotyczących tylko operacji związanych z tym układem.

Główne menu obsługi pakietu *GEONET_unitrans* zawiera: menu zarządzania obiektami (Obiekty), menu edytora tekstowego (Edycja), menu informacji o programie (Pomoc) oraz menu programów pomocniczych: Trans H – program transformacji wysokościowej lub interpolacji geoidy, Trans XY – program transformacji wielomianowej w dwóch odmianach (*transk* - konforemnej i *transa* – niekonforemnej, czyli ogólnej).

Zadania modułu podstawowego UNITRANS umożliwiają przeliczenie współrzędnych między następującymi rodzajami układów lub stref:

- **"1965"** - strefy 1,2,3,4,5 (strefy 1-4 są aplikacjami odwzorowania quasi-stereograficznego, natomiast strefa 5 – Gaussa-Krügera). Przeliczenie do i z układu "1965" może przebiegać z uwzględnieniem opcji specjalnych:
  - *Opcja bez korekt* realizująca przeliczenie współrzędnych ściśle według matematycznych praw odwzorowań,
  - *Opcja korekty konforemnej*, gdzie oprócz matematycznych praw odwzorowania zastosowano dodatkowe wpasowanie w rzeczywisty układ "1965" (określony przez współrzędne katalogowe punktów osnów geodezyjnych). Za pomocą transformacji konforemnej stopnia n = 1 (w strefie 5) lub n =6 w strefach pozostałych. Opcja korekt konforemnych ma zastosowanie przy przeliczaniu sieci GPS do układu "1965". W takim przypadku finalny wynik powinien być jeszcze lokalnie dopasowany poprzez transformację Helmerta (w oparciu o znane punkty łączne w obu układach), a także korygowany dodatkowo tzw. korektą Hausbrandta.
  - *Opcja ogólnej korekty wielomianowej* (niekonforemnej), wpasowującej transformowane współrzędne w realny układ "1965" przy zastosowaniu wielomianów algebraicznych stopnia n =5 (w strefie 5) lub n = 6 w strefach pozostałych. Opcja ta może mieć zastosowanie przy przetwarzaniu wektorowych obrazów map.
- **"1942"** – stanowi aplikację odwzorowań Gaussa-Krügera w pasach południkowych 3 lub 6 - stopniowych. Pasy 3-stopniowe obejmują cztery strefy z następującymi południkami środkowymi: L_0 = 15°, 18°, 21°, 24°, zaś pasy 6-stopniowe tworzą dwie strefy z południkami środkowymi: L_0 = 15° i 21°.
- **"1992"** – nowy, jednostrefowy dla obszaru Polski układ powstały jako aplikacja odwzorowania Gaussa-Krügera elipsoidy GRS-80 z południkiem środkowym L_0= 19° i skalą na tym południku m = 0.9993.
- **"2000"** – nowy czterostrefowy układ odwzorowawczy elipsoidy GRS-80, utworzony analogicznie jak układ "1942" dla pasów 3 – stopniowych.
- **"*BLh*"|GRS-80** – układ współrzędnych geograficznych - geodezyjnych na elipsoidzie GRS-80.
- **"*BLh*"|Krasowski** – układ współrzędnych geograficznych - geodezyjnych na elipsoidzie Krasowskiego.
- **"UTM"** – międzynarodowy (wojskowy i nawigacyjny) układ współrzędnych powstały poprzez aplikacje odwzorowania Gaussa-Krügera, elipsoidy GRS-80 w pasach 6-stopniowych ze skalą na południku środkowym każdej strefy wynoszącą m = 0.9996. Na obszarze Polski układ ten jest analogiczny do dawnego układu "1942" w pasach 6-stopniowych.
- **GUGiK-80** – jednostrefowy dla obszaru Polski układ kartograficzny, przeznaczony dla map przeglądowych w skalach 1:100 000 lub mniejszych, powstały poprzez odwzorowanie quasistereograficzne elipsoidy Krasowskiego.
- **Układy lokalne** – pliki parametrowe *"par. lok"* właściwe dla danego układu udostępniane przez firmę *Algores* na odrębne zamówienie. W obecnej wersji instalacyjnej udostępniono odpowiednie pliki parametrowe dla układów lokalnych: KRAKÓW, ŁÓDŹ.

11.3.2. Wykonywanie podstawowych operacji

Pakiet programów GEONET_unitrans wykonuje obliczenia na zbiorach danych w postaci plików tekstowych (ASCII) i zapisuje wyniki obliczeń również w plikach tekstowych. Zbiory wejściowe i wynikowe mają ściśle określone nazwy standardowe (pokrywające się z nazwami układów) i są przyporządkowane do określonych obiektów, którymi są podkatalogi folderu OBIEKTY. Utworzenie nowego obiektu następuje poprzez wypisanie jego nazwy i po potwierdzeniu klawiszem [+]. Program nie akceptuje ponownego utworzenia już istniejącego obiektu. Z listy istniejących obiektów wybieramy obiekt aktywny, z którego pobierane są zbiory wejściowe i zapisywane zbiory wynikowe.

Przed wykonaniem jakiegokolwiek zadania należy utworzyć za pomocą edytora lub zaimportować do aktywnego obiektu roboczego zbiór wejściowy, który musi mieć odpowiednią nazwę standardową.

Wybór określonego przekształcenia współrzędnych w module *Unitrans* dokonuje się poprzez wskazanie kursorem myszy odpowiedniej pary układów wejściowego i wynikowego oraz stosownych opcji (stref) w polach rysunkowych i uruchomienie obliczeń przyciskiem [Wykonaj obliczenia...]. Na ekranie pojawi się komunikat w przypadku, gdy zadeklarowany zbiór wejściowy nie istnieje w katalogu aktywnym. Błędna struktura zbiorów wejściowych ujawni się na ekranie komunikatami kompilatora. Komunikaty programu są zapisywane w zbiorach wynikowych.

11.3.3. Programy pomocnicze

Program *trans h*

Zbiorami wejściowymi dla programu *trans h* są zbiory o nazwach: *BLh* oraz *z.sta*. Pierwszy jest wykazem współrzędnych geodezyjnych i wysokości w umownym układzie pierwotnym, zaś drugi – wykazem wysokości punktów dostosowania (punktów łącznych) w umownym układzie wtórnym. Zadaniem programu *trans h* jest przekształcenie wszystkich wysokości pierwotnych do układu wtórnego w oparciu o dany zbiór wysokości punktów dostosowania. Zbiorami wynikowymi są zbiory tekstowe o następujących nazwach standardowych: *wy h* (wynikowy plik opisowy), *h.lok* (wynikowy wykaz wysokości). Zbiór *wy h* zawiera ponadto wykaz wysokości skorygowanych (według korekty Hausbrandta), toteż punkty łączne zachowują wysokości dane (założone) do interpolacji.

Alternatywą zbiorów wejściowych *BLh* i *z.sta* mogą być zbiory o nazwach *xyh* oraz *xyz.sta*. Zbiór *xyh* zamiast współrzędnych geodezyjnych *B*, *L* (jak w zbiorze *BLh*) wykorzystuje współrzędne płaskie *x*, *y* w dowolnym układzie odwzorowawczym (np. „1965", „1992"). Drugi zbiór (*xyz.sta*) jest zbiorem standardowym w systemie *GEONET* ze współrzędnymi punktów nawiązania, ale w programie *Unitrans* wykorzystywana jest tylko trzecia współrzędna tj. wysokość określona w docelowym układzie wtórnym. Zbiory *z.sta*, *xyz.sta*, oprócz wymaganych punktów łącznych mogą zawierać też inne (obce) punkty, które są automatycznie pomijane. Maksymalna liczba punktów każdego ze zbiorów wejściowych nie może przekraczać 10 000.

Program *geoida*

Zbiorem wejściowym dla programu *geoida* jest zbiór o nazwie standardowej *BL*, zaś zbiorem wynikowym zbiór *odstępy*.

Programy: *transa* i *transk*

Zasadniczymi zbiorami wejściowymi dla programów transformacji płaskiej (niekonforemnej lub konforemnej) są zbiory: ***xy1*** – wykaz współrzędnych pierwotnych), ***xy2*** – wykaz współrzędnych wtórnych). Zbiory te mogą być dowolnie uporządkowane, ponieważ program wyszukuje automatycznie punkty wspólne. Oprócz koniecznych punktów dostosowania zbiór ***xy2***, może zawierać inne (obce) punkty, które podczas obliczeń zostaną automatycznie pominięte. Maksymalna liczba punktów transformowanych może wynosić 10000.

Wyniki transformacji

Wyniki obliczeń są zapisywane zasadniczo w zbiorach standardowych:

- ***wyniki*** – rezultaty opisowe zawierające oprócz wykazów współrzędnych, wartości parametrów transformacji, odchyłki na punktach łącznych oraz elementy analizy dokładności transformacji,
- ***xy.tr*** – wykaz współrzędnych po dokonaniu transformacji,
- ***xysk.tr*** – wyniki transformacji po dodatkowej korekcie Hausbrandta.

Oprócz wymienionych zbiorów wejściowych i wynikowych opisywane programy transformacyjne mogą wykorzystywać specjalny zbiór wejściowy o nazwie ***nnn***. Równocześnie programy te tworzą zawsze pomocniczy zbiór wynikowy o nazwie ***nnn1***. Zbiór *nnn* stanowi listę numerów porządkowych parametrów wielomianu (zapisanych w oddzielnych wierszach), co do których zakładamy, że powinny być równe zero.

Dla ułatwienia tego zadania uruchomiony program tworzy najpierw analogiczną listę w zbiorze *nnn1*, kierując się zasadą, że dana niewiadoma jest nieistotna jeśli jest bezwzględnie mniejsza od jej błędu średniego. W rezultacie kontrolnego uruchomienia programu dla określonych danych utworzony plik *nnn1* można skopiować pod nazwę *nnn*, uruchamiając program od nowa. Gdy rezygnujemy z takiego szczególnego potraktowania niektórych parametrów wielomianów, istniejący plik *nnn* należy skasować. W przeciwnym razie informacje zawarte w pliku *nnn* będą zawsze priorytetowo i automatycznie wykorzystywane.

Rozdział 12:
Niwelacja trygonometryczna

12.1. Wiadomości wstępne

Niwelacja trygonometryczna jest metodą pomiaru wysokościowego, polegającą na wyznaczaniu wysokości bezwzględnych, względnych lub różnic wysokości wybranych punktów na podstawie obserwacji: kąta pionowego i odległości poziomej lub skośnej. Zasadę tego pomiaru zilustrowano wcześniej na rys. 2.32 w ust. 2.9

Na podstawie pomiaru pionowego kąta pochylenia α lub zenitalnego z i odległości poziomej d określane jest przewyższenie h, stanowiące różnicę wysokości pomiędzy poziomem przechodzącym przez oś obrotu lunety (horyzontem instrumentu) a punktem celu. Przewyższenie obliczone na podstawie odległości zredukowanej do poziomu wyraża się wzorem (2.15), zawierającym funkcję trygonometryczną tangens kąta pionowego α nachylenia osi celowej lunety teodolitu względem płaszczyzny poziomej. Jeśli zamiast kąta α pomierzono kąt zenitalny z, czyli dopełnienie α do 90°, wówczas do obliczenia przewyższenia posłużymy się wzorami: (2.16) lub (2.16 a).

W porównaniu z niwelacją geometryczną podstawową zaletą niwelacji trygonometrycznej jest możliwość pomiaru przy dowolnym nachyleniu osi celowej, wynikająca z zastosowania teodolitu zamiast niwelatora. Zapewnia to duży zakres pomiaru z jednego stanowiska, brak ograniczeń spowodowanych czytelnością podziału łaty i nieodzownością każdorazowego poziomowania osi celowej instrumentu pomiarowego. W niwelacji geometrycznej czynniki te zmniejszają zasięg pomiaru wysokościowego z pojedynczego stanowiska niwelatora do najwyżej 100 m. Zakres stosowania tej niwelacji jest przez to zawężony do wyznaczania różnic wysokości punktów bliskich i położonych na terenach płaskich lub nieznacznie nachylonych, zaś dla określania różnic wysokości punktów dalekich zachodzi konieczność zakładania ciągów niwelacyjnych. Ograniczenia te nie dotyczą natomiast niwelacji trygonometrycznej, ponieważ możliwość dowolnego celowania i pomiaru kątów pionowych pozwala na wyznaczanie dużych różnic wysokości pomiędzy stanowiskiem instrumentu a odległymi punktami. Warunkiem pomiaru jest tylko zapewnienie widoczności pomiędzy stanowiskiem a celem.

Wadą niwelacji trygonometrycznej w stosunku do niwelacji geometrycznej jest natomiast przeciętnie niższa dokładność, charakteryzująca się błędem pomiaru wysokości rzędu od jednego do kilku centymetrów. Czynnik ten powoduje, że niwelacja trygonometryczna jako metoda wyznaczania wysokości punktów osnowy geodezyjnej może być wykorzystywana w jedynie odniesieniu do pomiarowych osnów wysokościowych oraz jako technologia określania wysokości punktów geodezyjnej osnowy poziomej w połączeniu z wyznaczaniem wysokości wybranych elementów wież i sygnałów triangulacyjnych.

Najczęściej zastosowanie niwelacji trygonometrycznej ma miejsce podczas tachimetrii, będącej szybkim pomiarem sytuacyjno-wysokościowym, w ramach którego wykonuje się zdjęcie sytuacyjne metodą biegunową, zaś wysokości pikiet są określane trygonometrycznie. Obecnie dzięki rozpowszechnieniu tachimetrów elektronicznych pomiary tachimetryczne zyskały znacznie na popularności i dokładności. Oprócz tego niwelacja trygonometryczna jest także bardzo często stosowana do realizacji wielu zadań specjalnych z zakresu geodezji inżynieryjnej takich jak: obsługa budów, wyznaczanie odkształceń i przemieszczeń obiektów, inwentaryzacja budowli zabytkowych itp. Niwelacja trygono-

metryczna może być też wykorzystywana do wyznaczania wysokości wyniosłych obiektów takich jak: kominy, wieże, wysokie budynki itp. z widocznymi, lecz niedostępnymi częściami wierzchołkowymi.

Dla krótkich celowych, za które uważa się celowe o długości poniżej 300 m, do obliczenia wysokości punktu *P*, na którym ustawiono sygnał o wysokości *s*, obserwowany ze stanowiska *S* instrumentem, znajdującym się nad znakiem geodezyjnym na wysokości *i* rys. 2.26), posługujemy się wzorami: (2.15) i (2.20). Zgodnie z tymi zależnościami na błąd trygonometrycznego określenia wysokości punktu *P* wpływają:

- dokładność pomiaru odległości *d*,
- dokładność pomiaru kąta zenitalnego *z*,
- dokładność pomiaru wysokości: instrumentu – *i* oraz sygnału – *s*.

12.2. Wpływ krzywizny Ziemi i refrakcji na trygonometryczny pomiar wysokości

12.2.1. Wpływ krzywizny Ziemi na pomiary wysokościowe

Wykonanie niwelacji trygonometrycznej przy krótkich celowych, o długości dochodzącej najwyżej do 300 m, nie wymaga uwzględniania krzywizny Ziemi, ponieważ wpływ tego czynnika nie przekracza wówczas 1 cm. Pozwala to wówczas na przyjęcie założenia, że powierzchnia odniesienia jest płaszczyzną, zaś prostopadłe do niej kierunki pionu stanowiska i celu są prostymi równoległymi. Podczas trygonometrycznego pomiaru wysokościowego wykonywanego dla odległych punktów z celowymi ponad 300 m, odnoszenie pomiarów do płaszczyzny może powodować znaczne, nie dające się już zaniedbać błędy, toteż jako powierzchnię odniesienia pomiaru wysokościowego należy wtedy przyjąć powierzchnię zakrzywioną: kulę, elipsoidę obrotową lub nawet geoidę.

Najczęściej jako powierzchnię odniesienia do trygonometrycznego określania wysokości przyjmuje się kulę o średnim promieniu *R* wynoszącym około 6370 km, poprowadzoną przez średni poziom morza, który dla Polski wyznacza aktualnie zero łaty mareografu w Kronsztadzie.

Z twierdzenia sinusów w trójkącie ABA' (rys. 12.1) wynika związek:

$$\frac{h}{\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2})} = \frac{d}{\sin\beta},$$

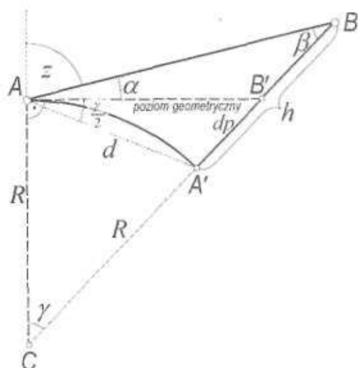
natomiast z sumy kątów trójkąta ABC:

$$\beta = 90° - (\alpha + \gamma).$$

stąd: $$h = d\frac{\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2})}{\cos(\alpha + \gamma)}$$

oraz $$h = d\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\alpha}{\cos(\alpha + \gamma)}$$

Ponieważ w porównaniu do kąta α kąt γ jest przeważnie bardzo mały, toteż można przyjąć, że:



Rys. 12.1. Wpływ krzywizny Ziemi w niwelacji trygonometrycznej

$\cos(\alpha+\gamma) \cong \cos\alpha$; $\cos\frac{\gamma}{2} \cong 1$ oraz $\sin\frac{\gamma}{2} \cong \frac{\gamma}{2}$.

Po uwzględnieniu powyższych zależności napiszemy więc:

$$h = d \cdot \mathrm{tg}\,\alpha + d \cdot \frac{\gamma}{2}$$

Z uwagi na małą wartość odległości d w stosunku do promienia Ziemi można również przyjąć: $\gamma = \frac{d}{R}$, a stąd przewyższenie h obliczone z uwzględnieniem krzywizny Ziemi wyniesie:

$$h = d \cdot \mathrm{tg}\,\alpha + \frac{d^2}{2R} \tag{12.1}$$

Wpływ krzywizny Ziemi dp na trygonometryczny pomiar wysokości wyraża drugi składnik wzoru (12.1):

$$dp = \frac{d^2}{2R} \tag{12.2}$$

Wpływ dp rośnie proporcjonalnie do kwadratu odległości i osiąga wartość 1 cm dla celowej o długości $d = 357$ m, natomiast dla celowej 1 km wynosi już 8 cm.

12.2.2. Wpływ pionowej refrakcji atmosferycznej na pomiary wysokościowe

Refrakcja jest zjawiskiem fizycznym, polegającym na załamywaniu się fal świetlnych na granicach ośrodków stanowiących warstwy powietrza o różnych współczynnikach załamania (gęstościach). W rezultacie przejścia światła przez atmosferę ziemską, którą można podzielić na pewną ilość hipotetycznych warstw o gęstości wzrastającej ku dołowi, następuje załamanie promieni świetlnych w kolejnych warstwach i zmiana kierunku ich biegu z prostoliniowego na krzywoliniowy (rys. 12.2). Bieg prostoliniowy występuje jedynie w ośrodku jednorodnym lub w próżni. W rzeczywistości gęstość atmosfery nie zmienia się warstwowo, z wyraźnym rozgraniczeniem poszczególnych warstw, lecz w sposób ciągły, w wyniku czego przebiegający przez nią promień świetlny nie tworzy linii łamanej, lecz krzywą, zwaną *krzywą refrakcyjną*, zbliżoną kształtem do łuku kołowego o promieniu R', skierowanego wypukłością ku górze. Stosunek $R{:}R'$, czyli promienia Ziemi do promienia łuku krzywej refrakcyjnej określany jest mianem *współczynnika refrakcji* – k:

$$k = \frac{R}{R'} \tag{12.3}$$

Na podstawie licznych badań stwierdzono, że średnia wartość współczynnika k wynosi $0{,}13 \cdot (1 \pm 0{,}25)$. W efekcie zjawiska refrakcji podczas pomiaru kąta pionowego zamiast poprawnego kąta α utworzonego przez linię prostą łączącą punkty A, B zaobserwujemy większy kąt α' (podnoszenie celowej), utworzony przez celową styczną do krzywej refrakcyjnej. Różnica pomiędzy pomierzonym i powiększonym przez refrakcję kątem α' i właściwym kątem α stanowi tzw. *kąt refrakcji* δ, czyli:

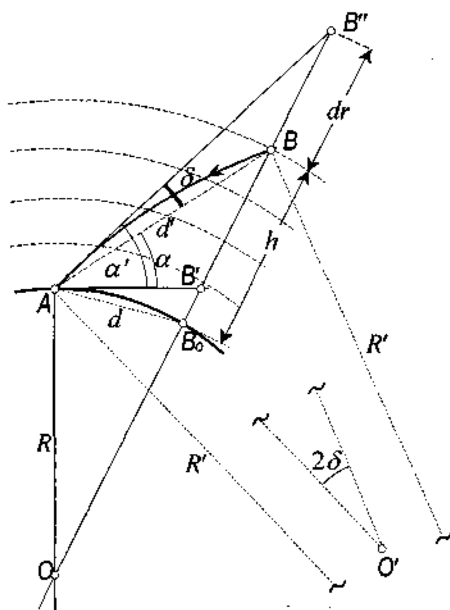
$$\delta = \alpha' - \alpha$$

Z rysunku 12.2 wynika, że kąt 2δ zapisany w mierze łukowej wynosi:

$$2\delta = \frac{d'}{R'}$$

Ponieważ zgodnie z wzorem (12.3): $\frac{1}{R'} = \frac{k}{R}$, stąd kąt refrakcji δ będzie równy:

$$\delta = k \cdot \frac{d}{2R} \tag{12.4}$$



Rys. 12.2. Załamanie promieni świetlnych w atmosferze ziemskiej powoduje wskutek refrakcji zjawisko podnoszenia celowej o kąt δ

Właściwy kąt pionowy α równa się zatem: $\alpha = \alpha' - k \cdot \frac{d}{2R}$

Po podstawieniu obliczonego w ten sposób kąta α do wzoru (12.1) uzyskamy przewyższenie:

$$h = d \cdot \operatorname{tg}\left(\alpha' - k \cdot \frac{d}{2R}\right) + \frac{d^2}{2R} \tag{12.5}$$

Po rozwinięciu w szereg Taylora funkcji tg $\left(\alpha' - k \cdot \frac{d}{2R}\right)$ z pominięciem jako nieistotnych wyrazów rzędu wyższego niż pierwszy otrzymamy:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha' - k \cdot \frac{d}{2R}\right) = \operatorname{tg}\alpha' - k \cdot \frac{d}{2R} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha'} + \ldots$$

Zakładając małą wartość kąta α' można przyjąć, że $\cos\alpha' \cong 1$, stąd:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha' - k \cdot \frac{d}{2R}\right) \cong \operatorname{tg}\alpha' - k \cdot \frac{d}{2R},$$

co uwzględnione w formule (12.5) na przewyższenie h da nam związek:

$$h = d \cdot \mathrm{tg}\,\alpha' - k \cdot \frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2R}$$

zaś ostatecznie:

$$h = d \cdot \mathrm{tg}\,\alpha' + (1-k) \cdot \frac{d^2}{2R} \qquad (12.6)$$

Wielkość *dr* oznaczająca *wpływ refrakcji* na określenie wysokości metodą niwelacji trygonometrycznej wynosi więc:

$$dr = -k \cdot \frac{d^2}{2R} \qquad (12.7)$$

Wzór na przewyższenie, zawierający *łączny* wpływ $du = dp + dr$ krzywizny Ziemi i refrakcji, przyjmie postać:

$$h = d \cdot \mathrm{ctg}\,z + (1-k) \cdot \frac{d^2}{2R} \qquad (12.8)$$

Wyznaczoną trygonometrycznie różnicę wysokości punktów terenowych *S, P* można więc zapisać jako:

$$\Delta H_{S-P} = H_P - H_S = d \cdot \mathrm{ctg}\,z + i - s + (1-k) \cdot \frac{d^2}{2R} \qquad (12.9)$$

Przy bardzo dokładnych obliczeniach i długich celowych należy uwzględnić fakt, że powyższy wzór ma charakter uproszczony*, ponieważ pominięto w nim zaniedbywalne składniki oraz założono, że powierzchnię odniesienia stanowi kula (zamiast elipsoidy), zaś odległość *d* (pozioma i zredukowana do poziomu morza) nie przekracza pięciu kilometrów. Wartości łącznych poprawek *du* ze względu na krzywiznę Ziemi i refrakcję (dla współczynnika $k = 0{,}13$) zestawiono w tabeli 12.1.

Tabela 12.1. Wartości poprawek: $du = dp + dr = 0{,}87 \cdot \frac{d^2}{2R}$

Odległość - **kilometry**	Poprawki *du* = *dp* + *dr* - metry									
	Odległość - metry									
	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	0,000	0,001	0,003	0,006	0,011	0,017	0,025	0,033	0,044	0,055
1	0,068	0,082	0,098	0,115	0,134	0,153	0,175	0,197	0,221	0,246
2	0,273	0,301	0,330	0,361	0,393	0,426	0,461	0,497	0,534	0,573
3	0,613	0,655	0,698	0,742	0,788	0,835	0,883	0,933	0,984	1,037
4	1,090	1,146	1,202	1,260	1,319	1,380	1,442	1,505	1,570	1,636
5	1,707	1,776	1,847	1,918	1,991	2,066	2,142	2,219	2,297	2,377

Dokładność trygonometrycznego określenia różnicy wysokości wyznaczymy po zastosowaniu dla funkcji (12.9) prawa przenoszenia się błędów średnich, zakładając przy tym niezmienność promienia Ziemi *R* na punktach stanowiska i celu oraz bezbłędność określenia jego długości:

* Pominięte tu wzory ścisłe wraz z ich wyprowadzeniem są zamieszczone w podręczniku T. Lazzariniego i współautorów „Geodezja. Geodezyjna osnowa szczegółowa"; PPWK Warszawa-Wrocław; 1990.

$$m_{\Delta H} = \sqrt{\frac{d^2}{\sin^4 z}\cdot m_z^2 + \mathrm{ctg}^2 z \cdot m_d^2 + \frac{d^4}{4R^2}\cdot m_k^2 + m_i^2 + m_s^2} \tag{12.10}$$

Analiza wpływu poszczególnych składników wzoru (12.10) pozwala na stwierdzenie, że przy znacznych odległościach pomiędzy stanowiskiem a celem największy wpływ na błąd trygonometrycznego wyznaczenia różnicy wysokości ma dokładność pomiaru kąta zenitalnego, natomiast błąd długości uwydatnia się szczególnie przy stromych celowych, zmniejszających kąty z, co daje duże wartości funkcji ctg z, występującej jako współczynnik przy m_d w drugim składniku wzoru (12.10).

Przykłady:

Przyjmując pierwszy zestaw danych dla długiej celowej (d = 1 km): $m_d = \pm 0{,}02$ m; $z = 80^g \pm 0{,}0020^g$, $k = 0{,}13 \pm 0{,}1$, $m_i = m_s = \pm\ 0{,}005$ m, otrzymamy średni błąd różnicy wysokości:

$$m_{\Delta H} = \sqrt{0{,}001206 + 0{,}000042 + 0 + 0{,}000025 + 0{,}000025} = \sqrt{0{,}001298} = \pm 0{,}036 \text{ m.}$$

Dla krótkiej celowej (d = 100 m) w drugim zestawie danych, zawierającym te same wartości błędów: $m_d = \pm 0{,}02$ m; $z = 80^g \pm 0{,}0020^g$, $k = 0{,}13 \pm 0{,}1$, $m_i = m_s = \pm\ 0{,}005$ m, zmniejszenie długości celowej powoduje znaczne obniżenie wpływu błędu pomiaru kąta pionowego:

$$m_{\Delta H} = \sqrt{0{,}000012 + 0{,}000042 + 0 + 0{,}000025 + 0{,}000025} = \sqrt{0{,}000104} = \pm 0{,}010 \text{ m.}$$

12.2.3. Współczynnik refrakcji k

Założona do obliczeń wartość współczynnika refrakcji k, niezbędna do określenia wartości poprawki dr, może opierać się na przyjęciu średniej wartości tego współczynnika $k_{śr.}$ = 0,13 lub, przy dokładniejszych pomiarach, aktualnym wyznaczeniu jej w terenie. Jednoznaczne obliczenie współczynnika k jest trudne i pracochłonne, ponieważ jego wartość jest wyjątkowo niestabilna i zmienia się pod wpływem wielu czynników, wykazując duże zróżnicowanie (w zakresie 0 – 0,3) nawet w tym samym miejscu obserwacji w zależności od pory dnia i roku, zanieczyszczenia atmosfery, parametrów meteorologicznych (temperatury, ciśnienia, wilgotności powietrza) oraz pokrycia terenu. Największą wartość współczynnik refrakcji osiąga rano i wieczorem, najmniejszą zaś w południe. Do wyznaczenia współczynnika k można wykorzystać zależność (12.8). Po przekształceniu tego wzoru otrzymamy:

$$k = 1 - \frac{2R\cdot(h - d\cdot \mathrm{ctg}\, z)}{d^2} \tag{12.11}$$

Rys. 12.3. Wyznaczenie współczynnika k poprzez pomiar kątów pionowych

Innym sposobem wyznaczenia współczynnika refrakcji jest jednoczesny pomiar kątów zenitalnych z_A, z_B lub kątów pochylenia α_A, α_B na obu końcach tego samego boku *AB*. Z sumy kątów w trójkącie *ABC* (rys. 12.3) wynika, że:

$$\varphi = \delta_A + \delta_B$$

zaś z sumy kątów w czworoboku *ACBO*:

$$(180° - z_A) + (180° - z_B) + (180° - \varphi) + \gamma = 360°$$

skąd: $\varphi = 180° - (z_A + z_B) + \gamma$ oraz $\delta_A + \delta_B = 180° - (z_A + z_B) + \gamma$

Z założenia, że krzywa refrakcyjna jest łukiem kołowym, wynika równość:

$$\delta_A = \delta_B = \delta,$$

a więc: $2\delta = \gamma + 180° - (z_A + z_B),$

zaś po uwzględnieniu zależności (12.4) i wyrażeniu kątów w mierze łukowej otrzymamy:

$$k \cdot \frac{d}{R} = \frac{d}{R} + \pi - \frac{z_A + z_B}{\rho}$$

Końcowy wzór na współczynnik *k* przyjmie postać:

$$k = 1 + \frac{R}{d} \cdot \left(\pi - \frac{z_A + z_B}{\rho} \right) \tag{12.12}$$

12.3. Zastosowanie niwelacji trygonometrycznej do wyznaczania wysokości punktów poziomej osnowy szczegółowej

Zgodnie z instrukcją G-2 punkty poziomej osnowy szczegółowej kl. II w wyniku nawiązania do reperów kl. I–IV powinny mieć określone wysokości w państwowym układzie wysokościowym. Średni błąd wysokości punktu określonej metodą niwelacji trygonometrycznej nie może być przy tym większy niż ±0,10 m. Trygonometryczne wyznaczenie wysokości punktu *P* opiera się na pomiarze wielkości: *z, d, i, s* oraz obliczeniu różnicy wysokości dwóch punktów: znanego i szukanego wg wzoru (12.9). Kąty pionowe należy pomierzyć w trzech seriach teodolitem jednosekundowym jednocześnie z kątami poziomymi. Różnice pomiędzy wynikami poszczególnych serii nie mogą przekraczać ±10″ (30^{cc}), zaś średni błąd pomiaru kąta ±5″ (15^{cc}).

12.3.1. Pomiar wysokości instrumentu i sygnału celowniczego

Podczas trygonometrycznego pomiaru wysokości ze stanowisk naziemnych należy mierzyć dwukrotnie i niezależnie od siebie wysokości: instrumentu – *i* oraz sygnału – *s*, z błędem nie większym niż ±5 mm, przy czym dopuszczalna rozbieżność obydwu pomiarów nie może przekraczać ±10 mm. Dokładność pomiaru wielkości: *i*, *s* ma istotny wpływ na dokładność wyznaczenia różnicy wysokości metodą trygonometryczną, zwłaszcza przy krótkich celowych. Bezpośredni pomiar tych wielkości za pomocą ruletki lub łaty przykładanej do centra znaku i punktu wyznaczającego na dźwigarze położenie osi obrotu lunety daje błąd rzędu ±0,02 m, a zatem nie jest zbyt dokładny. Najczęściej wykorzystujemy łatę,

ustawioną stopką na znaku i z konieczności odchyloną od pionu. Odczyt i' wykonujemy na wysokości środka okularu lunety ustawionej w poziomie (rys. 12.4), zaś wysokość instrumentu wynoszącą: $i = \sqrt{i'^2 - c^2}$, obliczamy na podstawie twierdzenia Pitagorasa: przy czym dla poprawy dokładności należy określić długość odcinka c, (przeciętnie 10 – 12 cm). Jest to odległość punktu styku lica łaty i osłony soczewki ocznej okularu od osi obrotu instrumentu. Łatwa do obliczenia różnica $\Delta i = i' - i$, jest poprawką, którą odejmujemy od pomierzonej łatą wysokości i' dla typowej wysokości instrumentu 1,4 – 1,5 m różnica Δi przeważnie nie przekracza wartości 10 mm.

Rys. 12.4. Pomiar wysokości instrumentu przy użyciu łaty

Rys. 12.5. Pomiar wysokości i, s za pomocą sztywnego pręta

Zwiększenie dokładności pomiaru wysokości: i, s można uzyskać, stosując podobny do pionu drążkowego, wyskalowany, cienki pręt, wsuwany od góry głowicy przez otwór wydrążony w śrubie sprzęgającej statywu. Umożliwia on zmierzenie odległości i_s pomiędzy centrem znaku a górną krawędzią spoziomowanej spodarki (rys. 12.5). Jeśli starannie pomierzymy stałe dla danego zestawu sprzętu odległości pionowe: s_t, i_t, wtedy możemy też określić wysokości instrumentu i tarczy celowniczej z błędem do ±2 mm. Najdokładniej można określić wysokość osi celowej H_c w przypadku, gdy w pobliżu stanowiska S, tj. w odległości do 100 m znajduje się punkt osnowy wysokościowej lub specjalnie zaniwelowany reper roboczy R (rys. 12.6) o znanej wysokości H_R.

Ustawiamy łatę niwelacyjną na punkcie R i przy poziomej lunecie teodolitu, w obu jej położeniach dokonujemy na łacie odczytów: t_I, t_{II}. Na kole pionowym teodolitu w I położeniu lunety (KL) należy nastawić odczyt 90° (100^g), zaś w II położeniu (KP) – odczyt 270° (300^g). Ewentualna rozbieżność wspomnianych odczytów jest przeważnie rezultatem błędu miejsca zera kręgu pionowego. Poziome ustawienie osi celowej odpowiada odczytowi średniemu $t_{śr}$. Jak wynika z rys. 12.6 wysokość osi celowej wyniesie:

Rys. 12.6. Wyznaczenie wysokości osi celowej na punkcie znanym

$$H_c = H_R + t_{śr} = H_S + i$$

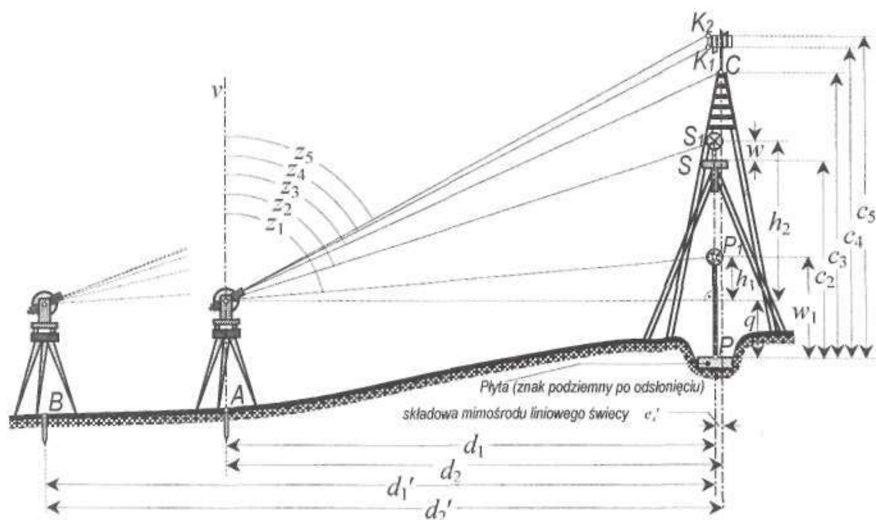
Jeśli oprócz wysokości reperu znana jest także wysokość stanowiska teodolitu, wówczas wysokość instrumentu obliczymy jako:

$$i = H_R - H_S + t_{śr} = \Delta H_{R\text{-}S} + t_{śr} \tag{12.13}$$

W podobny sposób można też określić wysokość instrumentu, gdy zamiast wysokości punktów R, S znamy samą różnicę wysokości $\Delta H_{R\text{-}S}$ wyznaczoną metodą niwelacji geometrycznej ze środka. Punkt R nie musi wtedy być reperem, lecz dowolnym punktem specjalnie utrwalonym w pobliżu stanowiska niwelacji trygonometrycznej.

12.3.2. Wyznaczenie wysokości stolika i innych elementów wieży triangulacyjnej

Dla pomiarów osnowy wykonywanych ze stolika obserwacyjnego wieży triangulacyjnej, należy za pomocą niwelacji trygonometrycznej w sposób niezależny dwukrotnie (ze stanowisk: A, B), określić wysokości: c_2, c_3, c_4, c_5 poszczególnych elementów zabudowy punktu względem centra (P) uprzednio odkopanego znaku podziemnego, a w szczególności wysokości: stolika (S), szczytu daszka (C), obu krawędzi krzyżaka świecy (K_1, K_2) (rys. 12.7). W tym celu ustalamy położenie stanowisk A,B instrumentu, sygnalizujemy centr znaku podziemnego i środek powierzchni stolika.



Rys. 12.7. Wyznaczenie wysokości elementów zabudowy punktu triangulacyjnego

Na stanowisku A w dwóch położeniach lunety mierzymy kąty zenitalne: z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 do poszczególnych elementów zabudowy punktu triangulacyjnego. Ponadto dokonujemy pomiaru odległości poziomej d_1 pomiędzy stanowiskiem A i centrem znaku podziemnego P. Jeśli punkty C i P nie znajdują się na tej samej linii pionowej, wówczas dla uzyskania odległości d_2 należy skorygować pomierzoną odległość d_1 o składową ekscentru liniowego (patrz ust. 6.2.1) punktu C w kierunku celowej A-P (rys. 12.7). Dla kontroli ponowne wyznaczenie wysokości elementów budowli triangulacyjnej wykonujemy także ze stanowiska B. Wyniki wyżej wymienionych pomiarów oraz rachunek wysokości odcinków pionowych: c_2, c_3, c_4, c_5, liczonych od górnej powierzchni płyty do poszczególnych elemen-

tów wieży, zestawiamy w specjalnym formularzu (tabela 12.2). Rezultaty dwóch niezależnych wyznaczeń nie powinny się od siebie różnić o wartość przekraczającą ±0,03 m.

Tabela 12.2. Pomiar wysokości elementów budowli triangulacyjnej

Miejsce celowania	Ozn.	Koło	Kąt zenitalny z											
			Stanowisko A						Stanowisko B					
			Odczyt			Kąt z			Odczyt			Kąt z		
Sygnał na znaku P_1	z_1	KL	99	52	00	99	52	15	99	41	50	99	41	80
		KP	300	47	70				300	57	90			
Sygnał na stoliku obs. S_1	z_2	KL	95	67	20	95	67	45	95	18	10	95	18	30
		KP	304	32	30				304	81	50			
Szczyt daszka C	z_3	KL	92	03	60	92	03	80	91	18	10	91	18	35
		KP	307	96	00				308	81	40			
Dolna krawędź krzyżaka K_1	z_4	KL	91	10	20	91	10	45	90	15	40	90	15	60
		KP	308	89	30				309	84	20			
Górna krawędź krzyżaka K_2	z_5	KL	90	85	80	90	86	05	89	88	60	89	88	75
		KP	309	13	70				310	11	10			

Odległości, wysokości sygnałów	d_1=131,45; d_2=131,45		d_1=119,25; d_2=119,25	
	w_1=2,11; w_2=0,26	Stanowisko A	Stanowisko B	Wysokość średnia względem płyty
Sygnał na znaku P_1	$h_1=d_1 : \mathrm{tg}\, z_1$	0,99	1,09	
	$w_1-h_1=q$	1,12	1,02	
Sygnał na stoliku obs. S_1	$h_2=d_1 : \mathrm{tg}\, z_2$	8,95	9,04	9,80
	$c_2=h_2+q-w_2$	9,81	9,80	
Szczyt daszka C	$h_3=d_2 : \mathrm{tg}\, z_3$	16,53	16,62	17,64
	$c_3=h_3+q$	17,65	17,64	
Dolna krawędź krzyżaka K_1	$h_4=d_2 : \mathrm{tg}\, z_4$	18,49	18,59	19,61
	$c_4=h_4+q$	19,61	19,61	
Górna krawędź krzyżaka K_2	$h_5=d_2 : \mathrm{tg}\, z_5$	19,00	19,10	20,12
	$c_5=h_5+q$	20,12	20,12	

Wysokość instrumentu nad górną powierzchnią płyty, potrzebna do wykonania pomiaru trygonometrycznego różnicy wysokości punktów osnowy, jest równa wysokości stolika c_3 powiększonej o odcinek pionowy równy odległości i_i osi obrotu lunety teodolitu ustawionego na spodarce wieżowej od powierzchni stolika. Wielkość tę należy pomierzyć przy pomocy liniału z podziałem milimetrowym. Jeśli zamiast teodolitu na stoliku umieszczono sygnał tarczowy, wówczas do wysokości stolika c_3 dodajemy pomierzony w ten sposób odcinek pionowy s_i liczony od powierzchni stolika do środka sygnału tarczowego.

12.3.3. Mimośrodowy pomiar kątów pionowych

Stolik obserwacyjny, na którym za pośrednictwem spodarki wieżowej umieszczony jest teodolit oraz świeca wieży triangulacyjnej, będąca obiektem celowania z innych stanowisk, są przeważnie osadzone ekscentrycznie względem właściwego punktu terenowego. Sposoby wyznaczania elementów mimośrodu i sposobu poprawiania kątów pozio-

mych i odległości zostały opisane w ust. 6.2. Konieczność korygowania obserwacji ze względu na mimośrody stanowisk i celów dotyczy również kątów pionowych, mierzonych podczas trygonometrycznego wyznaczania wysokości punktów osnowy poziomej.

Rys. 12.8. Mimośród poziomy stanowiska przy pomiarze kątów pionowych

Gdy podczas pomiaru kąta zenitalnego na stanowisku teodolitu występuje ekscentr poziomy e_1 (rys. 12.8), wtedy zamiast kąta z z punktu centrycznego C zostanie z mimośrodowego stanowiska S pomierzony kąt z', przy czym: $z = z' + \varepsilon_1$. Z twierdzenia sinusowego w trójkącie $C'PS'$ wynika związek:

$$\sin \varepsilon_1 = \frac{\sin \alpha'}{d'} \cdot e_1$$

Biorąc pod uwagę zależność z trójkąta $C'PP'$:

$$d' = \frac{d}{\cos \alpha}$$

oraz zakładając małą wartość kąta ε_1, a wobec tego: $\sin \varepsilon_1 \approx \varepsilon_1$, a także $\cos \alpha \approx \cos \alpha'$, napiszemy:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sin \alpha' \cdot \cos \alpha'}{d} \cdot e_1 = \frac{\sin 2\alpha'}{2d} \cdot e_1$$

Rys. 12.9. Mimośród poziomy celu przy pomiarze kątów pionowych

Powyższy wzór zapisany dla kątów zenitalnych, po uwzględnieniu $\alpha' = 90° - z'$, na poprawkę ε_1 wyrażoną w decymiligradach (^{cc}) przyjmie postać:

$$\varepsilon_1^{cc} = \frac{e_1 \cdot \sin z' \cdot \cos z'}{d} \cdot \rho^{cc} = \frac{e_1 \cdot \sin 2z'}{2d} \cdot \rho^{cc} \qquad (12.14)$$

Podobny wzór można też wyprowadzić na poprawkę kąta zenitalnego ze względu na mimośród celu (rys. 12.9). Zgodnie z twierdzeniem sinusów w trójkącie $S'P'P$ oraz wcześniejszymi założeniami napiszemy:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sin\alpha' \cdot \cos\alpha'}{d} \cdot e_2 = \frac{\sin 2\alpha'}{2d} \cdot e_2$$

oraz dla kątów zenitalnych w mierze gradowej:

$$\varepsilon_2^{cc} = \frac{e_2 \cdot \sin z' \cdot \cos z'}{d} \cdot \rho^{cc} = \frac{e_2 \cdot \sin 2z'}{2d} \cdot \rho^{cc} \qquad (12.14\,a)$$

Poprawki: ε_1, ε_2 mogą być dodatnie lub ujemne. Znak dodatni poprawki ε, zwiększającej wartość kąta zenitalnego z' do kąta z, wystąpi wtedy, gdy $z > z'$, czyli rzut prostokątny mimośrodu liniowego e znajduje się wewnątrz boku d (rys. 12.8), natomiast znak minus poprawki wystąpi wówczas, gdy mimośród wypada na zewnątrz boku, a więc na jego przedłużeniu (rys. 12.9).

Gdy podczas pomiaru kąta pionowego występują jednocześnie oba mimośrody: stanowiska i celu, wtedy poprawka łączna ε kąta zenitalnego z' jest równa algebraicznej sumie obu poprawek: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Poprawka ta odpowiada sumarycznemu mimośrodowi stanowiska i celu: $e = e_1 + e_2$. Zamiast wprowadzania poprawek do kąta pionowego można od razu poprawić przewyższenie h' poprzez obliczenie jego poprawki Δh i dodanie jej do przewyższenia uzyskanego na podstawie pomierzonego kąta z'.

$$h = h' + \Delta h = d \cdot \text{ctg}\, z' + e \cdot \text{ctg}\, z' = (d + e) \cdot \text{ctg}\, z' \qquad (12.15)$$

12.3.4. Niwelacja punktów osnowy poziomej

Zgodnie z instrukcją G-1 punkty osnowy poziomej I – III klasy powinny mieć wyznaczone wysokości w układzie państwowym. Dla wyznaczenia wysokości punktów poziomej osnowy podstawowej i szczegółowej jako punkty nawiązania geodezyjnego należy przyjmować punkty wysokościowe znajdujące się w sieciach niwelacyjnych o błędzie średnim nie przekraczającym ±10 mm/km. Wysokość centra punktu powinna być wyznaczona z błędem średnim nie większym niż ±0,10 m. Dla punktów nawiązania wysokościowego położonych w odległości poniżej 300 m od punktów wyznaczanych pomiar wysokościowy wykonuje się metodą niwelacji geometrycznej z błędem nie większym niż $\pm 10\,\text{mm}\sqrt{L}$ (gdzie: L – długość ciągu nawiązującego w km). Z tą samą dokładnością trzeba określać wysokości reperów roboczych, niezbędnych do nawiązania niwelacji trygonometrycznej, dla której kąty pionowe należy mierzyć z błędem średnim nie przekraczającym ±5″ (15^{cc}). Jeśli pomiar kątów pionowych jest wykonywany mimośrodowo, wtedy powinno się wprowadzać odpowiednie poprawki, o ile ich wartość przekracza dopuszczalny błąd pomiaru kąta. Ilość elementów wyznaczających wysokość nie może być mniejsza od trzech. Punkty stabilizowane wielopoziomowo muszą mieć pomierzone wysokości dla znaku naziemnego i znajdującego się pod nim znaku podziemnego.

Różnice wysokości dla poszczególnych boków wyznacza się w obydwu kierunkach: głównym i powrotnym z uwzględnieniem wpływów krzywizny Ziemi i refrakcji, przy czym w zależności od długości celowej L rozbieżność bezwzględnych wartości różnic wysokości $d_{\Delta H}$ nie powinna przekraczać wartości podanych w tabeli 12.3.

Tabela 12.3. Dopuszczalne różnice dwukrotnego trygonometrycznego pomiaru różnicy wysokości

Długość celowej L [km]	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Dopuszczalna różnica $d_{\Delta H}$ [m]	0,020	0,035	0,050	0,070	0,090	0,105

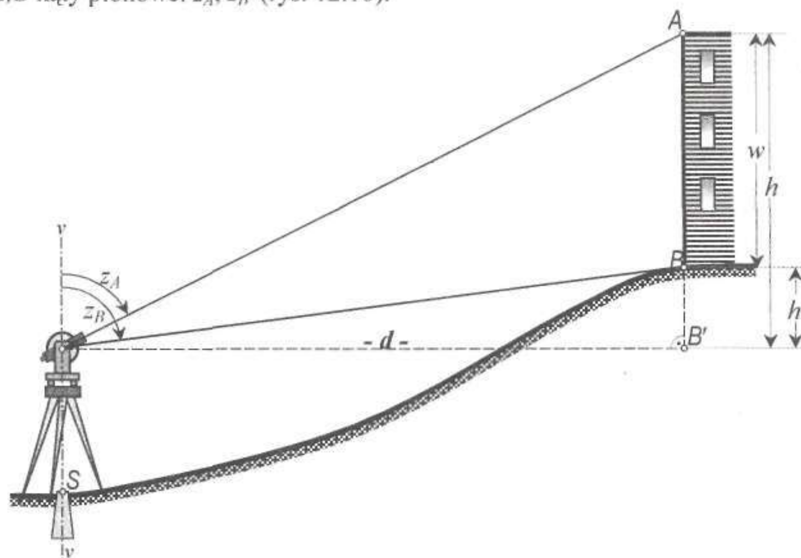
12.4. Wyznaczanie odległości pionowych i względnych wysokości obiektów

Poszukiwaną wysokość w obiektu (rys. 12.10) wyznaczają dwa wyraźne punkty celu: A (na górze obiektu), B (na dole obiektu), widoczne z odpowiednio dobranego stanowiska S. Zadanie wyznaczenia wysokości względnej rozpatrzymy w następujących przypadkach uzależnionych od rzeźby terenu, położenia obiektu i stanowiska instrumentu:

a) obiekt jest dostępny i można pomierzyć pomiędzy nim a stanowiskiem S odległość poziomą d,
b) obiekt jest dostępny, lecz warunki terenowe i posiadany sprzęt pomiarowy nie pozwalają na bezpośredni pomiar odległości d,
c) obiekt jest niedostępny do bezpośredniego i pośredniego określenia odległości d.

Przypadek a:

Do określenia wysokości względnej w obiektu dostępnego zarówno dla sygnalizacji jak i bezpośredniego pomiaru odległości d należy zmierzyć tę długość oraz dla punktów celu: A,B kąty pionowe: z_A, z_B (rys. 12.10).



Rys. 12.10. Wyznaczenie wysokości w, gdy można bezpośrednio pomierzyć odległość d

Wysokość obiektu w obliczymy na podstawie różnicy przewyższeń punktów A, B:

$$w = h_A - h_B = d \operatorname{ctg} z_A - d \operatorname{ctg} z_B$$

a stąd:

$$w = d\,(\operatorname{ctg} z_A - \operatorname{ctg} z_B) \tag{12.16}$$

Przypadek b:

Przypadek ten występuje wtedy, gdy obiekt jest dostępny, lecz nie ma warunków do bezpośredniego zmierzenia odległości d. Można wówczas założyć bazę pionową, korzystając przy tym np. z ustawionej na punkcie B łaty niwelacyjnej o znanej długości l. W porównaniu z wcześniejszym przypadkiem a musimy dodatkowo zmierzyć kąt pionowy z_C dla celowej skierowanej do punktu C na końcu łaty (rys. 12.11).

Rys. 12.11. Wyznaczenie wysokości w, gdy obiekt jest dostępny, lecz nie można bezpośrednio pomierzyć odległości d

Odległość d można teraz określić w sposób pośredni, ponieważ znaną wysokość łaty l wyraża wzór:

$$l = d\,(\text{ctg}\, z_C - \text{ctg}\, z_B),$$

a stąd nieznana długość d wynosi:

$$d = \frac{l}{\text{ctg}\, z_C - \text{ctg}\, z_B}$$

Po podstawieniu powyższej zależności do wzoru (12.16), otrzymamy:

$$w = l \cdot \frac{\text{ctg}\, z_A - \text{ctg}\, z_B}{\text{ctg}\, z_C - \text{ctg}\, z_B} \qquad (12.17)$$

Przypadek c:

Gdy mierzony obiekt jest całkowicie niedostępny, wówczas projektujemy dwa stanowiska instrumentu S_1, S_2, które wraz z linią AB leżą w jednej płaszczyźnie pionowej (rys. 12.12). Stanowisko S_2 musi być zatem wtyczone na prostą S_1-B. Pomiędzy stanowiskami należy także zmierzyć odległość a, zaś na obu stanowiskach kąty pionowe: z_A, z_B, z'_A, z'_B na górny i dolny skrajny punkt obiektu. Wysokość obiektu w określoną z obu stanowisk można zapisać układem dwóch równań, w którym drugą niewiadomą jest nieznana odległość d:

- na stanowisku S_1:

  $w = d\,(\operatorname{ctg} z_A - \operatorname{ctg} z_B) = d \cdot m$, przy czym $m = \operatorname{ctg} z_A - \operatorname{ctg} z_B$

- na stanowisku S_2:

  $w = (d - a) \cdot (\operatorname{ctg} z'_A - \operatorname{ctg} z'_B) = (d - a) \cdot n$, przy czym $n = \operatorname{ctg} z'_A - \operatorname{ctg} z'_B$

Po zrównaniu prawych stron powyższych równań można wyznaczyć odległość d:

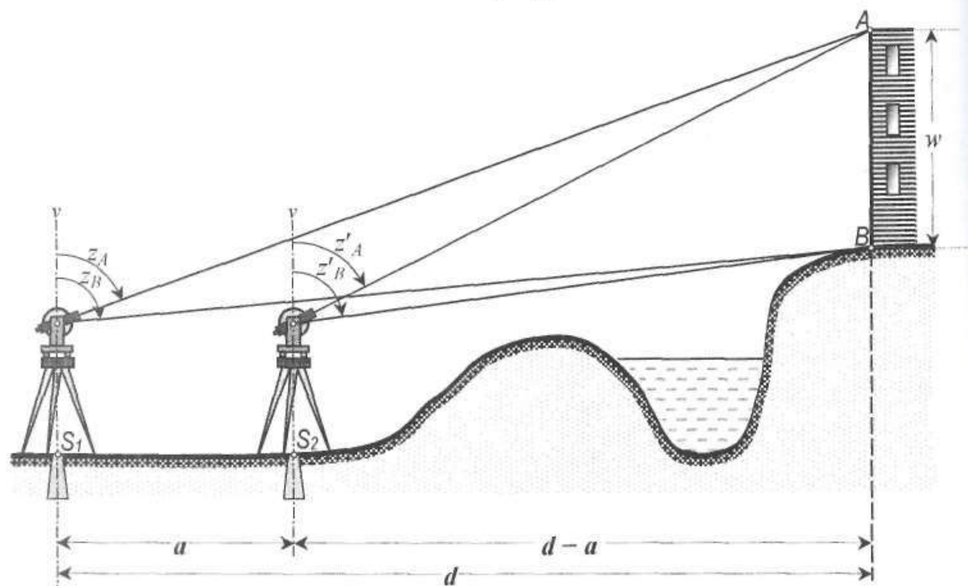
$$d \cdot m = (d - a) \cdot n$$

stąd:

$$d = \frac{a \cdot n}{n - m},$$

a ponieważ $w = d \cdot m$ szukana wysokość w wyniesie:

$$w = \frac{a \cdot m \cdot n}{n - m} \tag{12.18}$$



Rys. 12.12. Pomiar wysokości w, gdy obiekt jest niedostępny

12.5. Trygonometryczne wyznaczanie bezwzględnych wysokości punktów

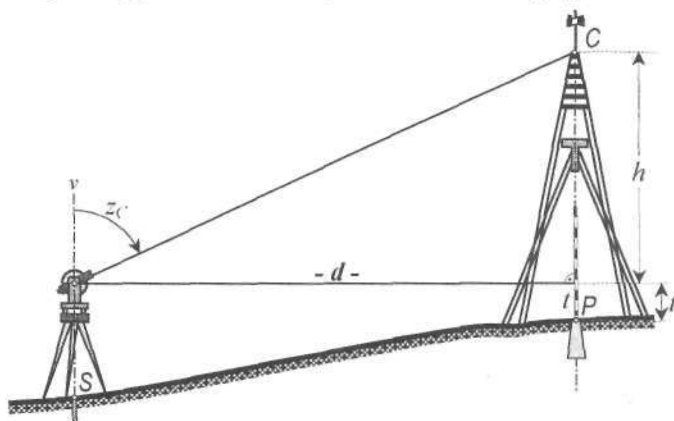
12.5.1. Wyznaczanie wysokości punktu położonego na obiekcie dostępnym do pomiaru odległości d

Zadanie polega na określeniu wysokości niedostępnego punktu C, położonego np. na szczycie daszka podwyższonego sygnału geodezyjnego lub wieży triangulacyjnej, gdy pod punktem C znajduje się znak geodezyjny z centrem P o znanej wysokości H_P. Jednocześnie możliwy jest pomiar długości poziomej pomiędzy punktami S,C.

Na stanowisku S mierzymy kąt zenitalny z_C, po czym ustawiamy łatę niwelacyjną na punkcie P tj. na centrze znaku pod sygnałem. Przy poziomej osi celowej teodolitu wykonujemy na łacie odczyt t. Zgodnie z rys. 12.13 wysokość punktu C wynosi:

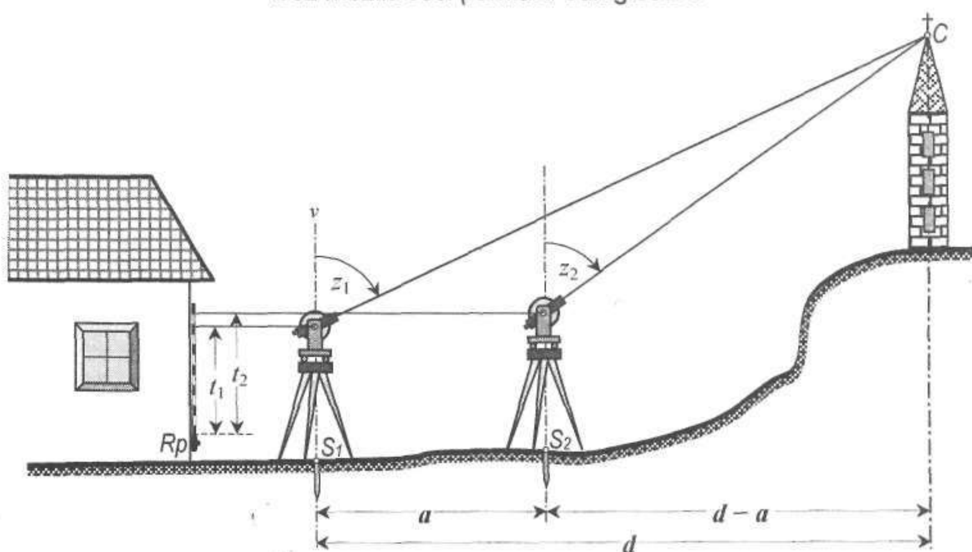
$$H_C = H_P + t + d \cdot \operatorname{ctg} z_C \tag{12.19}$$

Jeśli punkty C i P nie znajdują się na tej samej linii pionowej, wtedy pomierzoną odległość d należy skorygować o składową ekscentru liniowego punktu C w kierunku celowej S-P.



Rys. 12.13. Pomiar wysokości punktu na obiekcie dostępnym

12.5.2. Wyznaczenie wysokości punktu położonego na obiekcie niedostępnym, bez możliwości pomiaru odległości d



Rys. 12.14. Pomiar wysokości punktu położonego na obiekcie niedostępnym z nawiązaniem do reperu

Zadanie zilustrowane na rys. 12.14 jest podobne do omówionego wcześniej przypadku wyznaczenia wysokości względnej obiektu niedostępnego, jednak w tych warunkach dla określenia wysokości bezwzględnej, konieczne jest nawiązanie stanowisk S_1, S_2 do reperu *Rp* poprzez wykonanie odczytów t_1, t_2 przy poziomej osi celowej. Podobnie jak poprzednio należy wtyczyć punkty S_1, S_2, C na jedną płaszczyznę pionową i pomierzyć odległość a pomiędzy stanowiskami teodolitu.

Na podstawie obserwacji wykonanych na obu stanowiskach teodolitu wysokość punktu C można wyrazić równaniami:

$$H_C = H_{Rp} + t_1 + d\cdot\text{ctg}\, z_1 \tag{12.20}$$

$$H_C = H_{Rp} + t_2 + (d - a)\cdot\text{ctg}\, z_2 \tag{12.21}$$

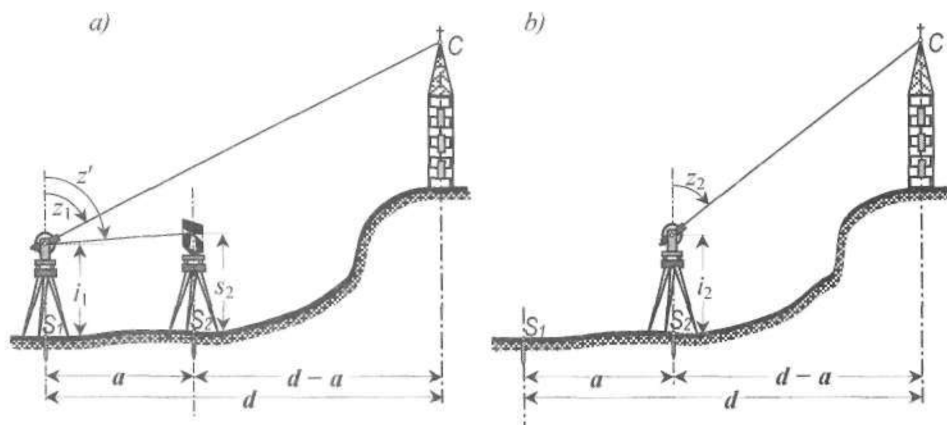
Po zrównaniu prawych stron i prostych przekształceniach możemy określić nieznaną odległość d, wynoszącą:

$$d = \frac{t_2 - t_1 - a\cdot\text{ctg}\, z_2}{\text{ctg}\, z_1 - \text{ctg}\, z_2} \tag{12.22}$$

Po podstawieniu obliczonej odległości d do wzorów (12.20), (12.21) otrzymamy dwukrotnie wysokość H_C. Uzyskane wyniki powinny być jednakowe, ponieważ zadanie to jest jednoznacznie wyznaczalne, natomiast podwójne obliczenie H_C wykonujemy dla sprawdzenia poprawności rachunku.

Gdy punktem o znanej wysokości jest jedno ze stanowisk instrumentu np. stanowisko S_1, wtedy po zmierzeniu wielkości pokazanych na rys. 12.15 a można za pomocą niwelacji trygonometrycznej określić wysokość drugiego stanowiska S_2:

$$H_2 = H_1 + i_1 + d\cdot\text{ctg}\, z'_1 - s_2$$



Rys. 12.15. Pomiar wysokości punktu na obiekcie niedostępnym z nawiązaniem do stanowiska

Po zastąpieniu na stanowisku S_2 sygnału celowniczego przez teodolit, wykonujemy pomiar kąta pionowego z_2 i wysokości instrumentu i_2 (rys. 12.15 b). Znając wysokości obu stanowisk można zapisać dwa równania wyrażające wysokość punktu C:

$$H_C = H_1 + i_1 + d\cdot\text{ctg}\, z_1 \tag{12.23}$$

$$H_C = H_2 + i_2 + (d - a)\cdot \text{ctg}\, z_2 \tag{12.24}$$

Po zrównaniu prawych stron powyższych równań określimy odległość d:

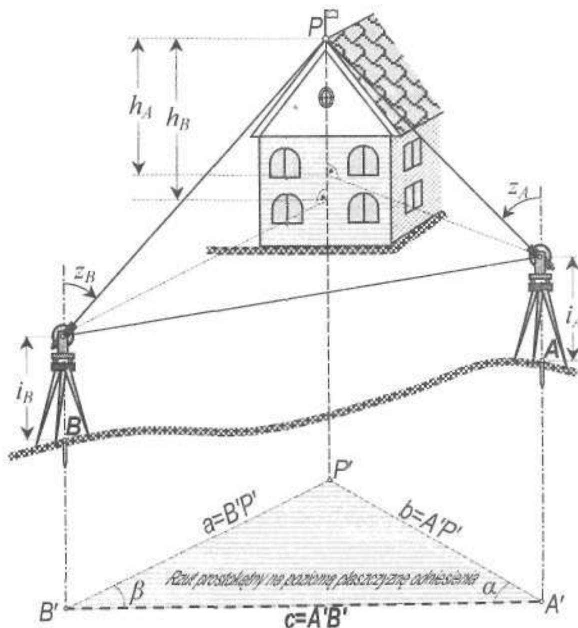
$$d = \frac{H_2 - H_1 + i_2 - i_1 - a\cdot \text{ctg}\, z_2}{\text{ctg}\, z_1 - \text{ctg}\, z_2} \tag{12.25}$$

Podobnie jak poprzednio po obliczeniu odległości d wyznaczamy dwukrotnie (dla kontroli) wysokość punktu C na podstawie równań: (12.23), (12.24).

12.6. Wyznaczenie położeń punktów przestrzennym wcięciem w przód

Przestrzenne wcięcie w przód (rys. 12.16) jest konstrukcją polegającą na połączeniu kątowego wcięcia w przód na płaszczyźnie z trygonometrycznym wyznaczeniem wysokości punktu wcinanego. Do tego celu punkty bazowe A, B muszą być także określone przestrzennie za pomocą trzech współrzędnych: X, Y, H.

Uzupełnienie pomiaru wcięcia o elementy wysokościowe nie zwiększa zbytnio jego pracochłonności w porównaniu z płaskim wcięciem w przód, ponieważ trzeba dodatkowo zmierzyć tylko wysokości instrumentu i_A, i_B na stanowiskach A, B oraz kąty pionowe z_A, z_B, które bez trudu uzyskamy po wycelowaniu do punktu P i odczytaniu obu kół podziałowych: H oraz V podczas pomiaru kątów poziomych α, β. Długości boków wcinających niezbędne do obliczenia przewyższeń określimy w oparciu o twierdzenie sinusowe w trójkącie ABP lub na podstawie współrzędnych punktów A, B, P, po uprzednim wykonaniu zadania wcięcia płaskiego.



Rys. 12.16. Przestrzenne wcięcie w przód

Tok obliczenia części wysokościowej wcięcia przestrzennego obejmuje następujące czynności:

1. Obliczenie długości bazy wcięcia c w oparciu o współrzędne punktów A,B:
$$c = d_{AB} = \sqrt{\Delta x_{AB}^2 + \Delta y_{AB}^2}$$
2. Obliczenie długości boków wcinających ze współrzędnych A,B,P lub na podstawie twierdzenia sinusowego:
$$a = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \sin\beta \quad \text{oraz} \quad b = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \sin\alpha$$
3. Dwukrotne obliczenie wysokości punktu P w oparciu o obserwacje wykonane z obydwu końców bazy wcięcia:
$$H_P' = H_A + i_A + b \cdot \operatorname{ctg} z_A \quad \text{oraz} \quad H_P'' = H_B + i_B + a \cdot \operatorname{ctg} z_B$$
4. Gdy obydwa wyniki wykazują zgodność, wówczas ostateczna wysokość punktu P jest równa średniej arytmetycznej:
$$H_P = \frac{H'_P + H''_P}{2}$$

Dokładność obliczenia wysokości za pomocą przestrzennego wcięcia w przód można określić po zastosowaniu prawa przenoszenia się błędów do funkcji:
$$H_P = H_A + i + b \cdot \operatorname{ctg} z - s$$

Przedstawia on zależność potrzebną do obliczenia wysokości punktu celu wyznaczonej trygonometrycznie z pojedynczego stanowiska instrumentu (tu stanowiska A):
$$m_{H_P} = \sqrt{m_{H_A}^2 + m_i^2 + \operatorname{ctg}^2 z \cdot m_b^2 + \frac{b^2}{\sin^4 z} \cdot m_z^2 + m_s^2} \tag{12.26}$$

Występujący powyżej średni błąd m_b boku b obliczonego na podstawie twierdzenia sinusów wyraża wzór:
$$m_b = \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 \cdot m_c^2 + \left(\frac{b}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\right)^2 \cdot m_b^2 + \left(\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2 \cdot m_a^2} \tag{12.27}$$

Analogiczny wzór można także zapisać dla stanowiska B i wychodzącego z niego boku a.

12.7. Trygonometryczny pomiar ciągów wysokościowych

Na terenach o słabo zróżnicowanym urzeźbieniu ciągi niwelacyjne, wiążące ze sobą punkty osnowy pomiarowej realizowanej dla potrzeb zdjęcia wysokościowego, są zakładane przeważnie metodą niwelacji geometrycznej, jednak w terenach o znacznych spadkach bardziej uzasadnione ekonomicznie i dokładnościowo jest wyznaczanie wysokości osnowy pomiarowej za pomocą niwelacji trygonometrycznej. Dla potrzeb zdjęcia sytuacyjnego prowadzonego jednocześnie wraz z pomiarem rzeźby terenu ciągi sytuacyjno-wysokościowe utworzone przez ciągi stanowisk instrumentu są obecnie mierzone za pomocą tachimetrów typu *total station*. Pozwala to na wszechstronne wykorzystanie pomiaru długości boków ciągu zarówno do późniejszego określenia przyrostów: Δx, Δy, jak i przewyższeń h, zaś podczas pomiaru kątów przy tym samym wycelowaniu na sygnały ustawione na sąsiednich punktach ciągu, z łatwością można określać i rejestrować odczyty obydwu kół podziałowych: poziomego H i pionowego V. Jedyną dodatkową, lecz niezbyt

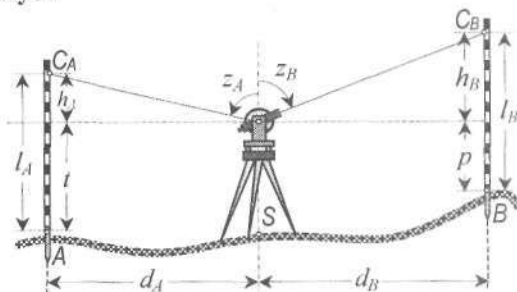
pracochłonną czynnością, niezbędną do wyznaczenia różnic wysokości na bokach ciągu, jest pomiar na każdym stanowisku wysokości instrumentu i wysokości sygnałów wyznaczających cele (por. ust. 12.3.1).

Przydatność niwelacji trygonometrycznej do zakładania osnowy dla pomiaru rzeźby ujawnia się szczególnie w terenach górzystych, ponieważ ciągi niwelacji geometrycznej na stromych stokach wymagają dużej liczby stanowisk niwelatora, co bardzo zwiększa pracochłonność, zaś jednocześnie wydatnie obniża dokładność pomiaru. Pomiar trygonometryczny jest w tych warunkach o wiele wygodniejszy, zaś przy użyciu dokładnego i nowoczesnego elektronicznego oraz starannym pomiarze wysokości: instrumentu i sygnałów może się w tych warunkach również okazać dokładniejszy od technicznej niwelacji geometrycznej.

- Zgodnie z §10 nowej instrukcji G-4 (z r. 2002) pomiarowa osnowa wysokościowa ma być jednorodna, bez podziału na rzędy, wyrównywana ściśle z określeniem średnich wysokości punktów. Błąd średni wysokości m_H najmniej dokładnego punktu pomiarowej osnowy wysokościowej nie może przekroczyć 0,10 m. Z tego względu zalecanymi metodami pomiaru tej osnowy są: niwelacja geometryczna i pomiary GPS. Nie zaleca się więc stosowania do tego celu niwelacji trygonometrycznej.

Zastosowanie niwelacji trygonometrycznej zamiast niwelacji geometrycznej ze środka do pomiaru ciągów wysokościowych

Przy zakładaniu ciągów niwelacji trygonometrycznej stanowiska instrumentu mogą znajdować się na końcach boków lub w ich wnętrzu, najlepiej w środku (rys. 12.17). W tym przypadku po ustawieniu instrumentu i łat na punktach A, B celujemy na dowolne miejsca podziału każdej łaty, po czym notujemy odczyty kreski poziomej: l_A, l_B oraz kąty zenitalne: z_A, z_B. Oprócz tego należy także bezpośrednio lub pośrednio zmierzyć długości celowych: d_A, d_B.



Rys. 12.17. Pomiar trygonometryczny ciągu zastępujący niwelację geometryczną

Poziom horyzontu instrumentu wyznacza na łatach odczyty t, p, jakie zostałyby uzyskane podczas niwelacji geometrycznej, dającej różnicę wysokości: $\Delta H_{AB} = t - p$. Jak wynika z rys. 12.17 różnicę tę można obliczyć na podstawie odczytów na łacie i przewyższeń:

$$\Delta H_{AB} = (l_A - l_B) - (h_A - h_B) \tag{12.28}$$

przy czym: $h_A = d_A \cdot \text{ctg}\, z_A \quad ; \quad h_B = d_B \cdot \text{ctg}\, z_B$

Jeśli podczas celowania na każdą z łat, będziemy ustawiać kreskę poziomą na jednakowe odczyty ($l_A = l_B$) np. na 1,000 m, wówczas wzór (12.28) przyjmie prostą postać:

$$\Delta H_{AB} = h_B - h_A \tag{12.29}$$

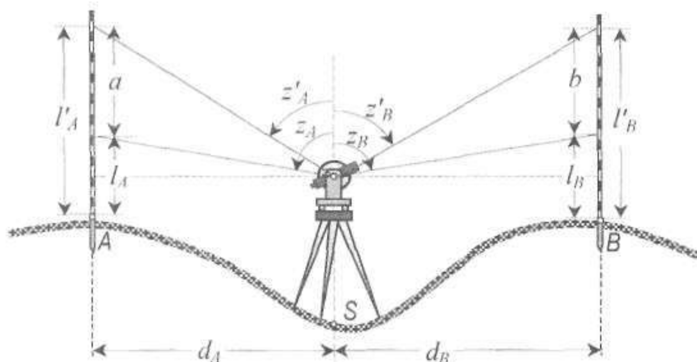
Do określenia różnicy wysokości ΔH_{AB} opisanym wyżej sposobem konieczny jest pomiar odległości: d_A, d_B. Można go uniknąć dzięki zmierzeniu dodatkowych kątów pionowych: z'_A, z'_B i odczytów na łatach: l'_A, l'_B (rys. 12.18).

Odcinki a, b zaznaczone na rys. 12.18 są równe różnicom odczytów i zarazem różnicom przewyższeń:

$$a = l'_A - l_A = h'_A - h_A = d_A \cdot (\text{ctg}\, z'_A - \text{ctg}\, z_A)\ ;\ b = l'_B - l_B = h'_B - h_B = d_B \cdot (\text{ctg}\, z'_B - \text{ctg}\, z_B)$$

Pozwala to na pośrednie wyznaczenie odległości: d_A, d_B:

$$d_A = \frac{l'_A - l_A}{\text{ctg}\, z'_A - \text{ctg}\, z_A} \quad \text{oraz} \quad d_B = \frac{l'_B - l_B}{\text{ctg}\, z'_B - \text{ctg}\, z_B} \tag{12.30}$$



Rys. 12.18. Pomiar trygonometryczny ciągu z pośrednim wyznaczeniem długości celowych

Po wyznaczeniu odległości d_A, d_B zadanie sprowadza się do omówionego wcześniej przypadku, można więc, po określeniu przewyższeń h_A, h_B oraz h'_A, h'_B, obliczyć dwukrotnie różnicę wysokości ΔH_{AB} ze wzoru (12.28).

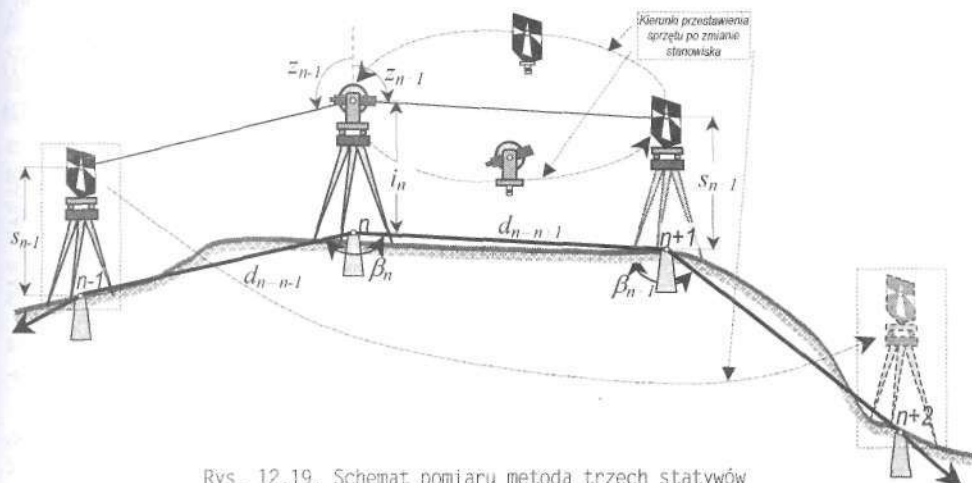
Jednoczesny pomiar sytuacyjny i wysokościowy ciągu poligonowego

W porównaniu z poprzednim sposobem różnica postępowania polega na innym usytuowaniu stanowisk instrumentu, które w tym przypadku znajdują się na punktach wierzchołkowych ciągu. Pozwala to na jednoczesne dokonanie pomiaru sytuacyjnego i wysokościowego. Dogodnym rozwiązaniem jest przy tym wykorzystanie tachimetru elektronicznego, który przy jednorazowym wycelowaniu na reflektor zwrotny umożliwia równoległy pomiar: kierunku poziomego, kąta pionowego i odległości skośnej lub poziomej*. Na każdym stanowisku należy także pomierzyć wysokości: instrumentu – i oraz sygnałów – s na obu sąsiednich punktach wierzchołkowych ciągu.

Podczas stosowania do pomiaru ciągów poligonowych dalmierzy lub dokładniejszych tachimetrów, znaczne obniżenie wpływów błędów centrowania i mimośrodowego ustawienia instrumentu oraz sygnałów, a tym samym zwiększenie dokładności pomiaru, można uzyskać poprzez równoczesne prowadzenie obserwacji kątowych i liniowych z wykorzystaniem *metody trzech statywów*. Jej nazwa pochodzi od ustawianych na co najmniej

* W zależności od ustawień dokonanych przez użytkownika możliwe jest wyświetlanie różnych zestawów wyników pomiaru (tzw. szablonów wyświetlania) np. zestaw: kąt poziomy, odległość zredukowana, przewyższenie.

trzech sąsiednich punktach ciągu sytuacyjnego lub sytuacyjno-wysokościowego dopasowanych statywów i spodarek, do których w zależności od wykonywanych czynności i położenia instrumentu można zakładać: pionownik optyczny, teodolit (tachimetr) lub tarcze celownicze. Wszystkie te przyrządy powinny być zakończone jednakowymi czopami osiowymi, pasującymi do tulej spodarek. Komplety fabryczne tarcz celowniczych i spodarek do metody trzech statywów posiadają zazwyczaj własne piony optyczne wbudowane w tarcze lub spodarki. W razie braku takich pionów konieczne jest centrowanie każdego statywu za pomocą przenośnego pionownika optycznego, pionu drążkowego, a w ostateczności samego teodolitu z wbudowanym pionem optycznym. Dokładność centrowania statywów ze spodarkami powinna się mieścić w granicach od 0,5 mm do 1 mm.



Rys. 12.19. Schemat pomiaru metodą trzech statywów

Trzy statywy ze spodarkami stanowią minimum wyposażenia niezbędnego do zrealizowania opisywanej metody, jednak dalsze korzystne usprawnienie, przyspieszenie i zwiększenie dokładności pomiaru uzyskamy poprzez zastosowanie większej liczby statywów ze spodarkami np. czterech lub pięciu. Pomiar rozpoczyna się od ustawienia i wycentrowania trzech statywów ze spodarkami, z których pierwszy umieszcza się na danym stanowisku n, zaś dwa pozostałe na sąsiadujących punktach celu po jego lewej i prawej stronie, na punktach ciągu: $n-1$, $n+1$ (rys. 12.19). Następnie do spodarek umieszczonych na skrajnych statywach zakłada się tarcze celownicze lub reflektory zwrotne, zaś na środkowym – instrument. Tarcze, pryzmaty powinny być przy tym ustawione prostopadle do osi celowej instrumentu. Po wycelowaniu ze stanowiska n na tarczę na punkcie poprzednim $n-1$, a potem na punkcie następnym $n+1$, należy dokonać zapisu lub rejestracji odczytów: kół poziomego i pionowego teodolitu oraz odległości: $d_{n-1;n}$, $d_{n;n+1}$. Jeśli nie dysponujemy dostatecznie dokładnym dalmierzem, wówczas długości obydwu boków trzeba pomierzyć bezpośrednio. Dla określenia wysokości punktów ciągu konieczny jest także pomiar wysokości: instrumentu – i_n oraz sygnałów s_{n-1}, s_{n+1}.

Po dokonaniu obserwacji na stanowisku n, należy przygotować się do pomiaru z następnego stanowiska obserwacyjnego w punkcie $n+1$ (rys. 12.19). Pozostawiamy więc na punkcie n statyw ze spodarką, zaś instrument przenosimy na kolejne stanowisko $n+1$, dokonując tam w spodarce zamiany tarczy (pryzmatu) na teodolit. Wyjętą tarczę przekładamy na punkt n i umieszczamy ją w uprzednio zwolnionej tulei spodarki. Z punktu $n-1$

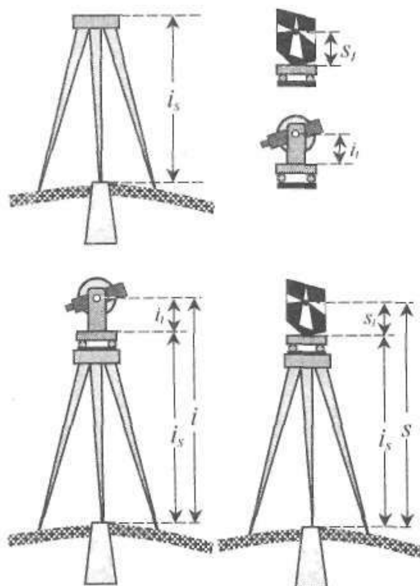
zabieramy natomiast cały zestaw tj. statyw wraz ze spodarką i tarczą, po czym przenosimy go na punkt $n+2$, gdzie dokonujemy poziomowania oraz centrowania statywu i tarczy.

Po każdej zmianie stanowiska pomiarowego przemieszczamy więc tylko jeden statyw ze spodarką i tarczą, nie zmieniając wcześniejszego ustawienia pozostałych statywów i spodarek, co stanowi istotę tzw. *centrowania wymuszonego*. Zaletą metody trzech statywów, stosowanej najczęściej do pomiaru poziomych osnów szczegółowych i zakładania ciągów sytuacyjno-wysokościowych, jest to, że centrowanie wymuszone zmniejsza błędy nieuwzględnienia mimośrodów stanowisk i celów. Wspomniane wcześniej zwiększenie liczby statywów spowoduje dalszą poprawę dokładności. Usprawnienie pomiaru wysokości: instrumentu – i oraz sygnału – s można uzyskać poprzez określanie tych wielkości z zestawienia sum poszczególnych składników pokazanych na rys. 12.20, czyli:

$$i = i_s + i_l \qquad (12.31)$$

$$s = s_s + s_l \qquad (12.32)$$

przy czym:



Rys. 12.20. Określenie wysokości instrumentu i sygnałów w metodzie trzech statywów

i_s – wysokość statywu mierzona od powierzchni znaku do górnej powierzchni głowicy,

i_l – wysokość teodolitu mierzona od krawędzi tulei spodarki do osi obrotu lunety,

s_l – wysokość tarczy celowniczej mierzona od krawędzi tulei spodarki do punktu celowania.

Wielkości: i_l, s_l można uważać za stałe. Wystarczy je na stole jednorazowo zmierzyć liniałem przed rozpoczęciem zasadniczego pomiaru. Zmienne są natomiast wysokości i_s poszczególnych statywów, jednak to samo ustawienie każdego statywu jest w opisywanej metodzie zawsze wykorzystywane dwukrotnie: do osadzenia instrumentu i tarczy celowniczej. Wysokości instrumentu i sygnału, potrzebne do obliczenia różnic wysokości punktów wyznaczających boki ciągu, uzyskamy poprzez dwukrotne zestawienie dla tej samej wysokości statywu odpowiedniej kombinacji składników, zgodnie ze wzorami: (12.31), (12.32).

Różnice wysokości dla poszczególnych boków ciągu są wielkościami wyznaczanymi dwukrotnie w kierunkach „tam" i „z powrotem":

dla pomiaru „tam" $\quad \Delta H_{n-(n+1)} = i_n + d_{n-(n+1)} \cdot \operatorname{ctg} z_{n+1} - s_{n+1}$

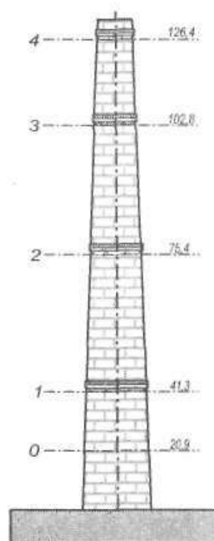
dla pomiaru „z powrotem" $\quad \Delta H_{(n+1)-n} = i_{n+1} + d_{(n+1)-n} \cdot \operatorname{ctg} z_n - s_n$

Jeśli podczas pomiaru nie popełniono błędów grubych, to wyniki obu obliczeń różnicy wysokości mają przeciwne znaki, lecz jednakowe lub nieznacznie odmienne war-

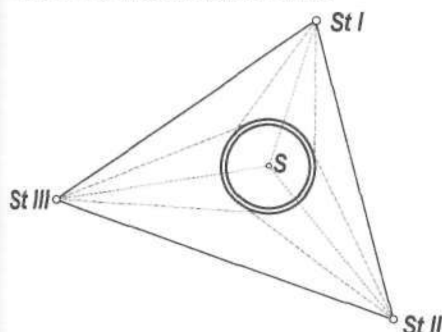
tości bezwzględne, które następnie należy uśrednić, zaś wartości średniej przypisać znak różnicy ΔH w kierunku głównym, czyli z pomiaru „tam". Pozwala to na wyeliminowanie błędów systematycznych związanych z określeniem wysokości instrumentu i sygnału oraz spowodowanych refrakcją.

12.8. Zastosowanie niwelacji trygonometrycznej do badania pionowości budowli wysmukłych

Okresowe badania wychyleń osi budowli przemysłowych wykonywane są dla monitoringu zagrożeń bezpieczeństwa, wynikających z odkształcania się budowli, przemieszczeń jej całości lub poszczególnych elementów. W przypadku wysokich kominów przemysłowych występują nieuniknione odchylenia osi trzonów kominowych od pionu spowodowane przez różne czynniki wewnętrzne i zewnętrzne takie jak: wadliwe wykonawstwo, osiadanie fundamentów, korozja materiału, parcie wiatru, nasłonecznienie, temperatura wewnątrz i na zewnątrz komina itp. W ramach obserwacji okresowych należy stwierdzić, czy wychylenia osi komina nie przekraczają wartości dopuszczalnych określonych wcześniej za pomocą obliczeń z zakresu mechaniki budowli.



Rys. 12.22. Poziomy obserwacyjne komina



Rys. 12.21. Typowe rozmieszczenie stanowisk instrumentu do badania pionowości komina

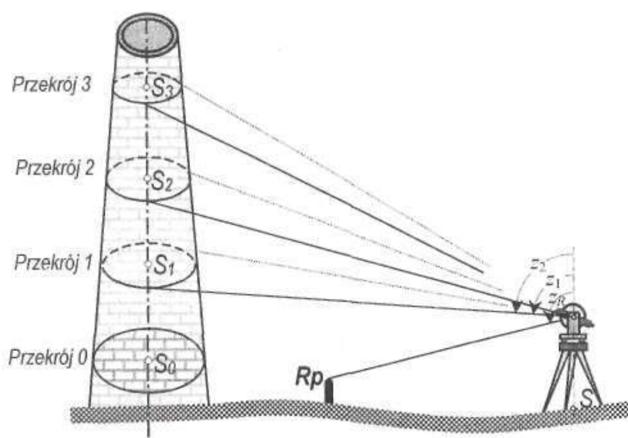
Spośród wielu znanych sposobów badania pionowości obiektów wysmukłych często stosuje się takie metody jak: okresową niwelację geometryczną reperów założonych na obwodzie fundamentu budowli, metodę fotogrametrii naziemnej, zaś przeważnie niwelację trygonometryczną w formie przestrzennych wcięć w przód. Z reguły celowanie do obiektu wykonuje się z 2–5, a najczęściej z trzech stanowiska instrumentu, które w miarę możności powinny być symetrycznie rozmieszczone w dogodnym położeniu względem komina, a więc celowe skierowane do osi komina powinny tworzyć ze sobą kąt ok. 120° (rys. 12.21).

Ze stanowisk muszą być widoczne wszystkie poziomy obserwacyjne (rys. 12.22) przewidziane do pomiaru. Odległość stanowisk od obiektu musi być tak dobrana, aby celowe do wierzchołka komina nie były zbyt strome ze względu na duży wpływ niepionowości osi v na pomiar kierunku (rys. 12.23).

Dla stanowisk, będących osnową pomiarową, należy z dokładnością ±5 mm określić współrzędne przestrzenne (X, Y, Z). Z punktów osnowy celujemy nie na trudny do identyfikacji środek obiektu, lecz na jego boczny zarys z obu stron w obrębie jednego z wielu wybranych przekrojach poziomych rozpoznawanych za pomocą szczegółów konstrukcyjnych znajdujących się na budowli (obejmy komina), dzięki czemu każda celowa stanowi

styczną do trzonu komina. Z tego względu metodę tę określa się często jako *metodę otaczających stycznych.*

Obserwacje powtarzane okresowo musi poprzedzić założenie, pomiar i obliczenie współrzędnych punktów osnowy pomiarowej (stanowisk obserwacyjnych).



Rys. 12.23. Trygonometryczny pomiar wysokości poziomów komina z pojedynczego stanowiska instrumentu

Tok postępowania w ramach każdej obserwacji okresowej obejmuje następujące czynności:

1. Pomiar ze stanowisk kątów poziomych i pionowych dla kierunków stycznych do ustalonych wcześniej przekrojów obiektu.
2. Obliczenie przybliżonych współrzędnych środków poszczególnych przekrojów i długości boków wcinających.
3. Zestawienie równań obserwacyjnych dla spostrzeżeń, którymi są wartości kierunków wyznaczających środek każdego przekroju.
4. Dokonanie oddzielnie dla każdego przekroju wyrównania, w wyniku którego uzyskuje się ocenę dokładności i wyrównane współrzędne środków przekrojów oraz długości promieni przekrojów.
5. Obliczenie wektorów odchyleń środków przekrojów od pionu.
6. Graficzna ilustracja wyników.
7. Interpretacja wyników i wnioski końcowe dotyczące stanu bezpieczeństwa obiektu.

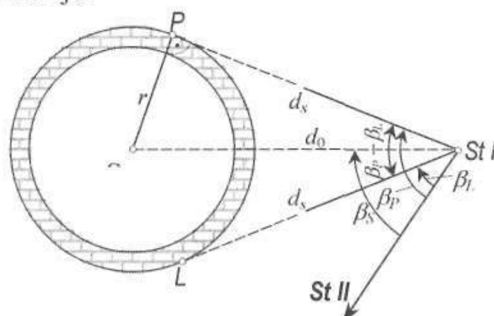
Do obserwacji kątowych wykorzystuje się teodolit o wyższej dokładności odczytu (jednosekundowy), zaś mierzone kąty poziome są zawarte pomiędzy kierunkami do sąsiednich punktów osnowy pomiarowej a stycznymi do obiektu. Dla ustalenia wysokościowego usytuowania poszczególnych przekrojów należy po wycelowaniu na kontur komina odczytywać również koło pionowe. Długości stycznych d_s oraz promień przekroju r zgodnie z rys. 12.24 można obliczyć ze wzorów:

$$r = d_0 \cdot \sin \frac{\beta_P - \beta_L}{2} \tag{12.33}$$

$$d_s = d_0 \cdot \cos \frac{\beta_P - \beta_L}{2} \tag{12.34}$$

gdzie: d_0 – odległość *St. I* od środka komina;

β_P, β_L – kąty od boku osnowy pomiarowej do prawej i lewej stycznej danego przekroju.



Rys. 12.24. Elementy wyznaczające położenie środka przekroju budowli

Po dokonaniu obserwacji kątowych dla każdego przekroju obliczamy wysokości *Z* poszczególnych przekrojów wg zasad niwelacji trygonometrycznej i zestawiamy średnie wartości kierunków stycznych (tabela 12.5) oraz przed wyrównaniem metodą pośredniczącą określamy przybliżone X_0^S, Y_0^S współrzędne środka przekroju oraz przybliżony promień r_0 danego przekroju.

Tabela 12.5. Dziennik pomiaru kierunków do poszczególnych przekrojów

Oznaczenie przekroju	Oznaczenie kierunku	Stanowisko I Kierunek	Stanowisko II Kierunek	Stanowisko III Kierunek
0	*L* *P*			
1	*L* *P*			
2	*L* *P*			

Przybliżone współrzędne X_0^S, Y_0^S poszczególnych punktów S_i, stanowiących środki każdego *i*-tego przekroju obliczamy na podstawie kątowych wcięć w przód z boków osnowy w oparciu o uśrednione kąty do odpowiednich par stycznych: $\frac{1}{2}(\beta_L + \beta_P)$ dla pojedynczego kierunku wcinającego.

Przybliżone długości promieni r_0 przekrojów budowli uzyskamy ze wzoru wyrażającego odległość środka przekroju kołowego od płaszczyzny stycznej do obiektu:

$$r_0 = \left| -X_0^S \sin \sigma + Y_0^S \cos \sigma + X_{st} \sin \sigma - Y_{st} \cos \sigma \right| \tag{12.35}$$ *

* Wzory (12.33) – (12.36) zostały podane w skrypcie AGH nr 545 „Geodezja inżynieryjno-przemysłowa" cz. II; Kraków 1977.

gdzie: σ - azymut kierunku (płaszczyzny kolimacyjnej) stycznego do obiektu, uzyskany na podstawie współrzędnych stanowisk i środków przekrojów;

X_{st}, Y_{st} – współrzędne stanowiska (punktu osnowy), z którego kierunek jest obserwowany.

Następną czynność stanowi zestawienie układu równań poprawek kątów dla każdego przekroju w postaci:

$$v_i = A_i\, dx_S + B_i\, dy_S \pm dr + l_i \tag{12.36}$$

gdzie:

$$A_i = \sin\sigma_i \;;\; B_i = -\cos\sigma_i \;;\quad l_i = (X_0^S - X_s)\sin\sigma - (Y_0^S - Y_{st})\cos\sigma \pm r_o$$

Poprawki v określają odchylenia badanego przekroju od regularnego koła.

Znaki + lub – przy składnikach: dr oraz r_0 zależą od położenia kierunku celowej stycznej do obiektu względem punktu S (środka przekroju). Znak „–" wstawiamy dla kierunku położonego po prawej stronie względem punktu S, zaś znak „+" dla kierunku po lewej stronie punktu S.

Po dokonaniu wyrównania metodą spostrzeżeń pośredniczących (zestawiając po trzy równania normalne dla każdego przekroju), uzyskujemy niewiadome: dx_S, dy_s, dr, a po ich dodaniu do wartości przybliżonych – współrzędne środków przekrojów oraz wyrównany promień przekroju. Dokładność określenia współrzędnych punktu S oraz promienia r określamy na podstawie znanych wzorów:

$$m_x = m_0\sqrt{Q_{11}} \;;\quad m_y = m_0\sqrt{Q_{22}} \;;\quad m_r = m_0\sqrt{Q_{33}}\,.$$

W celu dokonania graficznej ilustracji wyników obliczamy różnice: Δx_S, Δy_S pomiędzy wyrównanymi współrzędnymi środka i-tego przekroju a współrzędnymi najniższego przekroju, określanego jako przekrój „0". Różnice Δx_S, Δy_S stanowią składowe wektora e_i odchylenia środka i-tego przekroju od linii pionu wychodzącej ze środka przekroju zerowego, przy czym długość tego wektora wynosi:

$$e = \sqrt{\Delta x_S^2 + \Delta y_S^2} \tag{12.37}$$

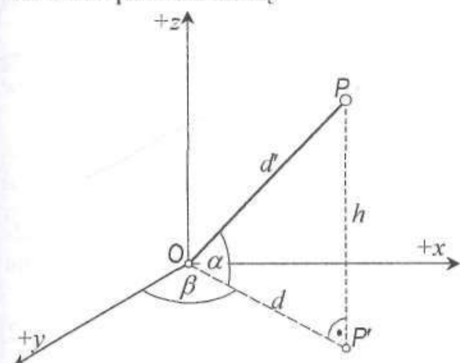
Ilustrację odchyleń środków przekrojów komina stanowią wykresy jego osi wykonane w trzech płaszczyznach układu współrzędnych prostokątnych: xz, yz, xy, przy czym dla wychyleń przyjmuje się dużą skalę np. 1:1 lub 2:1, zaś skala wysokości jest zwykle znacznie mniejsza np. 1:200.

Rozdział 13: Tachimetria

13.1. Wiadomości ogólne

Słowo „tachimetria" pochodzi z języka greckiego i w dosłownym tłumaczeniu oznacza szybki pomiar. Jako metoda pomiaru tachimetria pojawiła się na początku XIX w. po wprowadzeniu do lunety teodolitu przez monachijskiego optyka Reichenbacha płytki ogniskowej z nitkami dalmierczymi, co umożliwiło optyczny pomiar odległości. Niegdyś tachimetria była określana jako jednoczesny pomiar sytuacyjno-wysokościowy realizowany przy użyciu teodolitów wyposażonych w dalmierz kreskowy (nitkowy) lub diagramowy. W obu przypadkach dokładność pomiaru jest niska, ponieważ tachimetria zwykła lub diagramowa umożliwia określenie położenia punktu z błędem rzędu ±0,5 m oraz wysokości z błędem ±(0,05 – 0,10 m). Z tego powodu tak rozumiana tachimetria obecnie może mieć zastosowanie zawężone do pomiaru rzeźby terenu i zdjęcia szczegółów sytuacyjnych tylko najniższej, III grupy dokładnościowej. Główną barierą ograniczającą dokładność i możliwości zastosowania tachimetrii zwykłej i diagramowej jest w tym wypadku duży błąd określenia odległości pomiędzy stanowiskiem a pikietą.

W miarę postępu w zakresie technik pośredniego pomiaru odległości i konstrukcji dalmierzy pojęcie tachimetrii z czasem ulegało poszerzeniu, obejmując równoczesne pomiary sytuacyjne i wysokościowe wykonywane różnymi instrumentami (tachimetrami) o dokładności znacznie przekraczającej dokładność osiąganą przy użyciu tachimetrów nitkowych (zwykłych) lub diagramowych. Przyczyniły się do tego stosowane jeszcze do niedawna optyczne dalmierze dwuobrazowe (np. BRT, Redta), umożliwiające pomiar odległości z błędem względnym w zakresie: od 1:1700 do 1:5000, a więc zbliżonym do dokładności pomiaru taśmą.



Rys. 13.1. Miary α, β, d' określające przestrzenne położenie punktu P

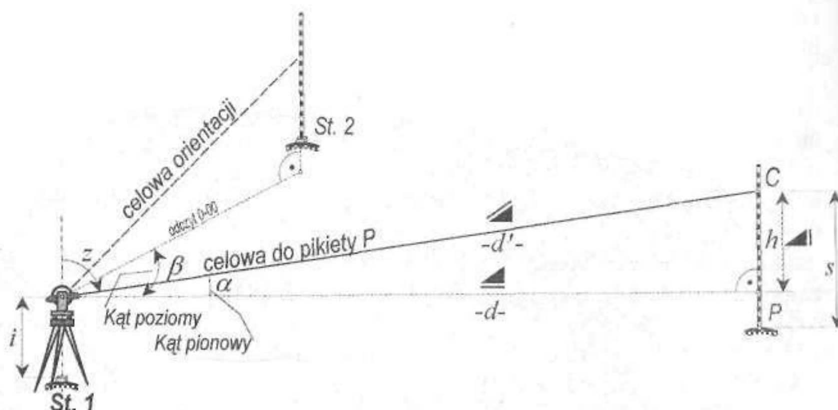
Pomiar sytuacyjno-wysokościowy wykonywany przy użyciu dokładniejszego sprzętu, określany niekiedy jako *tachimetria o podwyższonej dokładności*, jest metodą pomiarową, która szczególnie zyskała na znaczeniu w ostatnich czasach, dzięki zastosowaniu dalmierzy elektromagnetycznych połączonych z teodolitami optycznymi lub elektronicznymi, a zwłaszcza po upowszechnieniu tachimetrów elektronicznych typu *total station*. Szybkość, łatwość obsługi, wysoka dokładność pomiaru kątów, odległości i różnic wysokości, możliwość rejestracji obserwacji oraz bogate wyposażenie i oprogramowanie czyni te instrumenty uniwersalnymi przyrządami pomiarowymi, dla których tachimetria, wykonywana bez wspomnianych wcześniej ograniczeń, stanowi tylko jedno z wielu możliwych zastosowań.

W przestrzennym układzie współrzędnych prostokątnych położenie dowolnego punktu P można wyznaczyć z początku układu O za pomocą trzech miar: kąta pionowego α, kąta poziomego β i odległości rzeczywistej (skośnej) d' (rys 13.1). Te zaś z kolei można łatwo przeliczyć na domiary biegunowe na płaszczyźnie OXY: β, d oraz wysokość h liczo-

ną względem tej płaszczyzny. Wynika stąd, że niezależnie od wykorzystywanego instrumentu, charakterystyczną cechą tachimetrii jest połączenie pomiaru sytuacyjnego metodą biegunową z pomiarem wysokościowym realizowanym za pomocą niwelacji trygonometrycznej. Położenie zdejmowanego punktu P (rys. 13.2), zwanego potocznie *pikietą*, określają domiary biegunowe: β, d, zaś wysokość H_P można wyznaczyć na podstawie wielkości: z, d, i, s, zgodnie ze wzorem:

$$H_P = H_{st} + i + h - s \tag{13.1}$$

gdzie:
- H_{st} – wysokość stanowiska,
- h – przewyższenie punktu celowania C, obliczane ze wzoru: $h = d \cdot \operatorname{ctg} z$,
- d – odległość pozioma odcinka: stanowisko – pikieta,
- z – kąt zenitalny,
- i – wysokość instrumentu mierzona od górnej powierzchni znaku markującego stanowisko do poziomu osi obrotu lunety,
- s – wysokość sygnału mierzona od jego podstawy do punktu celowania.



Rys. 13.2. Zasada pomiaru tachimetrycznego

Po nastawieniu wysokości sygnału s na wysokość instrumentu i, czyli w przypadku, gdy $i = s$, wzór (13.1) dzięki redukcji tych składników ulega znacznemu uproszczeniu do postaci:

$$H_P = H_{st} + h \tag{13.2}$$

Tachimetria jest metodą pomiarową podobną do poznanej wcześniej niwelacji punktów rozproszonych, od której różni się tylko rodzajem instrumentu użytego do zdjęcia sytuacyjno-wysokościowego. Przyrządem pomiarowym zamiast niwelatora ze stałą, poziomą osią celową jest tu tachimetr, czyli teodolit umożliwiający dowolne nachylanie lunety i pomiar kątów α, β, wyposażony dodatkowo w dalmierz do pomiaru odległości skośnej lub w tachimetrach autoredukcyjnych – odległości zredukowanej. Pozwala to na celowanie oraz określanie położenia i wysokości dowolnie rozmieszczonych punktów, charakteryzujących szczegóły sytuacji lub rzeźby terenu. Obserwacji, na które składają się: kąt poziomy β, kąt pionowy α i odległość d' lub d, dokonuje się z założonych wcześniej i odpowiednio

dobranych stanowisk tachimetrycznych, tworzących osnowę pomiarową. Lokalizacja punktów osnowy tachimetrycznej powinna zapewniać dobrą widoczność powierzchni i pokrycia terenu, co pozwala na zdjęcie możliwie dużej ilości pikiet z pojedynczych stanowisk tachimetru. Każde z nich powinno mieć wyznaczone położenie przestrzenne za pomocą trzech współrzędnych: *X*, *Y*, *H*. W uzasadnionych przypadkach pomiaru tachimetrycznego znajomość współrzędnych prostokątnych płaskich *X*, *Y* może być zastąpiona jednoznaczną oraz dokładną identyfikacją położenia punktu w terenie i na istniejącej mapie zasadniczej.

Zakres wykorzystania pomiaru tachimetrycznego zależy od rodzaju i możliwości pomiarowych posiadanego tachimetru, a przede wszystkim dokładności i zasięgu zamontowanego w nim dalmierza optycznego lub elektromagnetycznego. Przeważnie tachimetria jest stosowana do sporządzania map sytuacyjno-wysokościowych dla celów projektowych, planowania przestrzennego, inwentaryzacji sieci uzbrojenia, powykonawczej itp. Jeśli tachimetria jest wykorzystywana jako metoda pomiaru sytuacyjnego, wówczas muszą być spełnione wymagania instrukcji technicznej G-4 „Pomiary sytuacyjne i wysokościowe" przewidziane dla metody biegunowej w myśl której stanowiskami instrumentu mogą być punkty poziomej osnowy pomiarowej lub szczegółowej oraz punkty posiłkowe (pośrednie) wytyczone teodolitem na bokach tych osnów. Dla szczegółów II i III grupy stanowiskiem tachimetru może być również trwały i wyraźny punkt szczegółu I grupy. Na stanowisku tachimetru należy zaobserwować dwa kierunki orientujące, przy czym kierunek z dłuższą celową jest uznawany jako kierunek główny, zaś kierunek z krótszą celową – jako kierunek kontrolny.

Odległość do mierzonych z osnowy punktów należących do obiektów, będących szczegółami I grupy dokładnościowej, nie może być większa niż podwójna długość głównej celowej orientującej stanowisko. Odległości do szczegółów II i III grupy nie powinny przekraczać czterokrotnej długości tej celowej.

Jeśli stanowiskiem dla pomiaru szczegółów II i III grupy jest punkt szczegółu grupy I, wtedy maksymalna długość celowej nie powinna przekraczać 100 m i nie być większa od długości celowej orientującej.

Do pomiaru trzeba użyć tachimetru, którego błąd wyznaczenia pojedynczego kierunku nie przekracza $\pm 1'$. Zgodne z instrukcją G-4 parametry techniczne pomiaru odległości i dopuszczalnej długości celowej związane z grupą szczegółów zostały zestawione w tabeli 13.1.

Tabela 13.1. Dopuszczalna długość celowej i błąd pomiaru odległości przy zdjęciu szczegółów metodą biegunową (wg instrukcji G-4)

Grupa dokładności	Średni błąd pomiaru odległości	Długość celowej
I	$\leqslant$0,07 m	$\leqslant$160 m
II	$\leqslant$0,20 m	$\leqslant$400 m
III	$\leqslant$0,35 m	$\leqslant$600 m

13.2. Osnowa pomiaru tachimetrycznego

Czynności związane z tachimetrycznym zdjęciem sytuacyjno-wysokościowym wybranego obszaru poprzedza założenie, pomiar i obliczenie osnowy pomiarowej, składającej się z zamarkowanych punktów stanowisk tachimetrycznych o znanym położeniu przestrzennym, wyznaczonym za pomocą współrzędnych prostokątnych, płaskich: X, Y oraz wysokości H. Typowymi sztucznymi znakami markującymi są: paliki drewniane, rurki drenarskie i żelazne, bolce metalowe, znaki z tworzyw sztucznych itp. Możliwe jest również wykonanie znaków w postaci malowanych lub wykutych krzyży na nawierzchni betonowej lub asfaltowej. Ponieważ podczas pomiaru tachimetrycznego punkty osnowy są stanowiskami instrumentu, toteż powinny one zapewniać dobry wgląd w teren (np. z wierzchołków wzniesień) i możliwość zdjęcia całego przewidzianego do tego celu obszaru, bez pozostawiania tzw. martwych pól, czyli enklaw, których nie da się pomierzyć z żadnego stanowiska. W szczególnych warunkach możliwa jest także budowa pomostów i stanowisk podwyższonych znacznie zwiększających pole obserwacji. W terenach zabudowanych stanowiska tachimetru mogą być też lokalizowane na tarasach, balkonach lub płaskich dachach niewysokich budynków.

Wzajemna odległość sąsiednich stanowisk musi być dobrana z uwzględnieniem dopuszczalnej długości celowej, związanej z rodzajem zastosowanego tachimetru. Dotyczy to szczególnie pomiaru wykonywanego tachimetrami optycznymi, dla których najdłuższa celowa nie może przekraczać 150 m.

Wymagana dokładność osnowy tachimetrycznej zależy od przeznaczenia i sposobu opracowania wyników pomiarów. Jeśli ich celem jest zdjęcie sytuacyjne lub sytuacyjno-wysokościowe z udziałem szczegółów I i II grupy oraz wykonanie stosownej mapy, wtedy podczas zakładania i pomiaru osnowy należy spełnić odpowiednie wymogi odnośnie sprzętu, technologii pomiarów i dokładności, zawarte w instrukcji G-4.

Pozioma osnowa pomiarowa zakładana dla wyznaczenia współrzędnych X, Y stanowisk tachimetrycznych może składać się z ciągów sytuacyjnych nawiązanych do osnowy poziomej klas I – III. Ciągi te powinny być obustronnie nawiązane oraz zapewniać dogodne warunki dla pomiaru wysokościowego. Wyjątkowo w terenach trudnych lub w celu dotarcia z pomiarem tachimetrycznym do „martwych pól" dopuszcza się zakładanie ciągów wiszących, które mogą mieć wówczas najwyżej dwa boki. Pomiar osnowy musi zapewnić dokładność określenia położenia punktu z średnim błędem m_P o wartości nie przekraczającej $\pm 0{,}10$ m względem punktów nawiązania. Osnowę pomiarową można wstępnie zaprojektować na istniejącej mapie sytuacyjnej lub od razu w terenie, sporządzając przy tym szkic osnowy. Ze względu na pomiary kątów i boków osnowy oraz orientację stanowisk podczas tachimetrii, którą zgodnie z instrukcją G-4 należy wykonać na dwa punkty osnowy (§17 p.2), lokalizacja każdego punktu powinna zapewniać dobrą widoczność sygnałów na obu sąsiednich stanowiskach oraz nienaruszalność znaków. Długość ciągów sytuacyjnych nie powinna być większa od 2 km, zaś długości boków mają mieścić się w zakresie od 50 m do 400 m, przy czym stosunek boków przyległych nie może być mniejszy od 1:4. Punktami wykorzystywanymi jako stanowiska tachimetru mogą być także punkty posiłkowe (pośrednie) zakładane na bokach osnowy szczegółowej i pomiarowej. Boki należy mierzyć dwukrotnie, nie przekraczając w przypadku pomiaru bezpośredniego długości dopuszczalnej różnicy dwukrotnego pomiaru d_l:

$$d_l = u\sqrt{l} \tag{13.3}$$

gdzie: $u = 0,0059$,
l – długość boku wyrażona w metrach.

Dalmierz użyty do pomiaru boków osnowy powinien zapewnić dokładność pomiaru odległości $m_d \leq 0,005+3$mm/km. Przy niewielkiej rozległości osnowy podane wyżej dopuszczalne wartości błędów pomiaru kierunku i długości mogą osiągać większe wartości pod warunkiem zachowania $m_P \leq 0,10$ m.

Pomiar kątów w ciągach wykonuje się w jednym poczecie instrumentem gwarantującym uzyskanie średniego błędu pomiaru kierunku $\leq \pm 6''$ (20^{cc}).

Podczas pomiarów uzupełniających (por. rozdz. 16) dopuszcza się nawiązanie zdjęcia tachimetrycznego do linii pomiarowej opartej na sytuacji terenowej tj. na dwóch jednoznacznie zidentyfikowanych na mapie zasadniczej i w terenie punktach I grupy dokładnościowej.

Wysokościowa osnowa pomiarowa, nawiązana do punktów osnowy wysokościowej kl. IV, składa się z ciągów niwelacyjnych i punktów o znanej wysokości, potrzebnych do wyznaczenia wysokości stanowisk tachimetrycznych. Charakteryzuje się średnim błędem $\leq \pm 20$ mm/km. Błąd średni wysokości najmniej dokładnego punktu nie może przekroczyć 0,10 m. Zgodnie z instrukcją G-4 do nowej osnowy mogą zostać włączone i ponownie wyrównane istniejące ciągi niwelacyjne, pod warunkiem, że dla punktu środkowego ciągu średni błąd wysokości punktu środkowego nie przekracza ±0,10 m. W projekcie pomiarowej sieci wysokościowej trzeba uwzględnić następujące wymogi:

1. Osnowa jest jednorodna bez podziału na rzędy.
2. Przebieg ciągów powinien być dostosowany do rzeźby terenu i zapewniać ekonomiczne wykonanie pomiaru.
3. Długość odcinka niwelacji nie może przekraczać 1,5 km.
4. Punkty węzłowe na obszarze podlegającym pomiarowi powinny być rozmieszczone równomiernie.

Ciągi powinny być obustronnie nawiązane do punktów sieci niwelacyjnej klasy IV lub wyższej albo do punktów węzłowych zakładanej sieci. Nie dopuszcza się stosowania wysokościowych ciągów wiszących.

Zalecaną metodą pomiaru wysokościowej osnowy pomiarowej jest niwelacja geometryczna ze środka w kierunku głównym i powrotnym. Długości celowych nie mogą być większe niż 50 .m Wyjątkowo na terenach grząskich lub przy przekraczaniu przeszkód wodnych długość ta może być zwiększona. Rozbieżność dwukrotnego pomiaru różnicy wysokości na pojedynczym stanowisku niwelatora nie może przekroczyć ±4 mm, zaś dopuszczalna odchyłka wysokościowa obustronnego nawiązania ciągu o długości L km oraz pomiędzy pomiarami w obu kierunkach – wartości $\pm 40 \text{ mm} \sqrt{L}$.

Jako stanowiska tachimetryczne do pomiaru rzeźby terenu można także wybierać dogodnie położone punkty sytuacyjne – szczegóły I grupy, posiadające jednoznaczną identyfikację na zdjęciach lotniczych (dla opracowań fotogrametrycznych) lub istniejącej mapie zasadniczej oraz w terenie. Określone w ten sposób położenie sytuacyjne stanowiska należy uzupełnić określeniem wysokości za pomocą niwelacji geometrycznej lub trygonometrycznej. Dla osnowy tachimetrycznej należy sporządzić szkic przeglądowy, przedstawiający jej przebieg, orientację, elementy nawiązania i numerację poszczególnych punktów połączonych bokami z podaniem ich długości i wartości kątów wierzchołkowych.

13.3. Tachimetryczny pomiar rzeźby terenu

Pomiar rzeźby odbywa się z zamarkowanych stanowisk, dla których wcześniej wyznaczono położenie sytuacyjne z błędem średnim nie większym niż ±0,50 m i wysokość z błędem nie przekraczającym ±0,05 m. Zagęszczenie stanowisk jest związane z warunkami terenowymi oraz rodzajem wykorzystywanego tachimetru. Dla tachimetrów optycznych zwykłych lub diagramowych odległości sąsiednich stanowisk w terenach zurbanizowanych nie powinny przekraczać 200 m i w terenach rolno-leśnych – 500 m. Wiąże się to z dopuszczalną długością celowych, które wynoszą odpowiednio: 100 m i 250 m. Ograniczenia te nie dotyczą tachimetrów elektronicznych, dla których w zależności od grupy zdejmowanych szczegółów maksymalne długości celowych zostały podane w tabeli 13.1. Stosowany sprzęt i metoda pomiaru powinna zapewniać wymaganą w instrukcji G-4 dokładność wyznaczenia wysokości pikiet. W stosunku do osnowy wysokościowej średni błąd określenia wysokości punktu naturalnej powierzchni terenu (pikiety) nie może przekroczyć wartości podanych w tabeli 13.4.

Przed przystąpieniem do pomiaru tachimetrycznego należy skompletować sprzęt oraz poddać sprawdzeniu i rektyfikacji tachimetr, uwzględniając przy tym wyznaczenie błędu miejsca zera koła pionowego oraz stałych dalmierza: k – stałej mnożnej i c – stałej dodawania. Dotyczy to zarówno tachimetru optycznego jak i elektronicznego. Dla tego ostatniego należy także określić stałą dalmierza i pryzmatu, wykorzystywanego podczas pomiaru odległości jako reflektor zwrotny.

13.3.1. Sprzęt tachimetryczny

Zestaw sprzętu tachimetrycznego obejmuje:

- tachimetr ze statywem i futerałem lub skrzynką wraz z wyposażeniem, na które składają się: igła rektyfikacyjna, pion zwykły, wkrętak, osłona przeciwsłoneczna, pędzelek i ircha do czyszczenia optyki instrumentu, nieprzemakalny pokrowiec do osłony tachimetru przed deszczem,
- rejestrator zewnętrzny, o ile tachimetr elektroniczny nie posiada własnej pamięci wewnętrznej, kabel do transmisji wyników pomiaru,
- komplet dwóch (lub więcej) łat z libelami okrągłymi albo pryzmatów z tarczami celowniczymi osadzanych na tyczkach również wyposażonych w libele (rys. 14.2),
- jeden lub dwa szkicowniki (na szkic polowy i ewentualnie dziennik pomiarowy),
- tyczki stanowiące sygnały podczas pomiaru kątów i orientacji stanowisk tachimetrycznych,
- druki (formularze) dzienników tachimetrycznych i szkiców polowych,
- radiotelefony, umożliwiające łączność pomiędzy obserwatorem na stanowisku instrumentu a kierownikiem zespołu rozstawiającym pikiety i prowadzącym szkic polowy,
- podziałkę i odbitkę mapy z zaznaczonymi granicami obszaru i naniesionymi punktami osnowy szczegółowej i pomiarowej oraz ich opisy topograficzne,
- ruletkę do pomiaru wysokości instrumentu i czołówek,
- siekierę do wbijania palików i dokonywania przecinek wizur, łopatę do odsłaniania punktów przykrytych ziemią,

- ołówki, temperówkę, bloczek ścierny i małe przybory kreślarskie (ekierka i linijka) do prowadzenia zapisów i szkiców,
- kalkulator do wykonywania obliczeń polowych lub komputer przenośny,
- parasol do osłaniania instrumentu przed deszczem i silnym promieniowaniem słonecznym.

13.3.2. Czynności wstępne poprzedzające właściwy pomiar tachimetryczny

Przebieg czynności wstępnych zależy od rodzaju używanego tachimetru oraz możliwości prowadzenia automatycznej rejestracji pomiaru lub jej braku, co wiąże się z koniecznością odręcznego zapisu obserwacji w dzienniku pomiarowym. Niezależnie od zastosowanego instrumentu najważniejszymi czynnościami wstępnymi, niezbędnymi do określenia położenia i wysokości pikiet, są: pomiar wysokości: instrumentu – i oraz sygnału – s, orientacja stanowiska na dwa sąsiednie punkty osnowy pomiarowej.

Po ustawieniu tachimetru nad zaznaczonym punktem danego stanowiska, należy zasygnalizować tyczkami dwa sąsiednie stanowiska. Po spoziomowaniu, scentrowaniu instrumentu i regulacji ostrości krzyża kresek, ustawiamy odczyt zerowy (0-00) na cel lewy, po czym celujemy na drugie stanowisko (cel prawy) i dokonujemy odczytu koła poziomego. Kontrolą orientacji jest późniejsze obliczenie tego kąta ze współrzędnych. Numery obu punktów i odpowiadające im odczyty koła poziomego zapisujemy w dzienniku pomiarowym lub dokonujemy ich rejestracji w pamięci rejestratora zewnętrznego lub wewnętrznego. Jeśli stanowiskiem instrumentu jest punkt sytuacyjny zidentyfikowany na mapie, wówczas orientację wykonujemy na dwa inne punkty, których położenie zostało ustalone na mapie i w terenie.

Następnie, zgodnie z zasadami podanymi w ust. 12.3.1, za pomocą ruletki lub łaty tachimetrycznej mierzymy wysokość instrumentu i wysokość sygnału (pryzmatu – w tachimetrach elektronicznych lub tarczy celowniczej albo łaty poziomej – w dwuobrazowych tachimetrach optycznych). Często jest również praktykowane ustawianie sygnału na wysokość instrumentu ($i = s$), lecz także i w tym wypadku należy wpisać lub zarejestrować wartość tej wysokości, ponieważ wskutek braku widoczności dla niektórych pikiet zaobserwowanych z danego stanowiska wysokość sygnału może być w trakcie pomiaru zmieniona.

Dla tachimetrii zwykłej wykonywanej przy użyciu dalmierza kreskowego lub diagramowego nie wykonuje się osobnego pomiaru wielkości s, ponieważ jest ona określana oddzielnie dla każdej pikiety jako jeden z odczytów na pionowo ustawionej łacie. W przypadku, gdy wraz z tachimetrią dokonywany jest także pomiar osnowy, wtedy oprócz pomiaru kąta poziomego w dwóch położeniach lunety, dla sąsiednich stanowisk należy dokonać takiego samego pomiaru jak dla pikiet, tzn. pomierzyć kąty poziome i pionowe oraz odległości skośne lub zredukowane, czyli wielkości potrzebne do określenia współrzędnych X, Y oraz wysokości H tych punktów. Po dokonanym pomiarze na obu punktach zamiast łat lub pryzmatów należy ustawić tyczki dla okresowej i końcowej kontroli orientacji stanowiska w trakcie pomiaru pikiet i po jego zakończeniu.

Czynności wstępne na stanowisku obejmują także sprawdzenie błędu miejsca zera tachimetru, przygotowanie rejestratora lub dziennika pomiarowego, w którym dokonuje się początkowych zapisów obejmujących: nazwę obiektu, wykonawcę i skład zespołu, numer fabryczny i typ instrumentu, numer stanowiska, wartości kierunków orientacyjnych i oznaczenia punktów, na które zorientowano stanowisko, wartości: i, s, datę pomiaru, sto-

pień trudności terenu, numer szkicu polowego wykonywanego podczas tachimetrii z danego stanowiska itp.

13.3.3. Czynności poszczególnych członków zespołu tachimetrycznego

Typowy zespół tachimetryczny składa się z pięciu osób: kierownika zespołu (inżyniera lub technika), obserwatora (technika), protokolanta, czyli sekretarza i dwóch pomiarowych (pracowników fizycznych).

Obserwator obsługuje tachimetr, dyktuje lub rejestruje odczyty w pamięci wewnętrznej lub zewnętrznej, wykonuje, sprawdza i zapisuje wysokości instrumentu i sygnałów, kontroluje stabilność instrumentu poprzez sprawdzanie pomiaru kierunków orientujących stanowisko, wykonywane obowiązkowo przed opuszczeniem stanowiska. Gdy zespół rozporządza dostateczną liczbą osób, wówczas obserwator nie powinien sam notować wyników pomiaru, ponieważ czynność ta zajmuje mu ręce, utrudniając obsługę instrumentu, rozprasza jego uwagę i może być źródłem błędów w zapisach lub odczytach.

Sekretarz (protokolant) dokonuje w dzienniku tachimetrycznym zapisu odczytów podawanych przez obserwatora i kontroluje ich poprawność np. podczas tachimetrii zwykłej sprawdza się odczyty g, d, s na łacie za pomocą wzoru: $g + d = 2s$. Po każdorazowym zmierzeniu ustalonej wcześniej ilości pikiet np. 5 – 10 obowiązkiem sekretarza jest wykonanie na umówiony z kierownikiem zespołu sygnał kontroli numeracji pikiet na szkicu i w dzienniku pomiarowym. W razie pozostawienia niezgodności numerów pikiet, podczas dalszych prac związanych z obliczaniem dziennika i kartowaniem zostanie popełniony błąd, polegający na przypisaniu określonej pikiecie niewłaściwych miar położenia i wysokości, pochodzących od innej pikiety. Z tego powodu po stwierdzeniu omyłki, należy wykryć przyczynę błędu, a gdy jest to niemożliwe, cofnąć pracę do etapu poprzedniego sprawdzenia i dokonać ponownego pomiaru ostatniej partii pikiet, aż do uzyskania pełnej zgodności numerów na szkicu i w dzienniku. Dla tego samego obiektu pomiarowego nie wolno także po zmianie stanowiska wznawiać numeracji od początku. Numeracja ta musi zachować ciągłość na wszystkich kolejnych stanowiskach instrumentu dla danego obiektu pomiarowego. Wzory dzienników tachimetrycznych są z reguły dostosowane do określonego typu instrumentu i niektóre z nich zostały zamieszczone w kolejnym rozdziale 14, poświęconym tachimetrom.

Jeśli tachimetr posiada rejestrator, wówczas sekretarz nie jest konieczny, ponieważ wtedy obserwator za pomocą klawiatury instrumentu może samodzielnie dokonać w pamięci elektronicznej zapisu tzw. *rekordów danych obserwacyjnych*, które obejmują: numery pikiet, odczyty wielkości mierzonych i kody zdejmowanych punktów.

Kierownik sekcji pomiarowej organizuje pracę całego zespołu, wspólnie z sekretarzem lub obserwatorem czuwa nad prawidłowością numeracji pikiet, prowadzi szkic tachimetryczny i rozprowadza pikiety, czyli wskazuje pomiarowym miejsca, gdzie powinni ustawić łaty lub lustra. Te bardzo istotne czynności kierownika wymagają od niego doświadczenia, znajomości morfologii rzeźby, skali, cięcia warstwicowego i technologii opracowania przyszłej mapy oraz dobrej orientacji w terenie. Zbyt gęste ustawianie pikiet opóźnia pomiar oraz zwiększa później pracochłonność wszystkich etapów czynności kameralnych (obliczenie i kartowanie pikiet, interpolacja warstwic), z kolei zbyt rzadki rozstaw pomierzonych punktów charakterystycznych może nadmiernie zniekształcić rzeczywisty obraz rzeźby terenu.

Pomiarowi są przyuczonymi pracownikami fizycznymi i wykonują czynności związane z przenoszeniem sprzętu, pomiarem wysokości instrumentu i sygnałów, sygnali-

zacją punktów orientujących stanowiska, oczyszczaniem wizur z przeszkód (wykonywanie przecinek) oraz umieszczaniem łat lub pryzmatów w miejscach wyznaczanych przez kierownika zespołu. Z punktów tych pomiarowi powinni widzieć stanowisko instrumentu. Pomiarowy musi przy tym dbać o prostopadłe do osi celowej ustawienie czoła łaty lub pryzmatu na tyczce i ich pionowe ustawienie, osiągane poprzez obserwowanie libeli pudełkowej i utrzymywanie jej pęcherzyka w położeniu środkowym.

13.3.4. Rozprowadzanie pikiet podczas pomiaru rzeźby terenu

Ze względów ekonomicznych należy dążyć do przedstawienia rzeźby terenu na mapie z wymaganą dokładnością przy jednoczesnym rozstawieniu minimum pikiet. Przy wyborze pikiet należy dążyć do tego, aby były one obierane odpowiednio do konfiguracji terenu, tj. na wszystkich punktach charakterystycznych i w takiej liczbie, która gwarantuje wierne odtworzenie rzeźby terenu. Wzajemne odległości pikiet na terenach o równomiernych spadkach nie powinny być większe od 50 m, a na terenach rolno-leśnych – 100 m".

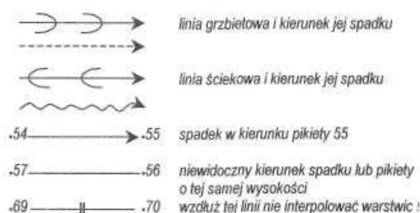
Gęstość i położenie pikiet wysokościowych zależy od lokalnego urozmaicenia rzeźby i spadków terenu oraz od przewidywanej skali i cięcia warstwicowego przyszłej mapy. Dobór lokalizacji charakterystycznych punktów wysokościowych powinien uwzględniać fakt, że podczas interpolacji warstwic spadek terenu między sąsiednimi pikietami uważa się za jednostajny, czyli profil terenu wyznaczony przez te pikiety ma w przybliżeniu stanowić linię prostą.

W **terenach płaskich,** ze względu na niewielką ilość punktów charakteryzujących rzeźbę, rozstawianie pikiet nie nastręcza istotnych trudności. Teren pokrywa się wówczas równomiernie szeregami punktów wysokościowych w jednakowych odstępach sąsiednich szeregów i pikiet w szeregach, w wyniku czego ich konfiguracja jest zbliżona kształtem do siatki kwadratów. Pomiarowi przemieszczają się wtedy po liniach równoległych do ustalonego i widocznego w terenie kierunku np. linii dróg, miedz, tras przewodów nadziemnych, orki itp. Ustawienia pikiet mogą być wtedy dokonywane przez samych pomiarowych, którzy mają obowiązek nadążania za sobą. Obserwator powinien celować na przemian do każdego sygnału lub łaty. Łatę lub pryzmat, które nie mają być aktualnie odczytywane należy odwrócić bokiem do instrumentu.

W **terenie pagórkowatym** pikiety rozstawia się w rozproszonych punktach charakterystycznych rzeźby takich jak: wierzchołki wzniesień i najniższe punkty zagłębień (kotlin, niecek, dolin), siodła (przełęcze), punkty załamania jednostajnych spadków terenu w poziomie i pionie oraz linie zmian spadków zwłaszcza wzdłuż dolnych granic stoków, punkty *linii szkieletowych*: grzbietowych (wododziałowych) i ściekowych (spływu wód opadowych), punkty na górnych i dolnych krawędziach stoków i skarp. Gęstość punktów rozproszonych dobiera się w taki sposób, aby profil terenu wyznaczany przez dwie sąsiednie pikiety mógł być uznany jako prostoliniowy. Odchylenie linii spadu od rzeczywistego profilu nie powinno przy tym przekraczać wartości $^1/_4$ zasadniczego cięcia warstwicowego (tabela 13.3).

Linie szkieletowe mają bardzo istotne znaczenie dla przebiegu warstwic, dlatego w terenie dąży się do wyodrębnienia i zamierzenia ich przebiegu, aby określić odcinki odchyleń linii szkieletowych w płaszczyznach: poziomej i pionowej. Spadki linii szkieletowych są z reguły mniejsze niż spadki tworzących je stoków. Styczne do warstwic, doznających na linii szkieletowej wyraźnego zagięcia, w punkcie ich przecięcia z linią szkiele-

tową tworzą kąt prosty, przy czym na liniach grzbietowych warstwice są zwrócone wypukłością w dół, zaś na liniach ściekowych wypukłością w górę.



Rys. 13.3. Oznaczenia rzeźby terenu na szkicach tachimetrycznych

Szeregi pikiet powinny również wyróżniać z otoczenia wszelkie elementy przerywające ciągłość warstwic oraz granice naturalnych i sztucznych form rzeźby, do których zalicza się: siodła i przełęcze, stożki napływowe i nasypowe, wąwozy, parowy, jary, osuwiska, urwiska, terasy zalewowe i uprawowe, linie brzegowe wód płynących i stojących, wały, groble, kanały, nasypy, hałdy itp. Należy przy tym unikać zdejmowania nadmiernej ilości drobnych form, obniżających czytelność przyszłej mapy warstwicowej, czyli dokonywać generalizacji rzeźby już podczas jej pomiaru. Generalizacja ta musi jednak zapewnić zachowanie charakteru rzeźby właściwego danemu obszarowi. W terenie o urozmaiconym ukształtowaniu i znacznych spadkach pomiarowi przy rozstawianiu szeregów pikiet powinni posuwać się obok siebie wzdłuż biegu warstwic, lecz na różnych poziomach. Należy unikać chodzenia wzdłuż spadku, ponieważ ciągłe wychodzenie pod górę i schodzenie w dół jest bardzo męczące. Na płaskich fragmentach terenu należy również dążyć do tego, aby trójki sąsiednich pikiet ograniczały obszar płaski o jednostajnym pochyleniu.

Gęstość pikiet wyrażona ilością punktów na hektar zależy od wymagań zleceniodawcy związanych z przeznaczeniem pomiaru, skali mapy, cięcia warstwicowego i warunków terenowych: przejrzystości pokrycia, spadków, wielkości form i urozmaicenia rzeźby. Przy rozstawie pikiet co 20 m na jeden hektar przypada 20 pikiet. Orientacyjne wskaźniki gęstości pikiet na 1 hektar ustalone przez W. Kłopocińskiego* zostały podane w tabeli 13.2. W tabeli tej nie uwzględniono ilości pikiet związanych ze zdjęciem sytuacji terenowej. Na obszarach o małej przejrzystości (zabudowanych, zakrzaczonych, w sadach i lasach) liczba pikiet bywa zwykle większa ze względu na ograniczenia widoczności.

Tabela 13.2. Liczba pikiet na 1 ha podczas zdjęcia rzeźby terenu (wg W. Kłopocińskiego)

L.p.	Charakterystyka terenu	Cięcie warstwicowe		
		1 m	0,5 m	0,25 m
1	Teren płaski, bez widocznych różnic wysokości	2	4	5
2	Teren lekko pochylony, o spadzie jednostajnym	3	5	7
3	Teren lekko pofałdowany z pojedynczymi grzbietami i dolinami o łagodnych stokach	4	8	10
4	Teren pofałdowany z rozgałęziającymi się grzbietami i dolinami	5-10	10-15	×
5	Teren pagórkowaty, pagórki o dużych wymiarach	15	22	×
6	Teren pagórkowaty, pagórki o drobnych wymiarach	20	30	×

* W. Kłopociński „Tachimetria"; PPWK Warszawa; 1965 r.

13.4. Szkic tachimetryczny

Sporządzanie szkicu tachimetrycznego opiera się na podobnych zasadach i oznaczeniach, które wykorzystuje się podczas prowadzenia szkicu niwelacji punktów rozproszonych. Szkic (rys. 13.3) jest wykreślany na znormalizowanym formularzu i ilustruje zwykle obszar stanowiący pewną zwartą całość zamkniętą naturalnymi liniami odgraniczającymi, takimi jak drogi, ulice, cieki wodne, granice działek, miedze itp.

Szkic jest sporządzany w przybliżonej skali lub bez skali, jednak z zachowaniem pewnych widocznych proporcji odległości i przeważnie przedstawia teren pomierzony z jednego stanowiska pomiarowego, którego położenie zaznacza się najczęściej na środku arkusza szkicu. Przy małej ilości pikiet zdejmowanych z pojedynczych stanowisk (np. przy rozczłonkowaniu form rzeźby, w lasach lub terenach zakrzaczonych i zabudowanych) szkic może zawierać pikiety ze zdjęcia pochodzącego z kilku stanowisk tachimetrycznych. Znaczne ułatwienie wykonania rysunku szkicu polowego, zwłaszcza podczas pomiarów uzupełniających, stanowi jego sporządzenie na podkładzie kopii istniejącej mapy danego terenu, na której w terenie zaznacza się stanowiska tachimetru, położenie pikiet oraz zaktualizowane elementy rzeźby i sytuacji terenowej.

Podczas zaznaczania rzeźby terenu na szkicach polowych wykorzystywane są uproszczone znaki konwencjonalne instrukcji K-1 oraz umowne oznaczenia zestawione na rys. 13.3. Kreski spadu wskazujące kierunki interpolacji warstwic, łączące sąsiednie pikiety powinny na szkicu tworzyć siatkę złożoną z trójkątów i czworoboków.

Na zawartość szkicu tachimetrycznego składają się następujące elementy:

- dane informacyjne i numer szkicu wpisane w tabeli znajdującej się na dole formularza;
- stanowisko tachimetru oznaczone kółkiem, numerem i kierunkami orientacji;
- pikiety oznaczone kropką i numerem bieżącym;
- rysunek rzeźby terenu, przedstawiony przy zastosowaniu przynajmniej jednego z trzech podanych sposobów lub ich kombinacji (rys. 13.3) tj.: usytuowania linii szkieletowych (grzbietowych i ściekowych), przybliżonego zarysu warstwic, strzałek (kierunków) spadu łączących sąsiednie pikiety i wyznaczających przewidywane kierunki interpolacji warstwic na mapie wysokościowej;
- elementy sytuacji terenowej związane z rzeźbą, w tym linie ograniczające formy rzeźby oraz te szczegóły, które przerywają lub zmieniają naturalny przebieg warstwic, takie jak: urwiska, osuwiska, wąwozy, skarpy, budowle ziemne, rowy, drogi gruntowe, terasy itp.;
- szczegóły sytuacyjne o charakterze orientacyjnym dla wyznaczenia elementów rzeźby terenu; a w przypadku łącznego pomiaru sytuacyjno-wysokościowego wszystkie niezbędne szczegóły sytuacyjne i dane opisowe przewidziane w instrukcji K-1 zdejmowane metodą biegunową tj. budynki, ogrodzenia trwałe, nazwiska władających, numery działek, granice własności i użytków gruntowych oraz ich rodzaje, elementy uzbrojenia terenu i inne;
- numery sąsiednich szkiców polowych wpisywane w formie „*Łączy szkic nr...*" lub na skraju zdejmowanego obszaru „*Granica pomiaru*";
- strzałka kierunku północy;
- miary kontrolne obiektów zdjęcia sytuacyjnego (podpórki, czołówki itp.);
- zakres numeracji pikiet (od - do) objętych danym szkicem polowym;

Łączy szkic nr 24

Łaczy szkic nr 27

Łaczy szkic nr 28

Łączy szkic nr 22

Zakres pomiaru

St. p-58

St. p-59

St. p-60

St. p-59; pikiety od nr 54 do nr 99

Nazwa lub symbol obiektu: *SIKORNIK*					Rodzaj pracy: *tachimetria*
Czynności	Data	Nazwisko i imię wykonawcy	podpis	Sprzęt pomiarowy *Tach. el. Topcon 211D.*	Nazwa instytucji wykonującej pomiar *Akademia Rolnicza w Krakowie* *Wydz. Inżynierii Środowiska* *Kier.: geodezja. Sekcja 5*
Pomierzył:	*4.07.2001*	*Jan Kowalski*		Województwo: *małopolskie*	
Skartował:	*15.07.2001*	*Anna Malinowska*		Powiat:	L. ks. rob. *154/2002*
Wykreślił:	*25.07.2001*	*Teodor Nowak*		Gmina:	Szkic polowy nr **23**
Sprawdził:				Miejscowość: *Kraków*	Nr sekcji mapy:

Rys. 13.4. Szkic tachimetryczny

W miarę postępu prac terenowych wykonywanych na dużych obszarach sporządzany jest szkic przeglądowy szkiców polowych, ułatwiający późniejsze kartowanie pierworysu i pokazujący na tle ważniejszych szczegółów sytuacji terenowej lub rysunku osnowy tachimetrycznej, numerację, wzajemne sąsiedztwo oraz przybliżony zakres terenu objętego poszczególnymi szkicami polowymi. Możliwe jest także sporządzanie szkicu przeglądowego na odbitce mapy sytuacyjnej danego obszaru. Numer bieżącego szkicu powinien być także wpisywany podczas pomiaru na każdej stronie dziennika polowego.

13.5. Tachimetryczne prace kameralne

Intensywny rozwój technik informatycznych, jaki ma miejsce w ostatnich dziesięcioleciach, umożliwia obecnie pełną automatyzację procesu opracowania mapy numerycznej, będącej zbiorem danych w postaci cyfrowej. W razie potrzeby mogą one podlegać dalszym przetworzeniom w celu uzyskania różnych produktów finalnych, do których zalicza się także mapę graficzną. Ciąg technologiczny związany z procesem opracowania mapy rozpoczyna się od założenia osnowy z wykorzystaniem instrumentów GPS, sieci modularnych lub klasycznej osnowy pomiarowej, realizowanej przy użyciu tachimetrów elektronicznych typu *total station*, po czym następuje pomiar tachimetryczny z rejestracją wyników obserwacji, kodów obiektów i zapis graficzny lub cyfrowy sposobu połączeń zdejmowanych punktów.

Informacje te już w trakcie prac terenowych mogą być za pomocą łączy radiowych lub telefonicznych sukcesywnie transmitowane do przenośnego komputera, który poprzez modem i za pomocą specjalistycznego oprogramowania dokonuje ich przetworzenia, polegającego między innymi na obliczeniu współrzędnych X, Y, H wybranych punktów w przyjętym układzie współrzędnych i wysokości. Dzięki elektronicznemu przekazowi danych obserwacyjnych z terenu do biura (np. przez pocztę elektroniczną) mapa sytuacyjno-wysokościowa pomierzonego obszaru może być automatycznie i sukcesywnie wykreślana przez ploter.

Wyniki uzyskane z pomiarów tachimetrycznych można wykorzystać do uzupełniania baz danych systemu informacji o terenie (SIT), aktualizacji operatu ewidencji gruntów i budynków, sieci uzbrojenia terenu, taksacji nieruchomości, realizacji zadań z zakresu planowania przestrzennego i innych celów gospodarczych i projektowych.

W ramach typowej, tradycyjnej technologii wykonywania tachimetrii prace kameralne składają się z następujących etapów:

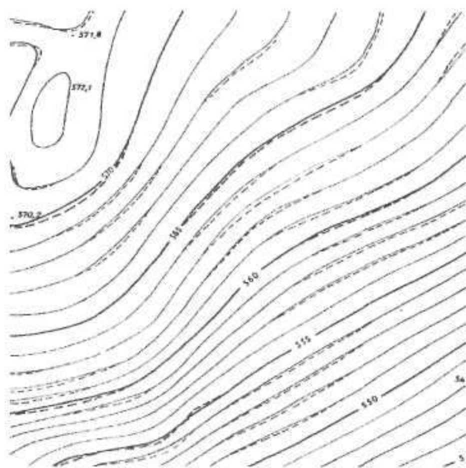
1) obliczenie osnowy poziomej i wysokościowej, do której nawiązano punkty stanowisk,
2) określenie współrzędnych i wysokości stanowisk tachimetrycznych,
3) obliczenie dzienników tachimetrycznych, a w szczególności odległości zredukowanych – d, przewyższeń – h i wysokości – H poszczególnych pikiet,
4) przygotowanie arkusza pierworysu mapy, polegającego na naniesieniu ramki sekcyjnej, siatki kwadratów oraz osnowy szczegółowej i pomiarowej,
5) naniesienie na arkusz poszczególnych pikiet za pomocą nanośnika biegunowego i opisanie ich wysokości,
6) wykreślenie sytuacji terenowej,
7) interpolacja warstwic,
8) wykreślenie warstwic w ołówku, generalizacja i wykreślenie w tuszu,
9) wykonanie opisów pozaramkowych w poszczególnych polach arkusza mapy.

Czynności związane z obliczaniem dzienników tachimetrycznych zostały omówione w rozdz. 14 w ramach opisów obsługi poszczególnych rodzajów tachimetrów, zaś prace związane z kartowaniem osnowy i pikiet w podręczniku „*Geodezja I*" w rozdziale poświęconym niwelacji powierzchniowej. Specyfika tachimetrycznego pomiaru rzeźby terenu podczas nanoszenia pikiet wymaga nie tylko bieżącego opisywania ich wysokości (a nie numerów), lecz także łączenia ich ze sobą zgodnie ze szkicem polowym w celu ustalenia kierunków interpolacji, w wyniku której otrzymuje się na rysunku mapy grupy punktów o jednakowych wysokościach, które następnie należy połączyć płynnymi i wyokrąglonymi liniami warstwic.

W trakcie prac związanych z umieszczeniem warstwic na mapie zalecane jest przestrzeganie następujących zasad:

1. Przed rozpoczęciem interpolacji należy wykreślić na mapie sytuację terenową i skarpy.
2. Podczas interpolacji i kreślenia warstwic powstający rysunek powinien być ustawicznie konfrontowany ze szkicem polowym.
3. W pierwszej kolejności warstwice interpoluje się wzdłuż linii szkieletowych, wzdłuż cieków (rowów, strumieni), biegnących po liniach ściekowych oraz naturalnych dróg gruntowych, najczęściej zgodnych z grzbietami, dostosowując wypukłość lub wklęsłość warstwic do rodzaju linii.
4. Przebieg sąsiednich warstwic jest przeważnie zbliżony do siebie pod względem kształtu. Współkształtność warstwic może być zakłócana w wyniku działania osuwisk lub erozji wodnej.
5. Zarysy linii brzegowych wód stojących, granice bagien i łąk mają podobny kształt co pobliskie warstwice.
6. Warstwice przedstawiające formy rzeźby geologicznie młodsze mają kształty zaostrzone i nieregularne, zaś starsze – łagodne i opływowe.
7. W terenie płaskim warstwice nie powinny mieć ostrych załamań.
8. Na określonym, geomorfologicznie spójnym fragmencie powierzchni mapy ustala się przebieg wszystkich warstwic, unikając prowadzenia pojedynczych warstwicy przez cały arkusz.
9. Z wyjątkiem linii szkieletowych i zaznaczonych na szkicach polowych linii zmian spadku terenu należy unikać załamań i wyraźnych zagięć warstwic na liniach interpolacji.
10. W terenie o znacznych i nierównomiernych spadkach należy w pierwszej kolejności wyznaczyć bieg warstwic pogrubionych (np. metrowych), a następnie pomiędzy nimi wykreślić pozostałe warstwice z interpolacją uwzględniającą wysokości pikiet znajdujących się pomiędzy opracowanymi wcześniej warstwicami pogrubionymi.

Dla uzyskania ciągłości rysunku warstwic na sąsiednich sekcjach mapy należy dokonać *uzgodnienia styków*. W trakcie wykreślania warstwic wyrównujemy ich przebieg, likwidując drobne odchylenia nie mające istotnego wpływu na pomiary wykonywane na mapie (obliczanie wysokości punktów między warstwicami, spadków terenu, projektowanie tras o zadanym nachyleniu itp.). Przykład generalizacji biegu warstwic pokazano na rys. 13.5. W miejscach zmian linia przerywana wskazuje pierwotny kształt warstwic, zaś linia ciągła – kształt zgeneralizowany. Bieg warstwic należy przerwać pod obiektami powierzchniowymi, takimi jak: budynki, drogi, wody, skarpy i innymi szczegółami, które nie odzwierciedlają naturalnego charakteru rzeźby terenu.



Rys. 13.5. Generalizacja rysunku warstwic

Po naniesieniu pikiet wysokościowych z terenów zainwestowanych i sztucznie ukształtowanych należy dokonać generalizacji, polegającej na wyeliminowaniu punktów, które nie mają istotnego znaczenia dla określenia układu przestrzennego terenu. Należy przy tym przyjąć zasadę, że różnice pomiędzy rzeczywistym kształtem terenu, a jego obrazem na mapie nie powinny przekraczać wartości $^{1}/_{4}$ zasadniczego cięcia warstwicowego (tabela 13.3). Przy małych nachyleniach terenu w zakresie 0°– 5° wskazane jest zmniejszenie cięcia poprzez wprowadzenie warstwic pomocniczych o cięciu równym $^{1}/_{2}$ cięcia zasadniczego. Wysokości punktów terenowych w ilości 2-5/dm^2 podaje się tylko w najbardziej charakterystycznych miejscach oraz na nasypach, skarpach i wykopach. Ponadto wykazuje się także wysokości punktów dla urządzeń technicznych związanych z zagospodarowaniem i uzbrojeniem terenu, jednak łączna ich ilość nie powinna przekraczać 15/dm^2.

Tabela 13.3. Zasadnicze cięcie warstwicowe

Skala mapy zasadniczej	Zasadnicze cięcie warstwicowe
1:500	*0,5 m*
1:1000	*1,0 m*
1:2000	*2,5 m lub 5,0 m*
1:5000	

Po kartograficznym opracowaniu rzeźby należy, tak jak dla sytuacji terenowej, dokonać uzgodnienia styków. Różnice położenia warstwic na sąsiednich sekcjach mapy nie mogą być większe niż wartości liczbowe pasów tolerancji podanych w tabeli 13.4.

Tabela 13.4. Szerokość pasa tolerancji biegu warstwicy i dopuszczalne błędy pomiaru wysokości punktów naturalnej powierzchni terenu

Nachylenie terenu		Pas tolerancji położenia warstwicy w mm dla mapy w skali:				Średni błąd wysokości pikiet
Kąt nachylenia	ΔH na odcinku 100 m	1:500	1:1000	1:2000	1:5000	
do 2°	*<3,5 m*	7	7	9	7	*±0.20 m*
2° – 6°	*3,5-10,5 m*	*7 – 2,5*	*7 – 2,5*	*9 – 3*	*7 – 2,5*	*±0,35 m*
ponad 6°	*>10,5 m*	*≤2,5*	*≤2,5*	*≤3*	*≤2,5*	*±0,70 m*

Do określenia błędu średniego wysokości warstwicy m_h najczęściej wykorzystywany jest empiryczny wzór Koppego w postaci:

$$m_h = \pm(a + b \cdot \operatorname{tg} \alpha) \tag{13.4}$$

gdzie: α - kąt pochylenia terenu,

a, b – współczynniki ustalone doświadczalnie na podstawie obszernego materiału pomiarowego (a zmienia się w zakresie: 0,1 – 0,3; zaś b w zakresie 0,5 – 3).

Według doświadczeń polskich dla mapy w skali 1:1 000 i nachylenia terenu w zakresie 0° – 5° otrzymano współczynniki: $a = 0{,}1$, $b = 0{,}5$, zaś dla map w skali 1:2 000 dla terenu górzystego otrzymano współczynniki $a = 0{,}25$, $b = 1{,}5$.

Kontrola poprawności rysunku rzeźby terenu polega na wykonaniu w terenie metodą niwelacji geometrycznej profilów kontrolnych i porównaniu wysokości ich punktów charakterystycznych z analogicznymi punktami profilów uzyskanych z mapy warstwicowej. Po obliczeniu różnic ΔH pomiędzy wysokościami tych punktów z pomiarów kontrolnych i z mapy wysokościowej można obliczyć średni błąd położenia warstwicy wg wzoru:

$$m_H = \pm\sqrt{\frac{[\Delta H \cdot \Delta H]}{n}} \tag{13.5}$$

gdzie: n – ilość punktów kontrolnych na profilach.

Średni błąd wysokości warstwic nie może przekroczyć:

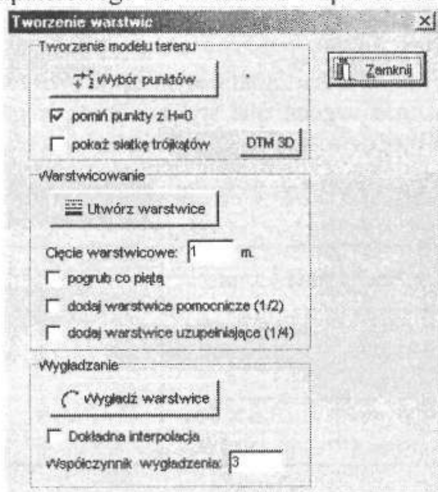
- $^1/_3$ zasadniczego cięcia warstwicowego dla terenów o nachyleniu do 2°,
- $^2/_3$ zasadniczego cięcia warstwicowego dla terenów o nachyleniu do 2° – 6°,
- całości zasadniczego cięcia warstwicowego dla terenów o nachyleniu ponad 6°.

Wyniki kontroli rysunku rzeźby na mapie należy wpisać do jej metryki.

13.6. Kreślenie warstwic za pomocą programu MikroMap

Wyposażenie popularnego programu komputerowego do tworzenia map MikroMap firmy Coder w moduł Warstwice, umożliwia rysowanie warstwic na opracowywanej mapie w oparciu o wprowadzone na nią punkty o znanych wysokościach i położeniu sytuacyjnym. Najwygodniej jest wcześniej dokonać obliczenia położenia i wysokości pikiet za pomocą programu WinKalk (menu: Pomiary/Tachimetria), a następnie przetransferować je do programu MikroMap poleceniem Punkty/Import z WinKalk.

Po wprowadzeniu punktów wysokościowych na mapę uruchamiamy polecenie Warstwice/Kreator warstwic, w wyniku czego otwiera się okienko pokazane na rys. 13.6. Kolejną czynnością jest naciśnięcie przycisku [→:Wybór punktów] i dokonanie doboru punktów o znanej wysokości, two-



Rys. 13.6. Okno kreatora warstwic programu MikroMap

rzących model terenu w postaci siatki trójkątów, niezbędny do utworzenia warstwic. Model ten jest widoczny po naciśnięciu myszką przycisku DTM 3D. Oprócz tego można też oglądać samą siatkę wyznaczającą odcinki interpolacji na tle punktów o znanej wysokości po włączeniu opcji: ☑ pokaż siatkę trójkątów. Następną czynność stanowi ustawienie w odpowiednim polu wartości cięcia warstwicowego. Po naciśnięciu przycisku Utwórz warstwice następuje wstawienie na rysunek warstwic w postaci linii załamanych na bokach zbudowanej wcześniej siatki trójkątów. Dla ich wyokrąglenia ustalamy współczynnik wygładzania i kursorem myszki naciskamy przycisk Wygładź warstwice. Współczynnik wygładzania równy 3 oznacza, że wszystkie warstwice na rysunku będą miały trzykrotnie więcej wierzchołków niż przed wygładzeniem. Po wykonaniu polecenia Warstwice/Opis warstwic wzdłuż linii zaznaczonej na obrazie zostaną opisane cechy warstwic.

13.7. Kompletowanie operatu tachimetrycznego

Pomiar tachimetryczny, po którym w ramach prac kameralnych sporządzamy i kompletujemy operat pomiarowo-obliczeniowy, jest najczęściej związany z wykonaniem lub aktualizacją mapy zasadniczej, toteż składanie operatu odbywa się według wymogów instrukcji O-3, przewidzianych dla grupy asortymentowej „mapa zasadnicza". Operat ten, podobnie jak inne dokumenty geodezyjne, powstające w wyniku wykonania prac geodezyjnych i kartograficznych, powinien być podzielony na następujące części:

1) akta postępowania przeznaczone dla wykonawcy,
2) dokumentację techniczną dla zamawiającego,
3) dokumenty dla właściwego terytorialnie ośrodka dokumentacji geodezyjnej,
4) dokumentację dla organu administracyjnego prowadzącego ewidencję gruntów i budynków.

Oprócz tego podziału należy posegregować zbiory dokumentów ze względu na: grupy asortymentowe, grupy funkcjonalne, jednostki obszarowe i segregujące*. Jeśli operat kwalifikuje się do grupy asortymentowej „mapa zasadnicza", wówczas dzielimy go na trzy grupy funkcjonalne:

1. **ZASÓB BAZOWY (ZB)** obejmujący następujące dokumenty źródłowe, będące podstawą wykonywania dalszych prac geodezyjnych i kartograficznych:
   - sprawozdanie techniczne,
   - wykazy współrzędnych i opisy topograficzne punktów nawiązania,
   - dzienniki polowe osnowy pomiarowej: a) poziomej, b) wysokościowej,
   - szkice przeglądowe osnowy pomiarowej,
   - dzienniki obliczenia współrzędnych i wysokości punktów osnowy,
   - wykaz współrzędnych i wysokości punktów osnowy pomiarowej,
   - dzienniki pomiaru sytuacyjno-wysokościowego (dzienniki tachimetryczne),
   - szkice tachimetryczne,
   - szkic przeglądowy szkiców polowych,
   - pierworys mapy

* Szersze wyjaśnienie tych pojęć można znaleźć w instrukcji O-3 „Zasady kompletowania dokumentacji geodezyjnej i kartograficznej".

2. **ZASÓB UŻYTKOWY (ZU)** obejmujący dokumenty geodezyjne i kartograficzne przeznaczone do bezpośredniego udostępniania zainteresowanym osobom prawnym i fizycznym.
   - metryka mapy zasadniczej,
   - matryca (diapozytyw) mapy,
   - nakładki tematyczne dla mapy zasadniczej w wersji rozwarstwionej,
   - mapy dyżurne aktualizacji bieżącej,
   - wykazy współrzędnych i wysokości punktów osnowy geodezyjnej,
   - matryce opisów topograficznych punktów osnowy,
   - inne.
3. **ZASÓB PRZEJŚCIOWY (OT)** zawierający przechowywane przez określony czas dokumenty pomocnicze, nie objęte powyższymi zasobami, a dotyczące poszczególnych przejściowych faz robót geodezyjnych:
   - obliczenie skurczu matryc,
   - kalki uzgodnienia styków,
   - obliczenia pomocnicze,
   - protokoły kontroli technicznej

Operat powinien być zbroszurowany, z ponumerowanymi stronami i zaopatrzony w wykaz załączników (spis zawartości) umieszczony na drugiej stronie okładki.

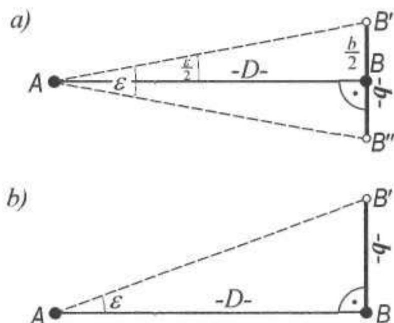
Rozdział 14: Tachimetry

14.1. Wprowadzenie

Tachimetr jest przyrządem geodezyjnym, umożliwiającym jednoczesny pomiar sytuacyjny i wysokościowy, w wyniku którego ze stanowiska tego instrumentu można wyznaczać położenie przestrzenne widocznych punktów terenowych (pikiet). W tachimetrii położenie sytuacyjne pikiet jest określane metodą biegunową, czyli poprzez zmierzenie kąta poziomego i odległości zredukowanej do poziomu lub dokonanie tej redukcji rachunkowo na podstawie pomiaru odległości skośnej i kąta pionowego. Wysokości pikiet są wyznaczane za pomocą niwelacji trygonometrycznej w oparciu o znaną wysokość stanowiska i elementy mierzone: kąt pionowy, odległość poziomą lub skośną oraz wysokości: instrumentu i sygnałów celowniczych. Wynika stąd, że każdy tachimetr dla dokonania pomiarów odległości i obu rodzajów kątów musi być wyposażony w dalmierz i dwa koła podziałowe: poziome i pionowe, stanowi więc połączenie w jednym przyrządzie teodolitu i dalmierza.

Tachimetr optyczny jest teodolitem zaopatrzonym w dalmierz optyczny: zwykły (kreskowy), diagramowy lub dwuobrazowy. Tachimetrem zwykłym jest niemal każdy teodolit optyczny, ponieważ umożliwia pomiar obydwu rodzajów kątów, zaś w jego lunecie na płytce ogniskowej wyryta jest siatka celownicza z *dalmierzem kreskowym*. Od czasu jego skonstruowania główny nurt postępu w dziedzinie budowy dalmierzy wykorzystywanych w tachimetrach zmierzał do zwiększenia dokładności i obniżenia pracochłonności pomiaru odległości, co z kolei miało decydujący wpływ na wzrost dokładności wyznaczenia położenia punktów zdejmowanych metodą tachimetryczną. Innym celem konstruktorów tachimetrów było także uproszczenie lub wyeliminowanie żmudnych, masowych obliczeń wykonywanych w dziennikach tachimetrycznych, a zwłaszcza: odległości zredukowanej i przewyższenia w oparciu o wzory: (14.6), (14.7). W *tachimetrach autoredukcyjnych* firmy Zeiss, takich jak: Dahlta, Redta, BRT lub ich odpowiednikach wytwarzanych przez inne firmy (np. Wild, Kern, Opton) odległość poziomą, a w niektórych wypadkach także przewyższenie, można określać bez konieczności wykonywania osobnych obliczeń.

Optyczny pomiar odległości, podobnie jak pomiar liniowy metodą paralaktyczną, polega na rozwiązaniu *trójkąta paralaktycznego*. Rozwiązania realizowane w dalmierzach optycznych opierają się na jednym z dwóch rodzajów tego trójkąta: równoramiennym pokazanym na rys. 14.1a oraz prostokątnym widocznym na rys. 14.1b. Paralaktyczny trójkąt równoramienny jest realizowany przede wszystkim w optycznym dalmierzu kreskowym, którego zasadę działania omówiono dalej. Kąt paralaktyczny ε jest w tu stały, natomiast rolę zmiennej bazy spełnia odcinek łaty b, którego obraz jest widoczny w lunecie pomiędzy kreskami dalmierczymi. Odległość D obliczymy ze wzoru:



Rys. 14.1. Trójkąty paralaktyczne w dalmierzach optycznych

$$D = \frac{b}{2} \cdot \text{ctg}\frac{\varepsilon}{2} \tag{14.1}$$

Optyczne *dalmierze dwuobrazowe* działają na podstawie rozwiązania trójkąta prostokątnego (rys. 14.1 b), w którym szukana odległość $AB=D$ stanowi przyprostokątną. Można ją określić na podstawie wzoru:

$$D = b \cdot \text{ctg}\,\varepsilon \tag{14.2}$$

Aktualnie tachimetry optyczne niemal całkowicie wyszły z użycia i zostały zastąpione przez dokładniejsze, wszechstronniejsze, szybsze i wygodniejsze tachimetry elektroniczne. Postęp techniczny w budowie tachimetrów spowodował, że wykorzystywana niegdyś powszechnie do zdejmowania szczegółów sytuacyjnych, żmudna metoda ortogonalna, w praktycznym zastosowaniu już od dawna zdecydowanie ustąpiła metodzie biegunowej. Wcześniejsze ograniczenia dokładnościowe wykorzystania tej metody, wynikające ze zbyt dużych błędów tachimetrii zwykłej i diagramowej, niedopuszczalnych przy pomiarach sytuacyjnych dla wykonywania map wielkoskalowych, zostały z czasem zmniejszone lub wyeliminowane najpierw w wyniku wprowadzenia bardziej dokładnych tachimetrów optycznych diagramowych i dwuobrazowych (np. Dahlta, Redta, BRT itp.), a następnie dzięki upowszechnieniu modularnych i zintegrowanych tachimetrów elektronicznych (patrz ust. 14.3).

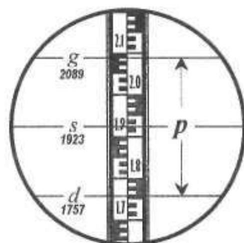
14.2. Tachimetry optyczne

14.2.1. Tachimetry zwykłe

W r. 1810 monachijski optyk Reichenbach skonstruował w lunecie Keplera urządzenie dalmiercze w postaci wprowadzonych do rysunku siatki celowniczej dwóch dodatkowych, poprzecznych *kresek dalmierczych*, rozstawionych na płytce ogniskowej w odległości p, symetrycznie względem głównej kreski poziomej (rys. 14.2). Przy użyciu ustawionej pionowo łaty z podziałem centymetrowym można określić odległość D pomiędzy stanowiskiem instrumentu a łatą na podstawie wzoru:

$$D = k \cdot l + c \tag{14.3}$$

gdzie: k – stała mnożna dalmierza kreskowego, (najczęściej $k = 100$),
c – stała dodawania dalmierza kreskowego, (najczęściej $c = 0$),
l – długość odcinka obrazu łaty widocznego w lunecie pomiędzy kreskami dalmierczymi, równa różnicy odczytów kresek dalmierczych:



Rys. 14.2. Siatka celownicza z kreskami dalmierczymi

$$l = g - d \tag{14.4}$$

Zamieszczony wyżej wzór (14.3) na wyznaczenie odległości dalmierzem kreskowym przy poziomej osi celowej lunety można wyprowadzić z praw optyki i związków geometrycznych pokazanych na rysunku 14.3, który przedstawia schematycznie zasadę działania tego dalmierza.

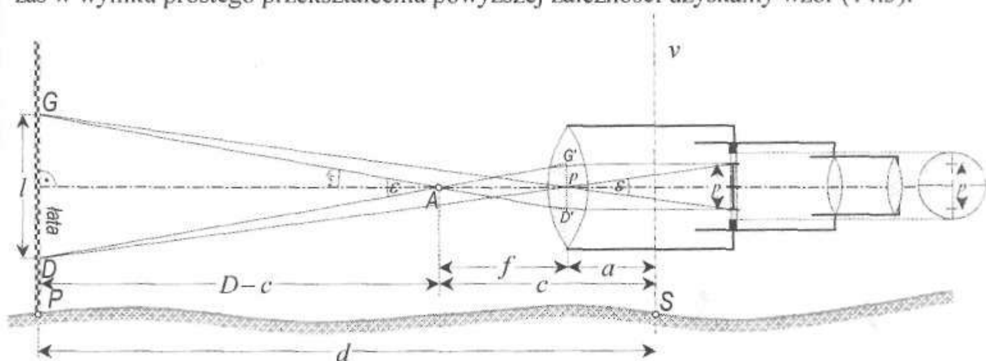
Z podobieństwa widocznych na rys. 14.3 trójkątów *AGD*, *AG'D'* o kącie wierzchołkowym ε wynikają związki: $\frac{f}{p} = \frac{D-c}{l}$ oraz $\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{f}{\frac{p}{2}} = \frac{2f}{p}$,

stąd: $$\frac{f}{p} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} = k\,.$$

Po podstawieniu do wcześniejszego wzoru stała *k* wyniesie:

$$k = \frac{D-c}{l},$$

zaś w wyniku prostego przekształcenia powyższej zależności uzyskamy wzór (14.3).



Rys. 14.3. Zasada działania dalmierza kreskowego przy poziomej osi celowej lunety

W dalmierzu kreskowym kąt ε jest wielkością stałą i nosi nazwę *kąta paralaktycznego*. Odległość od stanowiska łaty do wierzchołka tego kąta – punktu *A*, czyli tzw. *punktu analaktycznego*, równa różnicy $D-c$, zmienia się wprost proporcjonalnie do odczytanego na obrazie łaty interwału $l=g-d$. We współczesnych lunetach z soczewką ogniskującą stała dodawania *c* przyjmuje małe wartości, stąd przy dokładności jej zaokrąglenia równej ±0,1 m*, można przyjąć, że stała ta wynosi zero, toteż odległość *D* stanowiska instrumentu do punktu ustawienia łaty tachimetrycznej wyrazi się uproszczonym wzorem:

$$D \cong k \cdot l \qquad (14.5)$$

Wzory (14.3) i (14.5) dotyczą odległości otrzymanych z pomiarów wykonywanych przy poziomej osi celowej lunety, co ma miejsce podczas niwelacji geometrycznej sposobem punktów rozproszonych. W tachimetrii luneta może być nachylana pod dowolnym kątem α, toteż dla otrzymania odległości zredukowanej pomiędzy stanowiskiem instrumentu a łatą korzystamy z wzoru:

$$\boldsymbol{D = (k \cdot l + c) \cdot \cos^2 \alpha} \qquad (14.6)$$

Jego uzasadnienie wynika z rozumowania opartego na rys. 14.4. Odległość pozioma określona za pomocą odległości skośnej i kąta pionowego α wynosi:

$$D = D' \cdot \cos\alpha$$

* Wartość ± 0,1 m odpowiada dokładności pomiaru odległości przy użyciu dalmierza kreskowego.

Gdyby udało się ustawić łatę tachimetryczną prostopadle do osi celowej lunety i wykonać odczyty kresek dalmierczych w punktach łaty: G', D', to ich różnica wyznaczy odcinek l', zaś wtedy zgodnie z wzorem (14.3) odległość D' wyniesie: $D' = k{\cdot}l' + c$, skąd:

$$D = (k{\cdot}l' + c){\cdot}\cos\alpha.$$

Trójkąty: GSG' oraz DSD' można uznać w przybliżeniu za trójkąty prostokątne, a więc: $l = l'\cdot\cos\alpha$, co po podstawieniu do wcześniejszej zależności daje:

$$D = k\,l\cdot\cos^2\alpha + c\cdot\cos\alpha$$

Rys. 14.4. Zasada działania dalmierza kreskowego przy nachylonej osi celowej

Bez istotnego znaczenia dla dokładności pomiaru odległości w tachimetrii zwykłej można dokonać zamiany zapisu ostatniego składnika, zamiast:

$$:c{\cdot}\cos\alpha \text{ – wpiszemy wyrażenie: } c{\cdot}\cos^2\alpha,$$

dzięki czemu dojdziemy do podanego wcześniej wzoru (14.6).

Dla ustalenia formuły wzoru tachimetrycznego na przewyższenie h, które zgodnie z zasadą (2.14) niwelacji trygonometrycznej równa się $h = d\cdot\text{tg}\,\alpha$, skorzystamy z zależności (14.6) otrzymując:

$$h = (k{\cdot}l + c){\cdot}\cos^2\alpha\cdot\text{tg}\,\alpha$$

Po uwzględnieniu, że: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$, uzyskamy drugi podstawowy wzór tachimetrii zwykłej:

$$\boldsymbol{h = \tfrac{1}{2}\,(k{\cdot}l + c){\cdot}\sin 2\alpha} \qquad (14.7)$$

Wysokości pikiet w tachimetrii zwykłej obliczamy według wcześniej podanego wzoru:

$$H_P = H_{st} + i + h - s$$

Symbol s w tachimetrii zwykłej oznacza wykonany na łacie tachimetrycznej odczyt kreski środkowej siatki celowniczej (rys. 14.2).

Przeważająca większość współczesnych teodolitów posiada zenitalny a nie horyzontalny podział koła pionowego, toteż do wzorów tachimetrycznych: (14.6), (14.7) zawierających kąt pochylenia α wprowadzimy teraz kąt zenitalny z. Po uwzględnieniu zależności: $\alpha = 90° - z$ i redukcji kątów w funkcjach trygonometrycznych otrzymamy:

$$D = (k \cdot l + c) \cdot \sin^2 z \tag{14.8}$$

$$h = \tfrac{1}{2}(k \cdot l + c) \cdot \sin 2z \tag{14.9}$$

Podczas ustawiania ostrości obrazu w lunecie z ogniskowaniem wewnętrznym następuje przemieszczanie soczewki ogniskującej wewnątrz lunety, przez co łączna ogniskowa teleobiektywu, czyli układu optycznego utworzonego przez obiektyw i wspomnianą soczewkę, ulega niewielkim zmianom. To z kolei powoduje zmianę położenia punktu anallaktycznego, a więc także zmianę długości odcinka c. Można jednak tak dobrać optyczne i geometryczne parametry poszczególnych elementów lunety, aby zmiana ta, przy założeniu, że stała c jest równa zero, nie wywoływała błędów istotnych dla pomiaru odległości w tachimetrii zwykłej. W nowszych lunetach błędy te dla krótkich odległości nie przekraczają 20 mm, zaś dla długich, wynoszących ponad 100 m, są równe zaledwie ok. 1 mm. Przy dokładności pomiaru odległości rzędu ±0,1 m są to więc wartości zaniedbywalne.

Pomiar tachimetryczny rozpoczyna się od typowych czynności wstępnych takich jak: ustawienie tachimetru zwykłego nad punktem stanowiska, pomiar wysokości instrumentu, orientacja limbusa. Następnie już w ramach właściwej tachimetrii dla każdej pikiety wykonuje się pięć odczytów w tym: trzy odczyty na łacie: górny - g, środkowy - s i dolny – d oraz dwa odczyty kół podziałowych teodolitu: poziomego (H) i pionowego (V). Obserwacje notowane są w dzienniku, którego wzór pokazuje tabela 14.1. W trakcie zapisu odczytów należy przestrzegać zasad podanych w rozdz. 13, a szczególnie kontrolować zgodność numeracji pikiet w dzienniku i na szkicu polowym oraz sprawdzać poprawność odczytów na łacie zgodnie z zależnością, wynikającą z symetrii kresek dalmierczych:

$$g + d = 2s^{*} \tag{14.10}$$

Na obliczanie wysokości pikiet w dzienniku tachimetrii zwykłej składają się następujące czynności:

- obliczenie dla danego stanowiska wysokości horyzontu instrumentu: $H_i = H_{st} + i$ (kol. 1),
- obliczenie różnicy odczytów kresek dalmierczych: $l = g - d$ (kol. 5),
- obliczenie odległości poziomej wg wzoru: $D = (k \cdot l + c) \cdot \sin^2 z$ (kol. 8),
- obliczenie wynikowe przewyższenia wg wzoru: $h = D : \mathrm{tg}\, z$ (kol. 9, poz. górna),
- obliczenie kontrolne przewyższenia wg wzoru: $h = \tfrac{1}{2}(k \cdot l + c) \cdot \sin 2z$ (kol. 9, poz. dolna),
- obliczenie wysokości pikiet: $H_P = H_i + h - s$ (kol. 10).

[*] Wzór (14.10) jest ścisły dla poziomej osi celowej tachimetru, zaś przy pochylonej lunecie $g - s \neq s - d$. Różnica tych interwałów przy długich celowych i dużych kątach pochylenia może wynosić nawet kilka milimetrów.

Tabela 14. 1: Dziennik tachimetrii zwykłej

Nr stanowiska Wys. instr – i Wys. stan.- H_{st} Wys. osi obr. lunety H_i $H_{st}+i$ Błąd indeksu-μ	Nr celu pikiety	Odczyty na łacie		Różnica odczytów $l=g-d$	Odczyty kąta				Odległość zredukowana $D=$ $=(kl+c)\sin^2 z$	Przewyż-szenie $h=\frac{D}{\operatorname{tg} z}$ $h=\frac{1}{2}(kl+c)\sin 2z$	Wysokość punktu $H=H_i+h-s$	Uwagi
		środk. s	górna g dolna d		pionowego V		poziomego H					
					g	c	g	c				
1	2	3	4	5	6		7		8	9	10	11
p-251 $i=1{,}49$ m $H_{st}=248{,}75$ $H_i=250{,}24$ Sprawdzenie błędu miejsca zera $O_l=99{,}1340^g$ $O_p=300{,}8860^g$ $\mu=+1{,}00^c$	**p-250**						0	00				Teodolit Theo 020 nr 254 328
	p-252						198	72				
	432	1638	2070 1206	864	95	$\overset{-1}{42}$	129	15	86,0	+6,21 +6,21	**254,81**	
	433	1200	1533 0866	667	101	$\overset{-1}{58}$	154	20	66,7	-1,64 -1,64	**247,40**	
	434	1653	1906 1400	506	103	$\overset{-1}{02}$	169	87	50,5	-2,39 -2,39	**246,20**	
	435	1356	1610 1102	508	94	$\overset{-1}{33}$	205	22	50,4	+4,51 +4,51	**253,39**	
	436	2200	2335 2065	270	100	$\overset{-1}{95}$	219	96	27,0	-0,40 -0,40	**247,64**	

Dokładność pomiaru tachimetrami zwykłymi można ocenić po zastosowaniu prawa przenoszenia się błędów średnich w odniesieniu do wzorów: (14.8), (14.9). Na tej podstawie uzyskamy zależności:

$$m_D = \pm\sqrt{\left(\frac{D}{k}\right)^2 \cdot m_k^2 + \left(\frac{D}{l}\right)^2 \cdot m_l^2 + 4h^2 \cdot \left(\frac{m_z}{\rho}\right)^2} \tag{14.11}$$

$$m_h = \pm\sqrt{\left(\frac{h}{k}\right)^2 \cdot m_k^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 \cdot m_l^2 + D^2 \cdot \left(\frac{m_z}{\rho}\right)^2} \tag{14.12}$$

Zakładając, że wykonujemy pomiar tachimetrem o powiększeniu lunety: $G = 25\times$, zaś zdolność rozdzielcza oka wynosi $\pm 1'$ można ustalić prosty wzór na średni błąd m_l odczytania na łacie odcinka l. Błąd ten jest wprost proporcjonalny do długości celowej D i wyraża się wzorem:

$$m_l \cong 0{,}000\,016\,5 \cdot D \text{ [m]} \tag{14.13}$$

Przykład:

Dla $D = 100$ m; $h = 25$ m; $m_z = \pm 1'$; $m_k = \pm 0{,}1$, otrzymamy błędy średnie:

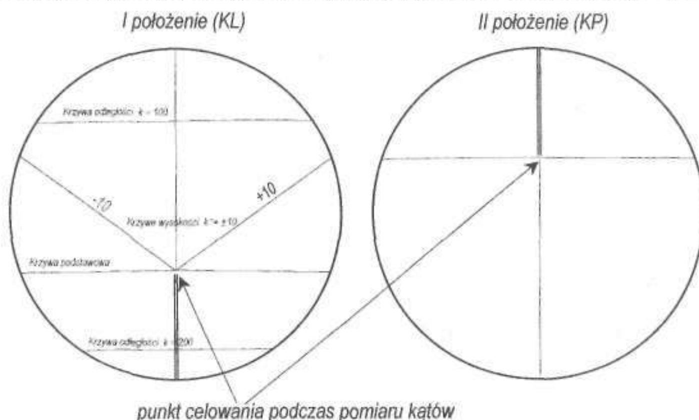
$m_l = \pm 1{,}6$ mm; $m_D = \pm 0{,}2$ m; $m_h = \pm 0{,}06$ m.

14.2.2. Tachimetry diagramowe

Odrębną grupę jednoobrazowych tachimetrów optycznych stanowią *tachimetry diagramowe*, skonstruowane w latach trzydziestych XX w. w celu zwiększenia dokładności tachimetrii i wyeliminowania z prac kameralnych pracochłonnych obliczeń w dziennikach tachimetrycznych: odległości zredukowanych *D* i przewyższeń *h*. W tachimetrach diagramowych zastąpiono kreski dalmiercze krzywymi *diagramu*. Obraz fragmentu łaty widziany pomiędzy odpowiednimi krzywymi, pomnożony przez odpowiednią, okrągłą wartość stałej, pozwala na łatwe i szybkie wyznaczenie wielkości: *D, h* bez konieczności wykonywania obliczeń z udziałem funkcji trygonometrycznych wg wzorów: (14.6), (14.7).

Do niedawna w Polsce był powszechnie stosowany tachimetr diagramowy Dahlta, produkowany od r. 1933 przez zakłady Carl Zeiss (Jena) w licznych, stopniowo udoskonalanych wersjach obejmujących typy: pierwotny, Dahlta 020, Dahlta 010, Dahlta 010A, Dahlta 010B. Dziś ze względu na użytkowanie zapewniających duży zasięg, dokładniejszych i szybszych tachimetrów elektronicznych potrzeba wykorzystania instrumentu Dahlta jest znikoma. Przy braku lepszego sprzętu może on jeszcze niekiedy służyć do pomiaru kątów jako teodolit repetycyjny o średniej dokładności odczytu oraz, zgodnie z wymogami instrukcji G-4, może być w ograniczonym stopniu wykorzystany do tachimetrii w zakresie zdjęcia sytuacyjnego szczegółów III grupy i pikiet wysokościowych podczas pomiaru rzeźby terenu.

W instrumentach Dahlta diagram krzywych jest naniesiony na dodatkowym kole tzw. *kole diagramowym*, umieszczonym wraz z kołem pionowym instrumentu na osi obrotu lunety. Rysunek diagramu znajduje się na drodze przebiegu promieni świetlnych pomiędzy obiektywem a okularem lunety, wskutek czego w jej polu widzenia można zaobserwować obraz określonego fragmentu diagramu, wynikający z aktualnego nachylenia lunety.



Rys. 14.5. Pole widzenia lunety Dahlta przy poziomej osi celowej w I i II położeniu

Obraz pola widzenia lunety w I położeniu (*KL*) przy osi celowej w poziomie został pokazany na rys. 14.5. Charakterystyczną cechą tego ustawienia jest symetria krzywych wysokości o stałych –10 i +10 względem kreski pionowej siatki celowniczej. Z rysunku można też zauważyć, że w tachimetrze Dahlta nie ma kreski poziomej. Punktem do naprowadzania lunety na cel jest przecięcie kreski pionowej i krzywej podstawowej

(zerowej). Wspomniane przecięcie widać także w II położeniu lunety (*KP*), lecz inne elementy rysunku diagramu są wówczas niewidoczne. Krzywa zerowa, biegnąca mniej więcej poziomo, powinna przechodzić przez środek odstępu pomiędzy pojedynczą i podwójną częścią kreski pionowej.

Współkształtne z krzywą zerową są dwie krzywe odległości:

- krzywa odległości dla stałej $k = 100$ (u góry pola widzenia),
- krzywa odległości dla stałej $k = 200$ (u dołu pola widzenia).

Krzywe wysokości mają przebieg ukośny, przy czym im mniejsza wartość stałej tym bardziej stromy jest przebieg krzywej. Są one opisane wartościami odpowiadających im stałych mnożnych: +10, –10; +20, –20; +50, –50; +100, –100.

Łata dostosowana do tachimetru Dahlta ma długość 4 m i jest składana z dwu części połączonych zawiasowo. Podział tej łaty z klinowatymi kreskami centymetrowymi posiada bisekcyjny indeks zerowy umieszczony na wysokości 1,4 m od stopki łaty (rys. 14.6). Wartości bezwzględne odczytów z łaty wzrastają w miarę oddalania się od indeksu zerowego w górę ze znakiem „+" oraz w dół ze znakiem „–". Podczas pomiaru tachimetrycznego dla każdej pikiety wykonujemy na łacie odczyty trzech krzywych: podstawowej – p, odległości – o, wysokości – w wraz ze stałą k' krzywej wysokości. Należy również wykonać dwa odczyty kątowe: na kole pionowym – V i na kole poziomym – Hz . Przykłady odczytów z łaty zostały pokazane na rysunkach 14.7 a, b, c.

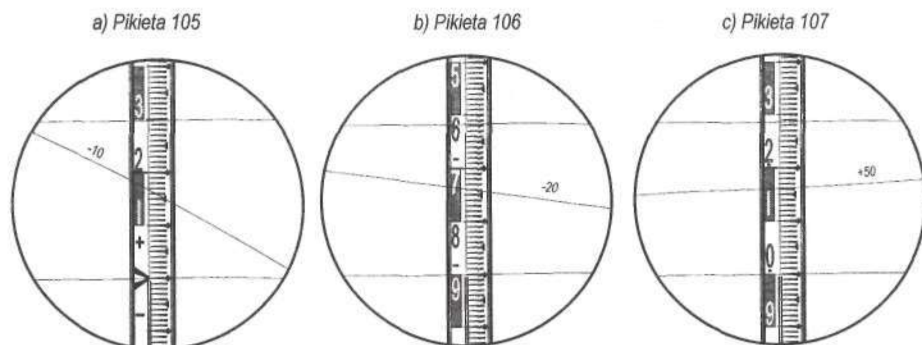


Rys. 14.6. Indeks bisekcyjny łaty Dahlta

Odczyty: p, o, w oraz stałej k' krzywej wysokości służą do obliczenia odległości zredukowanej D i przewyższenia h na podstawie wzorów:

$$D = (o - p) \cdot 100 \tag{14.14}$$

$$h = (w - p) \cdot k' \tag{14.15}$$



Rys. 14.7. Przykłady odczytów tachimetru Dahlta przy różnych ustawieniach krzywej zerowej

W dzienniku tachimetrycznym (tabela 14.2) wykonano przykładowe rachunki dotyczące pikiet nr 105, 106, 107 odpowiadających odczytom, które występują na rysunkach 14.7.a-c. Obliczenie dziennika tachimetrii diagramowej obejmuje następujące czynności:

- obliczenie w kol. 1 dziennika wysokości tzw. *horyzontu roboczego* H_r:

$$H_r = H_{st} + i - 1{,}4 \text{ m} \tag{14.16}$$

- obliczenie odległości poziomej d na podstawie wzoru: $D = (o - p)\cdot k$, (dla górnej krzywej odległości $k = 100$) (kol. 4),
- obliczenie przewyższenia wynikowego h na podstawie odległości D i kąta pionowego poprawionego ze względu na błąd miejsca zera: $z = O_l - \mu$ (kol. 8 poz. górna),
- obliczenie przewyższenia kontrolnego h na podstawie odczytów krzywych diagramu (kol. 8 poz. dolna): $h = (w - p)\cdot k'$,
- obliczenie w kol. 9 wysokości pikiety H_P jako:

$$H_P = H_{st} + i + h - 1{,}4\ \text{m} - p \tag{14.17}$$

czyli:

$$H_P = H_r + h - p \tag{14.17a}$$

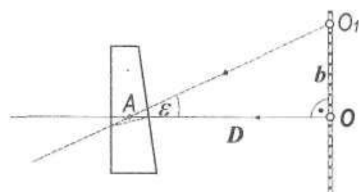
Tabela 14.2: Dziennik tachimetrii wykonywanej instrumentem Dahlta:

Nr stanowiska Wys. instr. – i Wys. stan. – H_st Wys. horyz. rob. H_r $H_{st} + i - 1{,}4$ Błąd indeksu	Nr celu pikiety	Odczyty krzywych diagramu na łacie				Odczyty kątów				Przewyższenie h	Wysokość punktu $H = H_r + h - p$	Uwagi
		krzywa podstawowa p	krzywa odległości o odległość $D = (o - p)\cdot k$	krzywa wysokości w	przy stałej k'	pionowego V ° g	′ c	poziomego H ° g	′ c	wynikowe: $h = \frac{D}{\operatorname{tg} z}$ kontrolne: z diagramu $h = (w - p)\cdot k'$		
1	2	3	4	5		6		7		8	9	10
Ps 5 *i = 1,49* *H_{st} = 100,00* *H_r = 100,09* *μ = 0^c^*	***Ps 4***							*0*	*00*			*Tachimetr Dahlta 010A nr fabr. 4118943*
	105	*0*	*0297* *29,7*	*0168*	*-10*	*103*	*60*	*31*	*25*	*-1,68* *-1,68*	***98,41***	
	106	*-0900*	*-0618* *28,2*	*-0739*	*-20*	*107*	*25*	*398*	*49*	*-3,23* *-3,22*	***97,76***	
	107	*+1000*	*1286* *28,6*	*1162*	*+50*	*82*	*45*	*69*	*72*	*+8,09* *+8,10*	***107,18***	

Należy sądzić, że wraz z szybko postępującym upowszechnieniem i spadkiem cen tachimetrów elektronicznych oraz ciągłym udoskonalaniem ich konstrukcji, dalmierze optyczne całkowicie wyjdą z użycia, ponieważ już od dłuższego czasu zaprzestano ich produkcji.

14.2.3. Tachimetry optyczne z dalmierzami dwuobrazowymi

Dwuobrazowe dalmierze optyczne realizujące paralaktyczny trójkąt prostokątny z rys. 14.1 b były wbudowane w popularne niegdyś instrumenty firmy Zeiss Jena: Redta 002 i BRT 006. Realizacja prostokątnego trójkąta paralaktycznego w nasadkach dalmierczych (np. Dimess) następowała dzięki przesłonięciu połowy pola widzenia lunety przez klin optyczny, znajdujący się przed obiektywem (rys. 14.8). Powoduje on przesunięcie wiązki promieni świetlnych względem drugiej wiązki promieni omijających klin, które wpadają do wnętrza lunety przez wolną (nie przesłoniętą) część obiektywu. Dzięki temu obserwator widzi w lunecie jednocześnie dwa obrazy. Zgodnie z zasadą tworzenia trójkąta paralaktycznego przez lunetę i klin optyczny, pokazaną na rys. 14.9 jeden obraz tego samego punktu O: jest utworzony przez elementy optyczne lunety bez klina i drugi powstaje

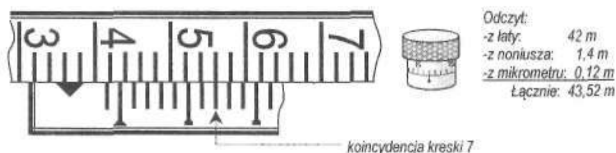


Rys. 14.8. Realizacja trójkąta paralaktycznego za pomocą klina optycznego

z udziałem klina i lunety. Widoczne na tym rysunku dwa promienie AO i AO_1 budują wraz z bazą b trójkąt paralaktyczny. Przy stałym i odpowiednio dobranym kącie ε funkcja ctg ε ze wzoru (14.2) stanowi stałą mnożną k dalmierza, tak dobraną, aby $k = 100$.

W tachimetrze autoredukcyjnym Redta (nazwa stanowi skrót od ***Red****uktions* ***Ta****chymeter*) trójkąt paralaktyczny jest realizowany przez parę ruchomych klinów, które dzięki obrotowi zależnemu od nachylenia lunety i wynikającej stąd odpowiedniej zmianie kąta paralaktycznego, powodują uzyskiwanie z łaty odczytu odległości zredukowanej do poziomu. Specjalnie skonstruowana łata noniuszowa o długości 2,09 m umożliwia odczytanie na jej podziale wielkości przesunięcia b promieni świetlnych przez klin (lub parę klinów). Ustawiana poziomo łata tachimetru Redta dzieli się na dwie części: na dolnej znajduje się noniusz o dokładności 0,2 m (po uwzględnieniu stałej k), zaś u góry występuje podział główny złożony z dwucentymetrowych działek, które po pomnożeniu przez $k = 100$ mają przy odczycie odległości wartość 2 m.

Dla zwiększenia dokładności odczytu dalmierz instrumentu Redta wyposażony jest w mikrometr optyczny, który służy do ustawiania koincydencji odpowiedniej kreski noniusza łaty z kreskami podziału głównego. Odczyt odległości składa się z: pełnych odcinków dwumetrowych odczytanych wg położenia kreski zerowej noniusza, pojedynczego metra i decymetrów w zakresie od 0 do 2,0 m uzyskiwanych na podstawie koincydującej kreski noniusza oraz centymetrowej końcówki odczytu w przedziale 0 – 20 cm otrzymywanych z podziałki naniesionej na bębenku mikrometru (rys. 14.9).



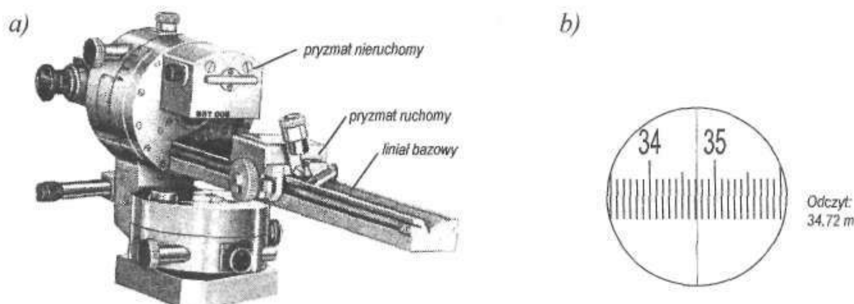
Rys. 14.9. Odczyt odległości z łaty i mikrometru instrumentu Redta

W okresie poprzedzającym upowszechnienie przyrządów elektronicznych bazowy tachimetr redukcyjny BRT 006 (rys. 14.10), produkowany przez zakłady Zeiss Jena w byłej NRD, dzięki łatwej i szybkiej obsłudze oraz stosunkowo niezłej dokładności (±6 cm na 100 m), jeszcze stosunkowo do niedawna był popularnym instrumentem geodezyjnym używanym do zdjęcia szczegółów sytuacyjnych wszystkich grup dokładnościowych metodą biegunową, szczególnie w warunkach gęstej zabudowy miejskiej.

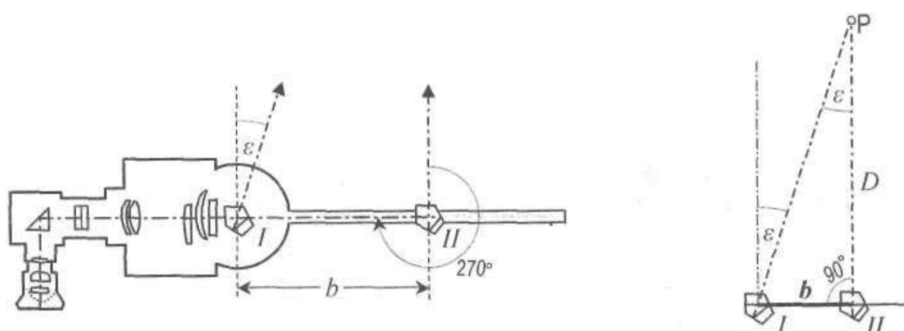
Tachimetr optyczny BRT 006 jest wyposażony w dalmierz dwuobrazowy z wbudowaną w instrument bazą utworzoną przez dwa pryzmaty pentagonalne na trzydziestocentymetrowym liniale bazowym. Oznacza to, że w przyrządzie BRT baza trójkąta paralaktycznego nie powstaje na łacie ustawionej na punkcie celu, lecz znajduje się na liniale bazowym zamontowanym po prawej stronie instrumentu.

Prostokątny trójkąt paralaktyczny jest realizowany poprzez zbieżne celowe dwóch pryzmatów pentagonalnych: nieruchomego I i ruchomego II. Pryzmat stały zasłania górną część obiektywu lunety i odchyla promienie świetlne pod kątem $270° - \varepsilon$, zaś

drugi ruchomy pryzmat, odchylający promienie świetlne pod kątem 270° (rys. 14.11) zakrywa dół obiektywu i może być przesuwany po liniale bazowym.

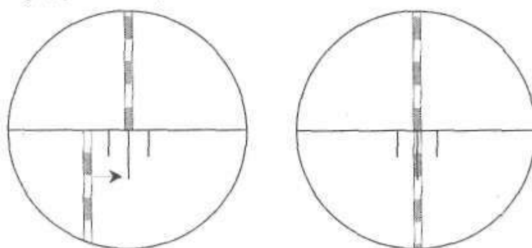


Rys. 14.10. Tachimetr BRT 006 i odczyt odległości na liniale bazowym



Rys. 14.11. Schemat optyczny tachimetru bazowego BRT 006

Po skierowaniu celowej górnego pryzmatu na obserwowany pionowy obiekt liniowy np. kreskę tarczy celowniczej lub tyczkę, należy tak przesunąć pryzmat ruchomy, aby płaszczyzny celowe obydwu pryzmatów przecięły się w miejscu ustawienia sygnału celowniczego. Objawi się to koincydencją obrazów wytwarzanych przez oba pryzmaty i układy optyczne lunety (rys. 14.12).



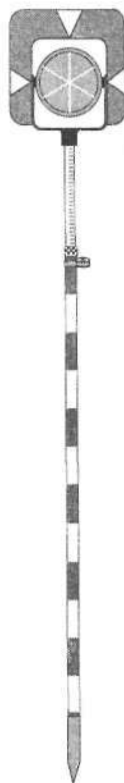
Rys. 14.12. Celowanie i doprowadzenie obrazu sygnału do koincydencji w lunecie instrumentu BRT 006 przed dokonaniem odczytu odległości

Stała mnożna k instrumentu BRT 006 jest równa 200, toteż trzydziestocentymetrowy liniał bazowy zapewnia zasięg instrumentu dochodzący do 60 m. Zasięg ten można zwiększyć do 90 m za pomocą specjalnej tarczy celowniczej, a w razie potrzeby nawet do

180 m, używając oryginalnej łaty z rysunkiem kresek, wchodzącej w skład wyposażenia tego instrumentu. Liniał opisany co 10 interwałów w jednostkach metrów, posiada działki o długości 0,5 mm, co po uwzględnieniu stałej mnożnej odpowiada 0,1 m. Odczyt szacunkowy (rys. 14.10 b) wykonuje się z dokładnością do 1 cm.

14.3. Tachimetry elektroniczne

Tachimetr elektroniczny stanowi połączenie teodolitu optycznego lub elektronicznego, umożliwiającego wyznaczanie kątów poziomych i pionowych oraz dalmierza elektromagnetycznego, realizującego na drodze elektronicznej pomiar odległości. Oprócz typowej optyki lunety podstawowymi modułami współczesnego tachimetru elektronicznego są: bateria (źródło zasilania), urządzenie kątomiercze, dalmierz elektrooptyczny, mikrokomputer, klawiatura numeryczna lub alfanumeryczna, wyświetlacz ciekłokrystaliczny, rejestrator, port do połączenia instrumentu z komputerem zewnętrznym w celu dwukierunkowej transmisji danych.



Rys.14.13. Pryzmat na tyczce

Tachimetr zawierający powyższe elementy, określany także angielskim wyrażeniem *total station*, stanowi połączenie teodolitu elektronicznego z fazowym dalmierzem elektrooptycznym, pracującym na podczerwieni. Poszczególne moduły instrumentu są umieszczone we wspólnej obudowie, tworząc jednolity system pomiarowo-obliczeniowy. Nowoczesne tachimetry elektroniczne zaopatrzone są w klawiaturę służącą do wprowadzania znaków alfanumerycznych, uruchamiania różnych funkcji i programów oraz ciekłokrystaliczny wyświetlacz, pełniący rolę monitora. Bogate oprogramowanie umożliwia wykorzystanie przyrządu do realizacji wielu zadań pomiarowych i obliczeniowych. Zapisy danych obserwacyjnych w pamięci wewnętrznej instrumentu lub w rejestratorze polowym mogą być następnie przekazywane w formie plików wejściowych do komputera za pośrednictwem kabla połączeniowego i portu umożliwiającego dwukierunkową wymianę informacji pomiędzy instrumentem a komputerem. Do wyposażenia tachimetrów elektronicznych dołączane są firmowe dyskietki z programami, służącymi do transmisji i zewnętrznego zarządzania danymi obserwacyjnymi za pomocą komputera podłączonego do przyrządu. Programy te umożliwiają także tworzenie nowych kodów i edycję istniejących, zapisanych w pamięci instrumentu w pliku bibliotek kodowych.

Tańszym rozwiązaniem, lecz mniej wygodnym w użyciu, jest tzw. *nasadka dalmiercza* (dalmierz nasadkowy), nakładana na lunetę teodolitu optycznego lub elektronicznego. Do tego zestawu, zwanego *modularnym tachimetrem elektronicznym*, może być także dołączony osobny rejestrator zewnętrzny. W obu omawianych przypadkach konieczne wyposażenie instrumentów stanowi reflektor zwrotny (pryzmat) i sygnał celowniczy, umocowane na tyczce (rys. 14.13) lub statywie ze spodarką.

Obsługa tachimetru elektronicznego jest prosta i polega na spoziomowaniu, scentrowaniu przyrządu, zorientowaniu stanowiska (kręgu poziomego) oraz włączaniu żądanych operacji i programów za pomocą klawiatury. Informacje terenowe zapisane w pamięci wewnętrznej lub zewnętrznej instrumentu mogą być przetransmitowane do komputera, gdzie stanowią pliki wsadowe do geodezyjnych programów obliczeniowych,

których głównym zadaniem jest określenie współrzędnych pomierzonych punktów, tworzących bazę danych dla mapy numerycznej.

W dziedzinie produkcji tachimetrów elektronicznych na rynku światowym panuje bardzo duża konkurencja, dzięki czemu potencjalnym użytkownikom oferowane są coraz to nowsze modele instrumentów o zwiększonym zakresie zastosowania, oprogramowania i oprzyrządowania, wyższej dokładności oraz funkcjonalności pracy. Do najbardziej znanych w Polsce producentów tachimetrów elektronicznych oraz szerokiego asortymentu sprzętu geodezyjnego, będących światowymi potentatami w tej dziedzinie, należą firmy europejskie: Leica (Leitz-Wild), Spectra Precisions (dawniej AGA lub Geotronics), Zeiss obecnie zaś Trimble oraz japońskie: Sokkia, Topcon, Nikon, Pentax.

Działanie dalmierza elektromagnetycznego opiera się na pośrednim wyznaczeniu czasu t, podczas którego sygnał pomiarowy przenoszony za pomocą fali elektromagnetycznej przebywa mierzoną odległość D w kierunkach: tam i z powrotem. Znaczną większość dalmierzy geodezyjnych stanowią *dalmierze fazowe*, w których nadajnik wysyła ciągłą, zmodulowaną sinusoidalnie falę elektromagnetyczną , zaś pomiar czasu t odbywa się w sposób pośredni na zasadzie wyznaczenia tzw. *przesunięcia fazowego (opóźnienia fazowego)*, czyli różnicy faz fali emitowanej z nadajnika i fazy fali powracającej do odbiornika po jej odbiciu (retransmisji) przez reflektor zwrotny. W *dalmierzach elektrooptycznych* (świetlnych) nośnikiem sygnałów pomiarowych są fale elektromagnetyczne z zakresu światła widzialnego lub podczerwieni zbliżonej długością fal do światła widzialnego.

Pomiar odległości dalmierzem elektrooptycznym polega na wysłaniu zmodulowanej fali świetlnej przez nadajnik N (rys. 5.25) ustawiony w punkcie początkowym A mierzonej odległości w kierunku jej punktu końcowego B, na którym umieszczony jest reflektor zwrotny, odbijający falę i kierujący ją do punktu A, gdzie jest przyjmowana przez odbiornik O umieszczony w tym samym instrumencie co nadajnik.

W tachimetrach elektronicznych produkowanych współcześnie procedura związana z określeniem odległości i połączenie wszystkich liczb potrzebnych do zestawienia wyników pomiarów długości i kątów jest realizowana automatycznie przez mikrokomputer instrumentu, zaś po wycelowaniu na reflektor i naciśnięciu odpowiedniego przycisku klawiatury, na wyświetlaczu ukazuje się końcowy rezultat pomiaru zależny od nastawionego wcześniej szablonu wyświetlania wyników w postaci zespołów odczytów obejmujących: kąty pionowe i poziome, odległości skośne (rzeczywiste), zredukowane, przewyższenia lub współrzędne pikiety.

Oprócz opisanych w ust. 5.7 reflektorów pryzmatycznych stosuje się małe pryzmaty z tworzyw sztucznych lub lżejsze, płaskie tarcze celownicze, w których powierzchnię wtopione są małe pryzmaciki, działające na tej samej zasadzie co ich duże odpowiedniki. Podobnie funkcjonują sygnały wykonane ze specjalnych folii odblaskowych.

Najnowsza generacja tachimetrów elektronicznych to instrumenty wyposażone w dalmierz, który na określonym dystansie (przeważnie do ok. 200 m) może dokonać pomiaru odległości poprzez odbicie fali pomiarowej od dowolnej powierzchni np. ściany budynku, nie wymaga więc ustawienia pryzmatu w punkcie celu. Pomiar bez lustra pozwala więc na zdejmowanie punktów niedostępnych, zaś jego zasięg zależy od właściwości dalmierza i od struktury oraz jasności powierzchni odbijającej sygnał.

Prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w atmosferze, decydująca o prawidłowości określenia czasu t jest zmienna, zależna od długości λ_n fali nośnej sygnału oraz parametrów meteorologicznych: temperatury, ciśnienia i wilgotności powietrza. Podczas pracy dalmierza należy więc zmierzyć te parametry, a szczególnie temperaturę powie-

trza i ciśnienie. Na tej podstawie wprowadza się poprawkę K_a obliczoną z odpowiednich wzorów lub nomogramów zamieszczonych w instrukcji obsługi instrumentu.

Jak już wcześniej wspomniano, w zależności od zestawienia podstawowych elementów tachimetru, a szczególnie sposobu połączenia teodolitu z dalmierzem elektrooptycznym, rozróżniamy tachimetry elektroniczne modularne i zintegrowane.

Tachimetr modularny stanowi przyrząd złożony z dwóch podstawowych modułów: nasadki dalmierczej i teodolitu optycznego lub elektronicznego, łatwy do połączenia, a następnie w razie potrzeby – do rozdzielenia. Dodatkowo zespół ten można wyposażyć w port do łączenia zestawu z komputerem lub rejestratorem zewnętrznym, dokonującym elektronicznego zapisu wyników pomiaru. Nasadka może być zamontowana na lunecie teodolitu lub jej wspornikach albo pracować samodzielnie jako dalmierz, nie stanowiąc jednak wtedy tachimetru. Ustawienie nasadki na dźwigarze wymaga oddzielnego nastawiania na cel lunety teodolitu (układu kątomierczego) a następnie układu dalmierczego, a ściślej nadajnika sygnału pomiarowego, co ze względu na podwójne celowanie raczej ogranicza zastosowanie takiego zespołu do tachimetrii, która z samego założenia powinna być szybkim pomiarem. Osadzenie nasadki na korpusie lunety umożliwia zgranie układów celowniczych dalmierza i teodolitu, a więc jednoczesne celowanie z obydwu modułów, dodatkowo obciąża jednak łożyska lunety, a często wymaga zrównoważenia nasadki poprzez umieszczenie przeciwwagi na okularze lunety.

Tachimetr zintegrowany stanowi fabryczne połączenie części kątomierczej i dalmierczej. Tachimetr ten składa się z: teodolitu elektronicznego, dalmierza elektrooptycznego, klawiatury numerycznej lub alfanumerycznej, rejestratora oraz mikroprocesora, tworzących razem we wspólnej obudowie jednolity system pomiarowy. Mikroprocesor sterujący pracą instrumentu, rozwiązuje zagadnienie wieloznaczności elektromagnetycznego pomiaru długości, dokonuje obliczeń poprawek na nachylenie, poziom morza, atmosferycznych, instrumentalnych, na krzywiznę Ziemi i refrakcję do wyników pomiaru kątów i odległości, które w wersji zredukowanej są wyświetlanie na ekranie *LCD*[*]. Realizuje też działanie oprogramowania, które zwiększa zakres pomiarowego wykorzystania tych instrumentów oraz umożliwia wykonywanie na stanowisku obserwacyjnym obliczeń wynikowych i kontrolnych. Zadaniem programów jest przetwarzanie danych z pomiaru lub informacji zgromadzonych wcześniej w pamięci wewnętrznej przyrządu.

Standardowymi *programami* zainstalowanymi w mikrokomputerach współczesnych tachimetrów elektronicznych są: pomiar mimośrodowy, tyczenie punktów i osi obiektów w ramach pomiarów realizacyjnych, wyznaczanie współrzędnych stanowisk swobodnych, z których widoczne są przynajmniej dwa punkty o znanych współrzędnych, obliczanie czołówek pomiędzy wybranymi pikietami, obliczanie pól wieloboków wyznaczonych przez pikiety, określanie wysokości punktów niedostępnych i inne. Niektóre modele tachimetrów umożliwiają także realizację programów napisanych przez użytkownika instrumentu lub modyfikowanie przez niego już istniejących programów.

Wyniki pomiaru tachimetrycznego w zależności od opcji wcześniej ustawionej przez obserwatora mogą być wyświetlane i rejestrowane jako rekordy w ramach plików obserwacyjnych w różnych postaciach określanych jako tzw. *szablony wyświetlania*, które w tachimetrach firmy Leica występują w następujących zestawach:

1. Numer punktu, kąt poziomy, kąt pionowy, odległość skośna: Pt, Hz, V, ◢
2. Kąt poziomy, kąt pionowy, odległość pozioma, przewyższenie: Hz, V, ◢, ◢

---

[*] *Liquid Crystal Display* – wyświetlacz ciekłokrystaliczny.

3. Numer punktu Pt, współrzędna *E* wschodnia (*Y*), współrzędna *N* północna (*X*), wysokość *H*: Pt, E, N, H
4. Kąt poziomy, kod punktu, odległość pozioma, wysokość reflektora: Hz, Cod, ◢, hr

Zmiana szablonu wyświetlania rezultatów pomiaru następuje po naciśnięciu odpowiedniego przycisku klawiatury. Z podanego wyższej przykładowego zestawienia szablonów wynika, że tachimetry elektroniczne mają możliwości wspomagania numeracji, kodowania i zapisu w pamięci zdejmowanych punktów w celu automatyzacji dalszego przetwarzania informacji terenowych uzyskanych w wyniku pomiaru.

Większość instrumentów posiada również możliwość pomiaru kątów i odległości w kilku *trybach* (przeważnie w trzech) różniących się dokładnością i szybkością pomiaru.

1. Dokładny, stosowany do pomiaru osnów szczegółowych i dokładnego tyczenia.
2. Standardowy, stosowany przy zakładaniu osnowy i pomiaru tachimetrycznego.
3. Śledzący (ciągły) określany angielskim wyrazem *tracking*, czyli szybki i nieprzerwany pomiar do przemieszczającego się pryzmatu.

Dokładność pomiaru kątów w teodolitach i tachimetrach elektronicznych określana jest poprzez odchylenie standardowe wyrażone w sekundach lub decymiligradach wg normy DIN nr 18723, natomiast dokładność pomiaru odległości – dwuczłonowo zgodnie ze wzorem (5.25). Pierwszy człon stanowi błąd stały wyrażony w milimetrach, zaś drugi wyrażony w ppm. jest proporcjonalny do mierzonej odległości.

Zasilanie tachimetru w energię może odbywać się za pomocą większego akumulatora zewnętrznego lub najczęściej przy wykorzystaniu dającej się doładowywać niewielkiej baterii wewnętrznej, umieszczonej we wsporniku lunety lub module zamontowanym na lunecie. Zasób energetyczny naładowanej baterii określany jest za pomocą liczby pikiet, które można pomierzyć przy jej użyciu lub poprzez czas pomiaru kątów i odległości na jednej baterii. Przygotowując instrument do prac polowych należy dysponować co najmniej dwiema w pełni naładowanymi bateriami wewnętrznymi, z których jedna powinna znajdować się wewnątrz tachimetru, zaś druga, zapasowa – w jego opakowaniu.

Rejestracja danych pomiarowych może być dokonana w pamięci wewnętrznej instrumentu, w którą obecnie są wyposażane niemal wszystkie tachimetry elektroniczne. Pojemność pamięci wewnętrznej jest wyrażana w megabajtach (MB) lub za pomocą maksymalnej ilości punktów (pikiet), których dane pomiarowe można zapisać w nośniku pamięci konkretnego instrumentu. W razie braku pamięci wewnętrznej w danym modelu instrumentu lub konieczności zwiększenia pojemności tej pamięci, można zastosować rejestrator zewnętrzny np. *GRE* (Leica), *PSION* lub inny, łączony z instrumentem za pośrednictwem specjalnego wyjścia (portu) przy pomocą kabla znajdującego się w wyposażeniu. W niektórych nowszych modelach tachimetrów istnieje także inny sposób rozszerzenia pamięci dzięki możliwości instalowania wymiennych kart pamięci *PCMCIA** o pojemności 2 – 82 MB. Dodatkową zaletą tych kart jest możliwość wymiany danych pomiędzy tachimetrem a komputerem, bez przenoszenia do biura całego instrumentu.

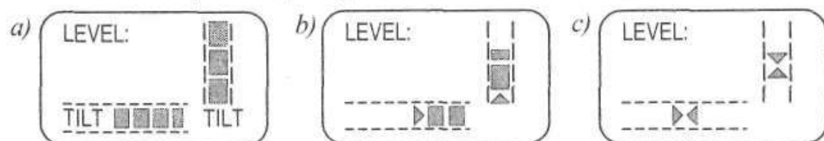
Tachimetry elektroniczne wyposażane są w *kompensatory* automatycznie korygujące odchylenia osi obrotu instrumentu *v* od pionu. Kompensatory jednoosiowe (*X*) redukują wpływ odchylenia w pionowej płaszczyźnie kolimacyjnej przechodzącej przez oś celową lunety *c*, natomiast dokładniejsze od nich kompensatory dwuosiowe (*X, Y*) określają

* *Personal Computer Memory Card International Association* – międzynarodowe stowarzyszenie producentów kart pamięci do komputerów osobistych.

i korygują obie składowe odchylenia tzn. uwzględniają poprzednią składową oraz składową odchylenia osi *v* w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez oś obrotu lunety *h*. W tachimetrach elektronicznych z reguły stosowane są kompensatory cieczowe, zawierające naczynie, w którym powierzchnia cieczy, zachowująca zawsze położenie poziome, tworzy stałą płaszczyznę odniesienia umożliwiającą określenie kąta odchylenia osi *v* od pionu. Na tej podstawie mikroprocesor instrumentu oblicza poprawki do pomierzonych kątów poziomych i pionowych i automatycznie je redukuje, zaś na wyświetlaczu podawane są wartości poprawione. Zakres kompensacji wynoszący zwykle kilka minut ±(3′–6′) odpowiada dokładności przybliżonego poziomowania za pomocą libeli okrągłej.

Zintegrowane tachimetry typu total station posiadają także zespoły, elementy i mechanizmy takie jak: luneta, libele alidadowe, pion optyczny, spodarka, śruby poziomujące, zaciskowe i leniwki występujące również w teodolitach optycznych , toteż wielu producentów zakłada w instrukcjach instrumentów elektronicznych, że ich użytkownik zna obsługę wspomnianych urządzeń oraz zasady przygotowania instrumentu do pracy i pomiaru kątów klasycznymi teodolitami.

Niektóre z wyżej wyszczególnionych elementów zostały jednak w pewnych modelach tachimetrów zmodernizowane. Na przykład pion optyczny może być zastąpiony pionem laserowym, zaś alidadowa libela podłużna (rurkowa) – *libelą elektroniczną*. Poziomowanie instrumentu przy jej użyciu rozpoczyna się od ustawienia klawiatury w położeniu równoległym do dwóch śrub ustawczych spodarki, po czym dwie składowe wychylenia osi obrotu instrumentu w kierunku równoległym i prostopadłym do klawiatury usuwa się w tym samym ustawieniu alidady obrotami śrub poziomujących spodarki, uzyskując ostatecznie obraz pokazany na rys. 14.14 c.

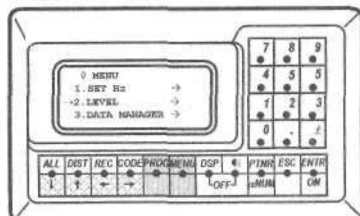


Rys. 14.14. Obrazy wyświetlacza przedstawiające fazy poziomowania tachimetru Leica TC 605 za pomocą libeli elektronicznej

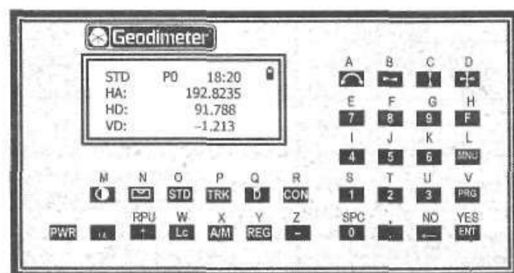
W większości tachimetrów elektronicznych wyróżniane są dwa tryby pracy: tryb pomiarowy (normalny) oraz tryb „Menu". Przejście z normalnego trybu pomiaru do trybu „Menu" następuje po naciśnięciu na klawiaturze instrumentu odpowiedniego klawisza oznaczonego zwykle symbolem MENU (MNU) (rys. 14.15). W trybie tym można między innymi korzystać z możliwości dokonywania nastawień konfiguracyjnych i rektyfikacji instrumentu, rejestracji danych oraz wykorzystywać programy przeznaczone do realizowania pomiarów specjalnych i obliczeń.

Ważne zagadnienie związane z wygodą korzystania z tachimetrów elektronicznych stanowi *język* oprogramowania komunikatów pojawiających się na wyświetlaczu podczas pomiarów i wykorzystywania programów użytkowych. Standardowo jest nim język angielski, chociaż obecnie ze względu na silną konkurencję w handlu przyrządami geodezyjnymi wielu producentów np. firmy japońskie, a ostatnio także europejskie: Zeiss, Leica, Spectra Precision kierują na nasz rynek instrumenty z oprogramowaniem w języku polskim. W niektórych instrumentach można też samodzielnie wybrać wersję językową poprzez dokonanie odpowiednich nastawień w menu konfiguracyjnym.

Widocznym mankamentem aktualnie produkowanych tachimetrów elektronicznych jest brak unifikacji przyrządów, polegającej na przynajmniej częściowym ujednoliceniu klawiatur, sposobów wyświetlania wyników, znormalizowaniu typowych pomiarów i funkcji instrumentu. W rezultacie użytkownik dobrze znający obsługę jednego typu tachimetru bez wcześniejszego zaznajomienia się z instrukcją obsługi drugiego modelu będzie miał trudności z jego obsługą, zwłaszcza gdy został on wyprodukowany przez inną wytwórnię. Można to stwierdzić porównując klawiatury i teksty wyświetlanych komunikatów w poszczególnych typach instrumentów różnych firm (rys. 14.15).



Leica TC 605



Geodimeter 608



Topcon GTS 211D

Rys. 14.15. Przykłady różnych klawiatur tachimetrów elektronicznych

Konkurencja na rynku sprzętu geodezyjnego powoduje również stopniowo pożądaną obniżkę cen i bardzo szybki postęp w dziedzinie konstrukcji zintegrowanych tachimetrów elektronicznych, polegający na ulepszaniu ich cech ergonomicznych, dokładności i rozszerzaniu możliwości zastosowań. Dla nadążania za zmieniającą się techniką warto śledzić jej rozwój w tej dziedzinie poprzez Internet, uczestnictwo w targach i pokazach sprzętu geodezyjnego oraz piśmiennictwo.

Oprócz poprawy takich parametrów jak: dokładność pomiaru kątów i odległości, zwiększanie pojemności pamięci wewnętrznej, rozszerzanie oprogramowania itp. innowacjami wprowadzanymi aktualnie do nowszych modeli instrumentów są między innymi:

1. Pomiar pikiet bez lustra i folii odblaskowej (bez sygnalizacji), dający możliwość pracy jednoosobowej (obserwatora) i zdejmowania punktów niedostępnych.
2. Zapewnienie całkowitej wodoodporności tachimetru.
3. Wyposażenie w serwomotory zastępujące ręczne obracanie lunety i alidady.
4. Automatyczne naprowadzanie i śledzenie (monitoring) poruszającego się celu.
5. Możliwość obsługiwania instrumentu z pozycji pryzmatu (*one man system*).
6. Złącze na podczerwień do bezprzewodowego przesyłania danych do komputera.
7. Możliwość współpracy z GPS i rozbudowy instrumentu o dodatkowe moduły.
8. Zastosowanie klawiatury kodowanej zamiast klawiatury alfanumerycznej. Kodowanie polega w tym przypadku na nadaniu poszczególnym przyciskom wielu funkcji w zależności od aktualnego trybu pracy.

Zestawienie aktualnych modeli tachimetrów elektronicznych i ich najważniejszych parametrów jest publikowane corocznie w fachowym czasopiśmie „Geodeta", na podstawie którego (nr 12 [67]/2000; nr 12 [79]/2001) zebrano dane w tabelach 14.3, 14.4.

Tabela 14.3. Zestawienie ważniejszych parametrów tachimetrów dostępnych w Polsce (r. 2001)

Firma (grupa typów)	Model	Błąd kąta cc	Błąd odległ. mm + ppm	Powiększ. lunety $G \times$	Kompensator	Zasięg na 1 lustro [km]	Praca bez sygnału [m]	Pamięć wewn.	Oprogr. polskie	Bateria wewn. $\sphericalangle+d$ [l.pikiet lub godz.]	Masa z bat. [kg]	Cena [zł] (2000 r.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Carl Zeiss	Elta S10/S20	3/10	1+2/2+2	30×	2-os.	2,5	nie	4 MB =32000 p.	nie	300 pikiet	8,7	>60000/ >70000
	Elta C20/C30	7/10	2+2	30×	2-os.	2,5	nie	4 MB =32000 p.	nie	400 pikiet	6,2	>50000/ >40000
	Elta R45/R55	10/15	3+3/5+3	26×	1-os.	1,5/1,3	nie	1900p.	tak	1000 pikiet	3.5	25700/ /20000
Leica	TPS 5000 TDM 5005/ TDA 5005	1,5	1+2	32/42×	2-os.	3,5	nie	64000p.	nie	600 pikiet	8,1/8,7	brak danych
	TPS 2000 TC 2003/ TCA 2003	1,5	1+1	30×	2-os.	3,5	nie	64000p.	nie	600 pikiet	8,1/8,7	>85400
Leica TPS 1100	1101/1102/ 1103/1105	5/6/9/15	2+2	30×	2-os.	3,5	80	do 64000 p.	tak	600 pikiet	5,9	od 44000
Leica TPS 700	702/703/ /705	6/9/15	2+2	30×	2-os.	3,5	80	4000 p.	tak	2000 pikiet	5,3	37700
Leica TPS 300	302/303/ /305/307	6/9/15/20	2+2	30×	2-os.	3,5	80	4000 p.	tak	1000 pikiet	4,5	22900
Nikon	DTM 550/530/ /520	2/5/10	2+2	33×	2-os.	2.7/2,5/2,0	nie	5000 p.	tak	10,5 h	5,5	40000/ 35000/ 29000
	DTM 851/831/ /821	3/6/10	2+2	33×	2-os.	2,7/2,5/2,0	nie	5000 p.	nie	15000 pikiet	5,6	49500/ 45900/ 41500
	DTM 350/330	15	3+2	28×	2-os./ 1-os.	1,5	nie	5000 p.	tak	27 h	5,1/4,9	23900/ 21990
	NPL 820	10	3+3	26×	2-os.	5,0	nie	5000 p.	nie	3,5 h	5,9	57200
	C 100	19	5+5	26×	1-os.	0.7	nie	brak	nie	4,5 h	5,8	18700
Pentax	ATS 101/102/ /105	3/6/15	2+2/2+2/ /3+3	32×	2-os.	2,7/2,7/2,3	nie	1 MB.	nie	3 h	7,0	41200/ /45300/ /41800
	PCS 325/315	15	3+2	30×	2-os/ /1-os.	1,0	nie	5000 p.	nie	5 h/2,5 h	5,1	28100/ 24950
	PCS 225/215	15	3+3	30×	brak	1,0	nie	brak	nie	4 h	5,1/5,0	22450/ 19500
	DA 020F	50	5+5	24×	brak	0.37	nie	brak	nie	2,5 h	3,5	15980
Sokkia	SET 1010/2010/ /3010/4010	3/6/10/15	2+2	30×	2-os.	2,7/2,7/ 2,5/1,8	nie	5000 p.	nie	500 pikiet	5,4	od 40890
	SET 2110/3110/ /4110	6/10/15	2+2	30×	2-os.	2,7/2,5/1,8	nie	3000 p.	tak	660 pikiet	5.3	od 37500
	SET 500	15	3+2	30×	2-os.	2,2	nie	4000 p.	tak	600 pikiet	5,2	26860
	SET 600	19	3+2	26×	2-os.	1,8	nie	2000 p.	tak	600 pikiet	5,1	23110
Spectra Precision	Geodimeter 650	3	1+1	26× lub 30×	2-os.	3,5	200	10000 p.	tak	1400 pikiet	6,9	brak danych
	Geodimeter 640/620/610	3/5/10	2+2	26× lub 30×	2-os.	2.8	200	10000 p.	tak	1400 pikiet	6,9	
	Geodimeter 608	10	3+3	26× lub 30×	2-os.	1.8	200	10000 p.	tak	1400 pikiet	6,9	
	Constructor 100	15	5+3	26×	2-os.	0.9	nie	800 p.	tak	1400 pikiet	6.9	
Topcon	GTS 800/ 801/802	3/6/10	2+2	30×	2-os.	2.3	nie	30000 p.	tak	5 h	7,8	80800/74800 69000
	GTS 710/ 711/712/ /713	3/6/10/ /15	2+2	30×	2-os.	2,7/2,7/2,5/ /1,9	nie	5000 p.	tak	6 h 5000 pikiet	6.9	60509/54235/ 50514/46831
	GTS 601/ 602/603/ /713	3/6/10/ /15	2+2	30×	2-os.	3,5/3,5/3,5/ /2,3	nie	5000 p.	tak	6.5 h	5,8	46137/42614/ 38500/36997
	GPT1001/ 1002/1003/ /1004	63/10/ /15/19	3+2	30×	2-os.	6,0	130	5000 p.	tak	3,5/3,5/1,5/ 1,5 h	5,9/5,9/ 5,1/5,1	63665/59686/ 41792/33900
	GTS 223/ 225/226/ /229	9/15/19/ /28	2+2/2+2/ 2+2/3+3	30×	2/2 /2/1 os.	3,5/3,5/ /3,5/2,3	nie	8000 p.	tak	10 h	4,9	29900/25500/ 22900/19990

Tabela 14.4. Zestawienie ważniejszych parametrów nowych tachimetrów oferowanych w r. 2002

Firma (grupa typów)	Model	Błąd kąta cc	Błąd odległ. mm + ppm	Powiększ. lunety $G \times$	Kompensator	Zasięg na 1 lustro [km]	Praca bez sygnału [m]	Pamięć wewn.	Oprogr. polskie	Bateria wewn. $\sphericalangle + d$ [l.pikiet lub godz.]	Masa z bat. [kg]	Cena [zł] (2001 r.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Trimble	5601/5602/ 5603/5605	3/6/9/15	2+2/2+2/ /2+2/3+3	26× 30× (opcja)	2-os.	2,5/2,0/ /1,5/1,2	nie	do 10000 p.	nie	400 pikiet	6,3	brak danych
	5601/5602/ 5603/5605 DR200+	3/6/9/15	3+3 do 200 m 5+3 >200 m	26× 30× (opcja)	2-os.	5,5	tak	do 10000 p.	nie	400 pikiet	6,3	brak danych
	3602/3603/ /3605 (DR)	6/9/15	2+2	30×	2-os.	5,0	tak	4 MB= =32000 p.	tak	8 h	6,7	od 33000
	3303/3305	9/15	2+2	26×	1-os.	5,0	tak	1900p.	tak	1000 pikiet	3,5	od 21000
Leica	TPS 5000 TDM 5005/ TDA 5005	1,5	1+2	32/42×	2-os.	3,5	nie	64000p.	nie	600 pikiet	8,1/8,7	brak danych
	TPS 2000 TC 2003/ TCA 2003	1,5	1+1	30×	2-os.	3,5	nie	64000p.	nie	600 pikiet	8,1/8,7	>65400
Leica TPS 1100	1101/1102/ 1103/1105	5/6/9/15	2+2	30×	2-os.	3,5	80	do 64000 p.	tak	600 pikiet	5,9	od 44000
Leica TPS 700	702/703/ /705	6/9/15	2+2	30×	2-os.	3,5	80	4000 p.	tak	2000 pikiet	5,3	37700
Leica TPS 300	302/303/ /305/307	6/9/15/20	2+2	30×	2-os.	3,5	80	4000 p.	tak	1000 pikiet	4,5	22900
Nikon	DTM 551/531/ /521	1/2/2	2+2	33×	2-os.	2,7	nie	8000 p.	tak	24 h	5,5	od 28990
	DTM 851/831/ /821	3/6/10	2+2	33×	2-os.	2,7/2,5/2,0	nie	30000 p.	nie	5 h	5,6	od 41500
	DTM 350/330	15	3+2	28×	2-os./ 1-os.	1,5	nie	5000 p.	tak	27 h	5,1/4,9	23900/ 21990
	NPL 821	10	3+3	26×	2-os.	5,0	tak	30000 p.	nie	3,8 h	5,9	57200
	NPL 350	15	5+3	26×	2-os.	5,0	tak	5000 p.	tak	18 h	5,6	31900
Pentax	ATS 101/102/ /105	3/6/15	2+2/2+2/ /3+3	32×	2-os.	2,7/2,7/2,3	nie	1 MB.	nie	3 h	7,0	41200/ /45300/ /41800
	R-115/ /R125(N)	15	5+3	30×	2-os.	4,0	tak modele N	7500 p.	?	6 h	5,2	20950/ 27900
	PCS 325/315	15	3+2	30×	2-os/ /1-os.	1,0	nie	5000 p.	nie	5 h/2,5 h	5,1	28100/ 24950
	PCS 225/215	15	3+3	30×	brak	1,0	nie	brak	nie	4 h	5,1/5,0	22450/ 19500
	DA 020F	50	5+5	24×	brak	0,37	nie	brak	nie	2,5 h	3,5	15980
Sokkia	SET 1010/2010/ /3010/4010	3/6/10/15	2+2	30×	2-os.	2,7/2,7/ 2,5/1,8	nie	5000 p.	nie	500 pikiet	5,4	od 40890
	SET 2110/3110/ /4110	6/10/15	2+2	30×	2-os.	2,7/2,5/1,8	nie	3000 p.	tak	660 pikiet	5,3	od 37500
	SET3110R/ 4110R	10/15	5+3	30×	2-os.	4,0	?	3000 p.	tak	5,5 h	5,4	od 36290
	SET300/500 600/	10/15/19	5+2	30×/30×/26×	2-os.	2,2/2,2/1,8	nie	4000/4000/ 2000 p.	tak	600 pikiet	5,0	32690/23000/ /19300
	SET4110M	15	2+2	30×	2-os.	1,6	?	20000 p.	nie	3 h	7,1	?
Topcon	GTS 800A/ 801A/802A	3/6/10	2+2	30×	2-os.	2,0	nie	30000 p.	tak	5 h	7,8	98251/91611/ 85402
	GTS 710/ 711/712/ /713	3/6/10/ /15	2+2	30×	2-os.	2,7/2,7/2,5/ /1,9	nie	5000 p.	tak	6 h 5000 pikiet	6,9	60509/54235/ 50514/46831
	GTS 601/ 602/603/ /605	3/6/10/ /15	2+2	30×	2-os.	3,0/3,0/3,0/ /2,0	nie	5000 p.	tak	6,0 h	5,8	46137/42614/ 38500/36997
	GTS 223/225/ /226/229	10/15/20/ /30	2+2/2+2/ 2+2/3+3	30×	2/2/2/ /1-os.	3,5/3,5/3,5/ /2,5	nie	16000 p.	tak	10 h	4,9	29900/25500/ 21900/19990
	GPT6001/ 6002/6003/ /6005	3/6/10/ /15	3+2	30×	2-os.	7,0	tak do 150 m	5000 p.	tak	6 h	5,9	?
	GTS 223/ 225/226/ /229	9/15/20/ /30	2+2/2+2/ 2+2/3+3	30×	2/2/1/ /1 os.	3,5/3,5/ /3,5/2,3	nie	8000 p.	tak	10 h	4,9	29900/25500/ 22900/19990
	GPT 2003/2005/ 2006//2009	9/15/20/ /30	3+2	30×	2/2/1/ /1 os.	7,0/7,0/ 4,0/4,0	tak 150/ 150/100/100	8000 p.	tak	3,5 h	5,0	35990/31990/ 27990/25990

Rozdział 15: Mapy

15.1. Definicja i cechy mapy

Mapa geograficzna jest płaskim, uogólnionym rysunkiem, wykonanym w zmniejszeniu według określonej formuły matematycznej, przedstawiającym z uwzględnieniem krzywizny Ziemi, za pomocą znaków umownych przedmioty i zjawiska związane z jej powierzchnią. W myśl powyższej definicji mapami nie są: rysunki powierzchni Ziemi na kuli (globusy), mapy plastyczne (reliefy), szkice polowe, zdjęcia lotnicze i naziemne, realistyczne obrazy malarskie itp. Na treść mapy mogą składać się naturalne i sztuczne obiekty terenowe, zjawiska przyrodnicze lub społeczno-gospodarcze. Zamieszczona wyżej definicja dotyczy tradycyjnej mapy graficznej (analogowej), na której krajobraz geograficzny jest przedstawiony w postaci rysunkowej. Postęp w zakresie informatyki umożliwił powstanie mapy, której treść jest zapisana w formie cyfrowej - tzw. *mapy numerycznej*, opisanej w ust. 15.9.

Z podanej definicji mapy wynikają jej następujące cechy szczególne:

1. Mapa jest dwuwymiarowym rysunkiem (obrazem) wykonanym na płaszczyźnie podkładu mapowego, którym może być: deska, tkanina, arkusz papieru lub folii kreślarskiej, tzw. plansza aluminiowa, powierzchnia ekranu monitora itp.
2. Elementy powierzchni Ziemi lub zjawiska przedstawione są na mapie w zmniejszeniu, wynikającym z przyjętej skali tej mapy.
3. Mapa jest sporządzona w oparciu o osnowę geodezyjną i według matematycznej formuły odwzorowawczej, ustalającej zasadę przedstawienia zakrzywionej powierzchni Ziemi na płaszczyźnie rysunku, co jak wiadomo nie jest możliwe bez pewnych zniekształceń. Dzięki ich zminimalizowaniu mapa odznacza się kartometrycznością, czyli posiada właściwości pomiarowe i w miarę możliwości jednolitą dokładność. Cecha ta zapewnia zgodność kątów, długości i pól pomierzonych na mapie z ich wartościami rzeczywistymi. Stopień tej zgodności jest uwarunkowany wieloma czynnikami, szczególnie: dokładnością graficzną, rodzajem odwzorowania i skalą danej mapy.
4. Treść mapy jest przedstawiona symbolicznie za pomocą znormalizowanych znaków umownych (symboli graficznych) i opisów oraz ustalonych wymiarów arkuszy. Dla ujednolicenia określonych klas, zespołów i grup map (zob. ust. 15.7) podczas wykonywania rysunku i opisów należy ściśle przestrzegać odpowiedniej instrukcji kartograficznej. W procesie redagowania mapy nie ma więc miejsca na dowolność. Znaki umowne i opisy cyfrowe i literowe zapewniają mapie poglądowość, polegającą na wyróżnieniu na mapie tych przedmiotów i zjawisk, które są zgodne z jej zaplanowanym wykorzystaniem i mają istotne znaczenie dla użytkownika mapy.
5. Dla uzyskania dobrej czytelności mapy jej rysunek musi być zgeneralizowany (uogólniony) tzn. pomija się na nim szczegóły nieistotne z punktu widzenia jej przyszłego zastosowania, zaś zarysy innych szczegółów mogą zostać uproszczone. Głównym czynnikiem decydującym o jakości, ilości i stopniu uproszczenia szczegółów, jakie można umieścić na mapie i dokładności ich usytuowania, jest przeznaczenie i skala mapy. Mapy w większych skalach zawierają większy zasób treści, zaś

składające się na nią przedmioty terenowe przedstawione są dokładniej niż na mapach w mniejszych skalach.

Mapy są podstawowymi źródłami informacji dotyczących przestrzennego rozmieszczenia przedmiotów i zjawisk występujących na powierzchni Ziemi. Odgrywają ważną rolę naukową i gospodarczą w takich dziedzinach jak: nauki o Ziemi (geografia, geomorfologia, geodezja, geologia, gleboznawstwo), szkolnictwo, historia, archeologia, administracja, komunikacja i nawigacja, turystyka, transport, architektura, planowanie przestrzenne, ewidencja gruntów (kataster), wojskowość, różne gałęzie inżynierii i inne.

Zasadniczym kryterium klasyfikacji map jest ich treść, czyli problemowy zakres przedstawianych na nich przedmiotów i zjawisk. Z tego względu mapy dzielimy na *ogólnogeograficzne* (geograficzne ogólne) i *tematyczne* (geograficzne specjalne). Pierwsze z nich uwzględniają w jednakowym stopniu ważniejsze elementy krajobrazu geograficznego, przy czym żaden z elementów nie jest szczególnie wyeksponowany. Mapy tematyczne są opracowaniami kartograficznymi wyróżniającymi jeden lub kilka elementów treści ogólnogeograficznej albo określone zagadnienie przyrodnicze lub społeczno-gospodarcze. *Tłem mapy tematycznej* dla przedstawienia jej treści, spełniającym funkcję osnowy geograficznej, zwanej także podkładem geograficznym, jest odpowiednio dobrana mapa ogólnogeograficzna lub dla map tematycznych w dużych skalach – mapa zasadnicza. Tło nadaje mapie tematycznej matematyczną powierzchnię odniesienia, odwzorowanie kartograficzne, układ współrzędnych, krój arkuszy. Szczegółowe zasady dotyczące opracowania map tematycznych zawiera instrukcja K-3 „Mapy tematyczne".

Spośród licznych rodzajów map wykonywanych przez służby geodezyjno-kartograficzne najszersze zastosowanie mają mapy topograficzne zaliczane do klasy map ogólnogeograficznych i mapa zasadnicza należąca do klasy map tematycznych oraz grupy map gospodarczych. Ze względu na skalę, *mapy topograficzne* dzielą się na:

- małoskalowe, obejmujące skale: 1:100 000, 1:200 000, 1:500 000;
- średnioskalowe, obejmujące skale: 1:25 000, 1:50 000;
- wielkoskalowe, obejmujące skale: 1:5 000, 1:10 000.

Mapy topograficzne dużych obszarów obejmujących: pojedyncze państwo, region geograficzny, strefę odwzorowawczą itp. wykonywane są z reguły w *układzie sekcyjnym* powstałym z podziału określonego obszaru na arkusze mapy w zadanej, przeważnie małej skali. Arkusze te zawierają w sobie dalsze sekcje map w skalach większych, zaś te z kolei dzielą się wielostopniowo na sekcje w jeszcze większych skalach. Każdy arkusz w układzie sekcyjnym uzyskuje odpowiednie oznaczenie, czyli *godło*, stanowiące pewną kombinację cyfrową (numeryczną) lub literowo-cyfrową (alfanumeryczną), pozwalającą na szybkie ustalenie skali arkusza i jego lokalizację w określonym układzie współrzędnych geograficznych lub prostokątnych. Często do godła dodaje się również nazwę największej miejscowości przedstawionej na danym arkuszu. System podziału map na arkusze i zasada tworzenia godeł nosi nazwę *nomenklatury map*. Decyduje ona o podziale całego rozpatrywanego obszaru na poszczególne sekcje wyjściowe, a następnie na arkusze pochodne w stopniowo zwiększających się skalach. Pozwala także na ustalenie godeł arkuszy sąsiednich.

W zależności od rodzaju układu stanowiącego podstawę podziału obszaru na sekcje wyróżniamy dwa kroje: *sekcyjny południkowo-równoleżnikowy* oparty o układ współrzędnych geograficznych i *sekcyjny prostokątny* realizowany w układzie współrzędnych prostokątnych płaskich. Krój południkowo-równoleżnikowy jest wykonywany według linii *siatki kartograficznej* powstałej w wyniku odwzorowania na płaszczyznę mapy siatki geo-

graficznej. W kroju tym kształt i wymiary arkuszy nie są stałe, zaś ze względu na zbieżność południków w punktch biegunów Ziemi ramka sekcyjna jest trapezowata, zaś jej narożniki mają ściśle określone współrzędne geograficzne: φ, λ.

W układzie sekcyjnym prostokątnym podział mapy na arkusze odbywa się w oparciu o prostokątną *siatkę topograficzną*, utworzoną przez wybrane proste równoległe do osi x, y przyjętego układu współrzędnych prostokątnych, płaskich, przy czym oś x jest z reguły wyznaczona przez obraz południka środkowego strefy odwzorowawczej. Poszczególne sekcje mają tu jednakowe rozmiary oraz regularny, prostokątny kształt, ułatwiający uzgadnianie styków sąsiednich arkuszy. Narożniki sekcji mają ściśle określone współrzędne X, Y, lecz granice sekcji (ramki sekcyjne) nie są powiązane z siatką kartograficzną, ponieważ jej linie biegną mniej lub bardziej ukośnie w stosunku do boków ramki sekcyjnej, co uniemożliwia dokładną orientację mapy według kierunku północy geograficznej.

Wadą podziału sekcyjnego jest przecinanie ważnych obiektów przez ramki i rozdzielanie ich na dwa lub więcej arkuszy, toteż oprócz map sekcyjnych często spotykane są tzw. *mapy jednostkowe*, przedstawiające pojedyncze, niewielkie obiekty wyznaczone najczęściej przez granice: naturalne (np. drogi, rowy, cieki), administracyjne lub własnościowe. Mapa jednostkowa obejmująca zwykle jeden lub kilka arkuszy, jest sporządzana dla obiektów, które nie wypełniają całej powierzchni wewnątrz ramki arkusza.

Najczęściej spotykaną mapą jednostkową jest *mapa ewidencji gruntów* sporządzana w podziale obrębowym. Mapa ta powstaje jako wyrys z pierworysu mapy zasadniczej i zawiera: granice administracyjne, granice i numery działek, granice użytków i kontury klasyfikacji gruntów, kontury i oznaczenia budynków, poziomą osnowę geodezyjną, elementy opisowe związane z nazewnictwem jednostek ewidencji gruntów.

15.2. Godła map topograficznych w podziale Międzynarodowej Mapy Świata

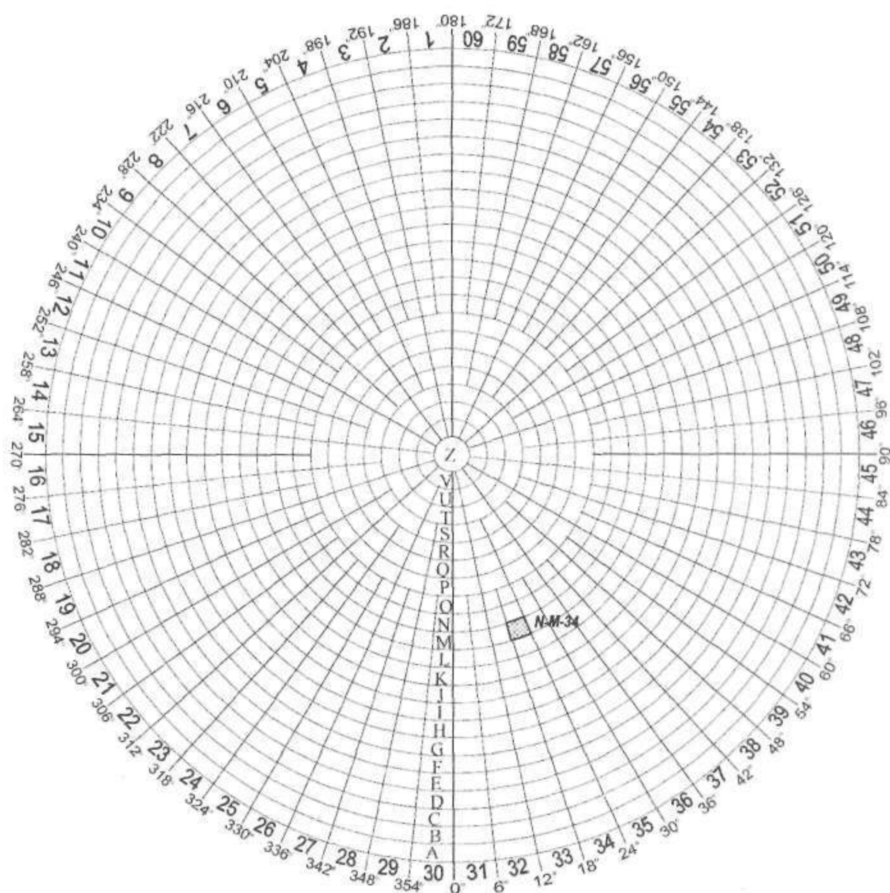
Po II wojnie światowej nomenklatura map topograficznych wydawanych w Polsce została oparta na sekcyjnym południkowo-równoleżnikowym podziale arkuszy według systemu Międzynarodowej Mapy Świata. W systemie tym półkula północna (N) oraz południowa (S) została podzielona za pomocą układu pasów i słupów na arkusze w skali 1:1000000 o wymiarach 6° długości i 4° szerokości geograficznej (rys. 15.1). Biegnące równoleżnikowo w kierunku od równika do bieguna czterostopniowe pasy są oznaczone literami od A do Z, natomiast sześciostopniowe słupy, ograniczone południkami o długości geograficznej podzielnej przez 6, oznaczane są liczbami od 1 do 60 w kierunku od zachodu na wschód, poczynając od antypołudnika 180°.

Godło arkusza mapy w skali 1:1000000 składa się z oznaczenia półkuli Ziemi (N lub S), oznaczenia pasa i numeru słupa, np. arkusz, na którym położony jest Kraków ($\varphi \approx 50°N$, $\lambda \approx 20°E$) posiada godło: N-M-34 (rys. 15.1). Godła arkuszy w większych skalach, których całkowitą ilość zawiera arkusz wyjściowy powstają poprzez dodanie do godła sekcji 1:1000000 kolejnych symboli cyfrowych lub literowych (rys. 15.2).

W skład arkusza mapy w skali 1:1000000 wchodzą 4 arkusze mapy 1:500000 oznaczone dużymi literami: A, B, C, D; 36 arkuszy mapy 1:200000 oznaczone liczbami rzymskimi w zakresie od *I* do *XXXVI* oraz 144 arkusze mapy w skali 1:100000 oznaczone liczbami arabskimi od 1 do 144.

Arkusz 1:100000 stanowi podstawę do dalszych wielostopniowych podziałów, zawierając w sobie 4 arkusze mapy w skali 1:50000 oznaczone dużymi literami: A–D,

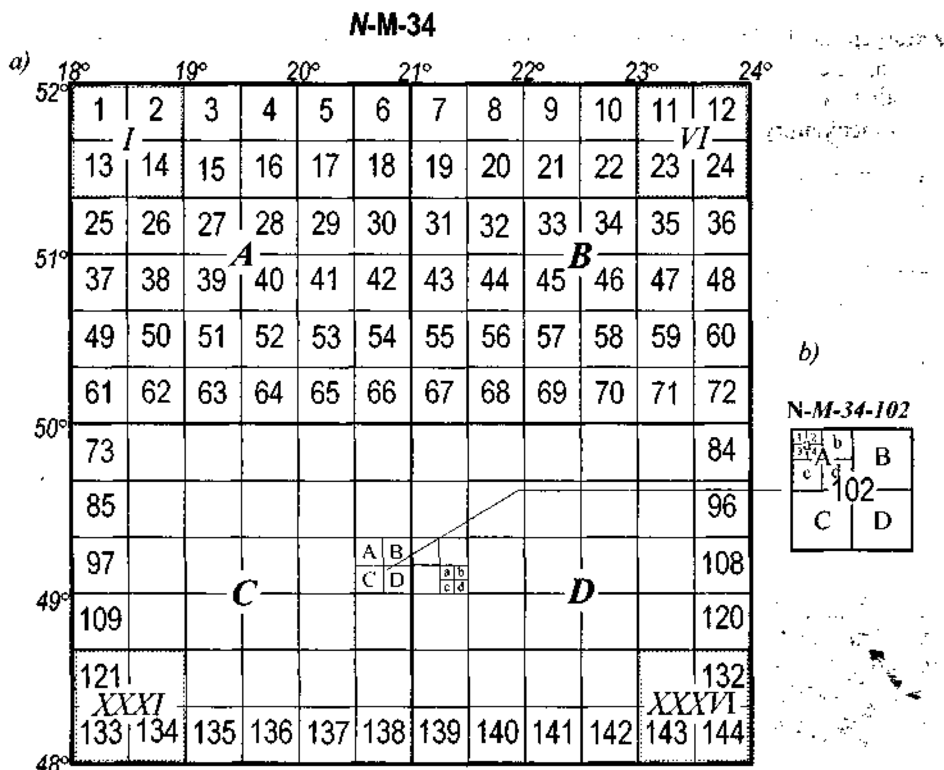
z których każdy dzieli się następnie na 4 arkusze 1:25000 o symbolach w postaci małych liter: a, b, c, d. Z kolei arkusz mapy w skali 1:25000 ulega podziałowi na 4 sekcje mapy w skali 1:10000 z oznaczeniami cyfrowymi w zakresie od 1 do 4. Przykładowe godła map wg nomenklatury Międzynarodowej Mapy Świata zestawiono w tabeli 15.1.



Rys. 15.1. Podział półkuli *N* na arkusze w skali 1:1 000 000 w ramach Międzynarodowej Mapy Świata

Tabela 15.1. Godła map topograficznych w nomenklaturze Międzynarodowej Mapy Świata

Skala mapy	1:1 000 000	1:500 000	1:200 000	1:100 000	1:50 000	1:25 000	1:10 000
Przykładowe godło	*N*-M-34	*N*-M-34--A	*N*-M-34--*XXXVI*	*N*-M-34--112	*N*-M-34--112-A	*N*-M-34--112-A-a	*N*-M-34--112-A-a-1
Zakres zmian symboli końcowych	–	A-D	*I-XXXVI*	1-144	A-D	a-d	1-4



Rys. 15.2. Schemat podziału arkusza N-M-34 w skali 1:1 000 000 na arkusze w skalach: *a)* 1:500 000 (A-D), 1:200 000 (*I-XXXVI*) 1:100 000 (1-144), *b)* 1:50 000 (A-D), 1:25 000 (a-d), 1:10 000 (1-4).

15.3. Godła map topograficznych i mapy zasadniczej w układzie „1965"

Po wprowadzeniu w r. 1969 układu współrzędnych „1965" nastąpiło ujednolicenie nomenklatury map topograficznych w skalach średnich i dużych oraz mapy zasadniczej w jej poszczególnych skalach bazowych.

W wydanej w r. 1983 instrukcji technicznej O-2 p.t. „Ogólne zasady opracowania map dla celów gospodarczych" zawarta jest klasyfikacja map wykonywanych przez służby geodezyjno-kartograficzne dla potrzeb gospodarki. Klasyfikacja ta została szczegółowo przedstawiona w ust. 15.7. Mapy topograficzne małoskalowe obejmują duże obszary, a jednocześnie ich względna dokładność graficzna może być niska*, co pozwala na zastosowanie odwzorowania kartograficznego dającego układ współrzędnych obejmujący cały obszar kraju. Zniekształcenia odwzorowawcze nie przekroczą w tym wypadku dokładności graficznej map. Mapy topograficzne małoskalowe opracowuje się więc w jednolitym (jednostrefowym) układzie współrzędnych geodezyjnych (por. ust. 1.2).

Mapy topograficzne średnio- i wielkoskalowe oraz mapa zasadnicza były wykonywane w układzie sekcyjnym prostokątnym, związanym ściśle z opisanym wcześniej państwowym układem współrzędnych prostokątnych „1965" (ust. 1.5.3), w którym obszar

* Dla skali 1:100 000 dokładność ta wyniesie 0,1 mm·100 000 = 10 m.

Polski został podzielony na pięć stref odwzorowawczych, zaś każda z nich posiada odrębny układ współrzędnych prostokątnych, płaskich. Poszczególne strefy są podzielone liniami równoległymi do osi układu na prostokątne sekcje o wymiarach terenowych 40 km×64 km. Linie pionowe biegnące równolegle do osi x w odstępach 64 km wyznaczają tzw. *słupy*, zaś linie poziome, równolegle do osi y, poprowadzone co 40 km tworzą *pasy* (rys. 15.3). Początek układu współrzędnych danej strefy stanowi zarazem początek jej podziału na pasy i słupy. Numeracja pasów biegnie w kierunku z północy na południe, zaś numeracja słupów w kierunku z zachodu na wschód.

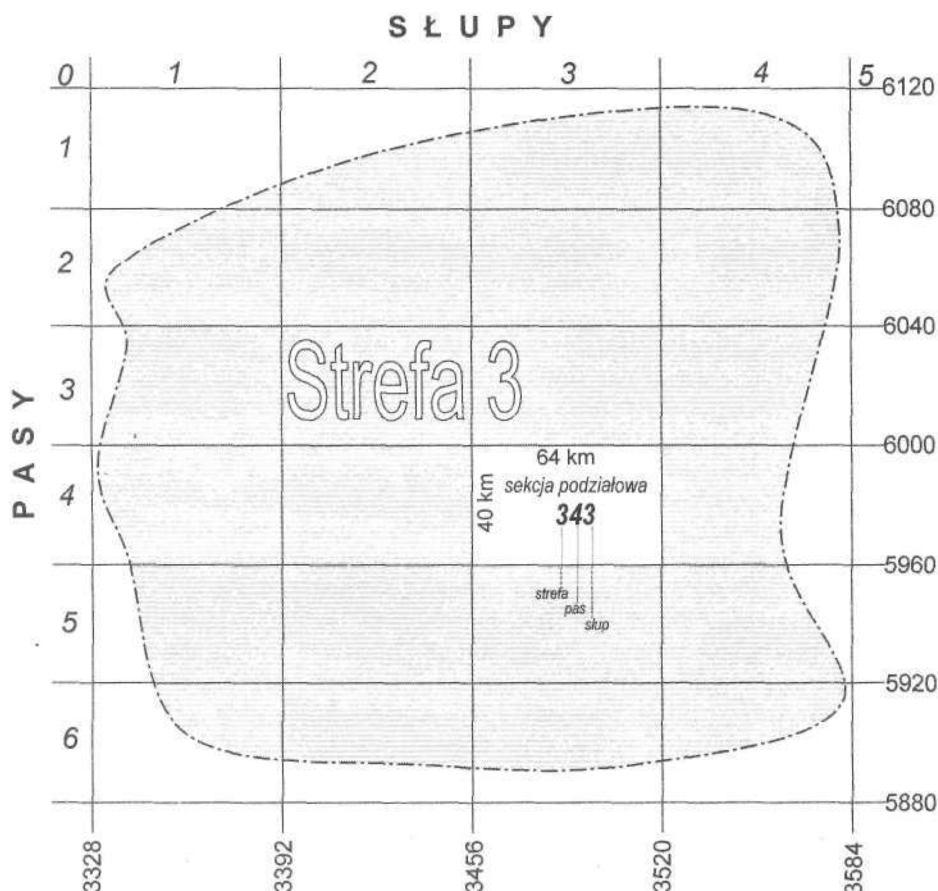
Gdyby układ współrzędnych „1965" obowiązywał także dla mapy w skali 1:100000, wtedy zakres terytorialny sekcji podziałowej o wymiarach 64 km × 40 km odpowiadałby prostokątnemu arkuszowi tzw. *sekcji podziałowej* formatu 64 cm×40 cm, jednak dla tej skali zarezerwowany jest inny układ, zaś układ „1965" obowiązuje dla map w skalach 1:50000 i większych. Godłem (oznaczeniem) pojedynczej sekcji podziałowej są trzy cyfry np. 343, z których pierwsza to numer strefy odwzorowawczej, druga – numer pasa, trzecia – nr słupa (rys. 15.3).

Sekcja podziałowa dzieli się na cztery arkusze mapy w skali 1:50000 o formacie 64 cm×40 cm, oznaczone kolejnymi cyframi: 1, 2, 3, 4 (rys. 15.4). Godło arkusza tej mapy składa się z godła sekcji podziałowej, kropki i numeru arkusza w zakresie od 1 do 4, np. 343.2. Z kolei arkusz 1:50000 dzieli się na cztery sekcje 1:25000 tego samego formatu oznaczone cyframi 1-4, umieszczanymi na końcu, zaś godło składa się z: trzech cyfr sekcji podziałowej, kropki i dwóch cyfr np. 343.24. Arkusz 1:25000 zawiera w sobie 4 sekcje w skali 1: 10000, lecz stosunek skal nie jest obecnie równy tak jak poprzednio 2 lecz 2,5, toteż dla utrzymania tego podziału konieczne jest zwiększenie formatu arkuszy 1:10000 z formatu 64 cm×40 cm do rozmiaru: 80×50 cm. Arkusz w skali 1:10000 obejmuje bowiem teren stanowiący ¼ powierzchni arkusza w skali 1:25000, czyli dla powierzchni ¼·(16 km×10 km), otrzymamy prostokąt o wymiarach: 8 km×5 km. Godło arkusza 1:10 000 składa się z dwu grup trzycyfrowych oddzielonych kropką np. 343.241. Rozmiary i zasięg sekcji map topograficznych w skalach 1:50000 – 1:5000 zestawiono w tabeli 15.2.

Trzeba pamiętać, że wymiary 80 cm×50 cm odnoszą się do samej ramki sekcyjnej, a nie do całego arkusza danej sekcji, który ma format A1 (841 mm×594 mm). Ramka ta jest prostokątem zawierającym w swym wnętrzu rysunek treści mapy i siatkę złożoną z 40 kwadratów o rozmiarach pojedynczych oczek 10 cm×10 cm. Na zewnątrz ramki w ściśle umiejscowionych polach wykonywane są *opisy pozaramkowe* (rys. 15.24), obejmujące szereg informacji związanych z mapą, w tym skalę i godło danej sekcji mapy.

Tabela 15.2. Rozmiary i zasięg sekcji map topograficznych średnio- i wielkoskalowych (wg instr. K-2)

Skala mapy	Rozmiary sekcji		Zasięg terytorialny		Liczba arkuszy mieszczących się na 1 sekcji 1:50000
	Podstawa	Bok	Δy	Δx	
1:50000	64 cm	40 cm	32 km	20 km	1
1:25000	64 cm	40 cm	16 km	10 km	4
1:10000	80 cm	50 cm	8 km	5 km	16
1:5000	80 cm	50 cm	4 km	2,5 km	64



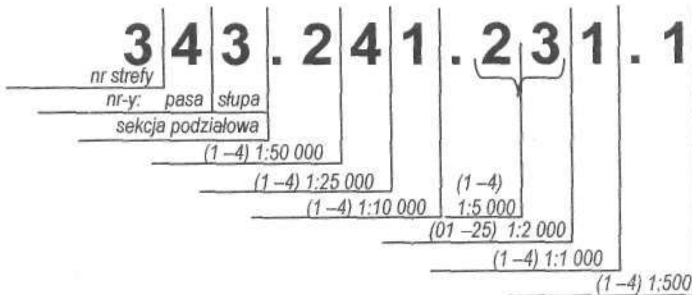
Rys. 15.3. Podział strefy odwzorowania za pomocą pasów i słupów na sekcje podziałowe

Przykładowe godła map topograficznych w skalach: 1:50000, 1:25000, 1:10000, 1:5 000 oparte na godle sekcji podziałowej 343 zestawiono w tabeli 15.3.

Tabela 15.3. Przykładowe godła map topograficznych w układzie „1965"

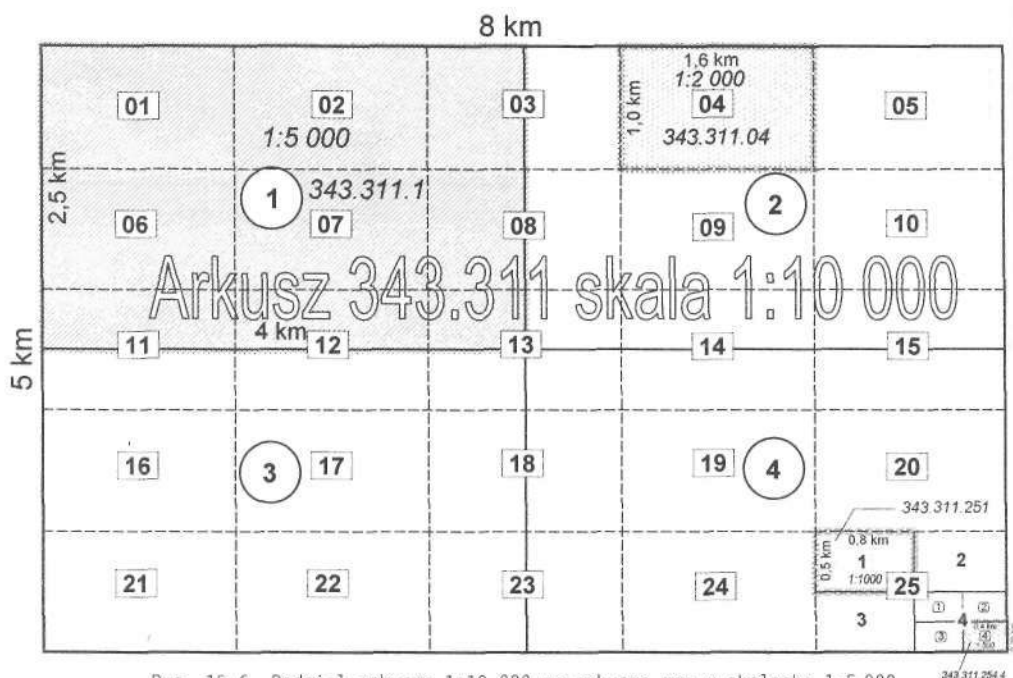
Skala mapy	Symbol sekcji podziałowej	Numery arkuszy 1:50 000	1:25 000	1:10 000	1:5 000	Przykład godła
1:50 000	3 4 3.	1,**2**,3,4				343.2
1:25 000	3 4 3.	2	1,2,**3**,4			343.23
1:10 000	3 4 3.	2	3	1. 2. 3. **4**.		343.234
1:5 000	3 4 3.	2	3	4	**1**,2,3,4	343.234.1

Rys. 15.4. Czterostopniowy podział sekcji podziałowej na arkusze w skalach: 1:50 000, 1:25 000, 1:10 000, 1:5 000.



Rys. 15.5. Zasada tworzenia godeł dla map w skalach 1:50 000 - 1:500 w układzie „1965"

Arkusz 1:10000 dzieli się na 4 sekcje 1:5 000 oznaczone cyframi 1, 2, 3, 4 oraz na 25 arkuszy w skali 1:2000 z numerami dwucyfrowymi: 01, 02, 03, ... , 24, 25 (rys. 15.6). Przykładowe godło mapy 1:5000 przybierze postać 343.241.2, zaś godło 1: 2000 to np. 343.241.23. Godło arkusza 1:1000 powstaje przez podział sekcji mapy w skali 1:2000 na cztery części oznaczone cyframi 1 – 4 np. 343.241.231. W podobny sposób z godeł arkuszy mapy 1:1000 powstają oznaczenia sekcji map w skali 1:500 np. 343.241.231.1. Zasadę tworzenia godeł map topograficznych i mapy zasadniczej w poszczególnych skalach bazowych w układzie współrzędnych „1965" pokazano na rys. 15.5.

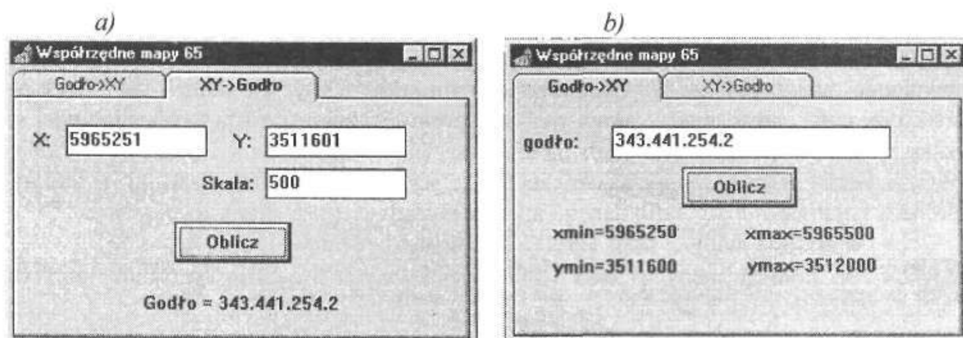


Rys. 15.6. Podział arkusza 1:10 000 na arkusze map w skalach: 1:5 000, 1:2 000, 1:1 000, 1:500 w układzie współrzędnych „1965".

Tabela 15.4. Godła i sekcje mapy zasadniczej w układzie „1965" (dla arkusza 343.31; 1 1:10 000)

Skala mapy	1:5 000	1:2 000	1:1 000	1:500
Przykładowe godło	343.311.1	343.311.25	343.311.251	343.311.251.1
Zakres zmian symboli końcowych	1-4	1-25	1-4	1-4
Liczba arkuszy na 1 arkusz 1:10 000	4	25	100	400
Zasięg terytorialny $\Delta y \times \Delta x$	4,0×2,5 km	1,6×1,0 km	0,8×0,5 km	0,4×0,25 km

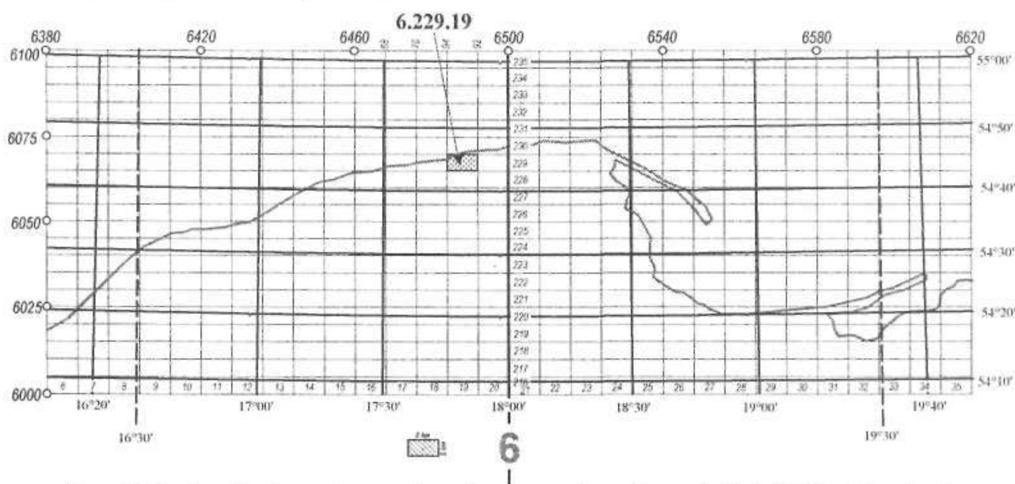
Z przedstawionych wcześniej informacji wynika, że podanie współrzędnych dowolnego punktu w układzie „1965" identyfikuje zarówno jego położenie na terenie Polski, jak i przypisuje mu konkretną sekcję mapy o określonym oznaczeniu iw wybranej skali. Z kolei wskazanie godła arkusza mapy wiąże się z ustaleniem zakresu współrzędnych X, Y punktów terenowych położonych na tym arkuszu. Dane te można bez trudu uzyskać za pomocą niewielkiego programu komputerowego „Godło" firmy Coder, udostępnionego do darmowego pobrania na stronie internetowej tej firmy (http://www.coder.atomnet.pl). Program działa w obie strony tzn. umożliwia określenie godła arkusza w zadanej skali dla punktu o znanych współrzędnych oraz dla podanego godła wyświetla skalę i zakresy współrzędnych X, Y ramki sekcyjnej arkusza mapy (rys. 15.7).



Rys. 15.7. Określenie: a) godła arkusza po zadaniu współrzędnych punktu i skali mapy; b) zakresu współrzędnych sekcji o znanym godle

15.4. Godła arkuszy mapy zasadniczej w układzie: „2000" i map topograficznych w układzie „1992"

Podstawą określenia formatów i numeracji arkuszy mapy zasadniczej prowadzonej w nowym układzie współrzędnych „2000"jest arkusz mapy w skali 1:10 000 o wymiarach 5 km×8 km. Jego godło tworzy grupa trzech liczb: jednocyfrowej, trzycyfrowej i dwucyfrowej, rozdzielonych kropkami.



Rys. 15.8. Przykład rozmieszczenia arkuszy map i godła w skali 1:10 000 (strefa 6)

Pierwsza liczba (jednocyfrowa) oznacza numer strefy odwzorowawczej (por. ust. 1.2.5). Liczba ta wynosząca 5, 6, 7, lub 8 powstaje w wyniku podzielenia długości geograficznej południka osiowego (15°, 18°, 21°, 24°) przez 3.

Druga liczba (trzycyfrowa) oznacza numer rzędu (wiersza), w którym położony jest dany arkusz mapy 1:10000 i powstaje jako liczba całkowita ilorazu (X_i – 4 920 km):5, przy czym X_i jest wyrażoną w kilometrach współrzędną X (liczoną od równika) dowolnego punktu położonego na rozpatrywanym arkuszu mapy w skali 1:10000.

Trzecia liczba (dwucyfrowa) odpowiada numerowi kolumny i stanowi liczbę całkowitą ilorazu (Y_i – 332 km):8, przy czym Y_i jest wyrażoną w kilometrach współrzędną Y dowolnego punktu położonego na rozpatrywanym arkuszu mapy w skali 1:10000 bez początkowej cyfry oznaczającej numer pasa odwzorowawczego. Zasada tworzenia godeł arkuszy została pokazana na rys. 15.8.

Godła arkuszy mapy zasadniczej w skalach: 1:5000, 1:2000, 1:1000, 1:500 jako pierwszy człon zawierają godło danego arkusza w skali 1:10000, który dzieli się na:

- 4 arkusze mapy w skali 1:5000 oznaczone numerami: 1, 2, 3, 4;
- 25 arkuszy mapy w skali 1:2000 oznaczonych dwucyfrowymi numerami: 01, 02, 03, ..., 23, 24, 25.

Tabela 15.5: Wymiary, pola i przykładowe godła arkuszy mapy zasadniczej w układzie „2000"

Skala mapy	Na arkuszu mapy w skali					Wymiary arkusza w km		Pole powierzchni arkusza [ha]	Przykłady godła
	1:10000	1:5000	1:2000	1:1000	1:500	wzdłuż osi x	wzdłuż osi y		
	Liczba arkuszy								
1:10000	1	-	-	-	-	5,0	8,0	4000	6.229.19
1:5000	4	1	-	-	-	2,5	4,0	1000	6.229.19.4
1:2000	25	6,25	1	-	-	1,0	1,6	160	6.229.19.4.25
1:1000	100	25	4	1	-	0,5	0,8	40	6.229.19.4.25.4
1:500	400	100	16	4	1	0,25	0,4	10	6.229.19.4.25.4.4

Pojedynczy arkusz mapy w skali 1:2000 stanowi podstawę dalszego podziału na arkusze mapy w skali: 1:1000. Ich godło zawiera na początku godło arkusza 1:2000, po którym następuje numer arkusza w skali 1:1000 w zakresie od 1 do 4. W podobny sposób, czyli poprzez podział arkusza 1:1000 na powstają godła map w skali 1:500, zawierające godło arkusza 1:1000 i dodatkową cyfrę 1, 2, 3 lub 4. W tabeli 15.5 zestawiono wymiary, pola powierzchni i przykładowe godła dla poszczególnych skal mapy zasadniczej w układzie współrzędnych „2000".

Obszar terenu na skraju danego pasa ogranicza się do granic naturalnych lub granic władania (jednostek ewidencyjnych), tzn. z zasady nie stosuje się pasa pokrycia z sąsiednim układem współrzędnych.

W ramach układu współrzędnych „1992" mapy topograficzne w skalach: 1:100000, 1:50000, 1:25000, 1:10000 sporządzane są w omówionym wcześniej podziale dokonanym według nomenklatury Międzynarodowej Mapy Świata (patrz ust. 15.2). W odróżnieniu od podziału sekcyjnego prostokątnego mapy zasadniczej, związanego z siatką topograficzną, podział ten ma charakter południkowo-równoleżnikowy, jest więc oparty na siatce kartograficznej. Z tego względu wymiary liniowe i powierzchnie arkuszy stopniowo zmniejszają się w miarę posuwania się na północ przy niezmienionych wymiarach sekcji mapy wyrażonych za pomocą różnic szerokości i długości geograficznej.

W tabeli 15.6 (zaczerpniętej z instrukcji O-1/O-2) zostały zestawione dla układu współrzędnych „1992" wymiary i przykładowe godła arkuszy map topograficznych w poszczególnych skalach.



Rys. 15.9. Podział arkusza 1:10 000 na arkusze map w skalach: 1:5 000, 1:2 000, 1:1 000, 1:500 w układzie współrzędnych „2000"

Tabela 15.6: Wymiary i przykładowe godła arkuszy map topograficznych w poszczególnych skalach

Arkusz w skali	Na arkuszu mapy w skali 1:1 000 000 (liczba arkuszy)	1:100 000	1:50 000	1:25 000	Wymiary arkusza szer.	Wymiary arkusza dług.	Przykłady godła	Odstępy siatki kilometrowej na mapie	Wymiary arkusza [km] szer.	Wymiary arkusza [km] dług.	Powierzchnia arkusza [km²]
1:1 000 000	1				4°	6°	M-34		430	445	19 1278
1:500 000	4				2°	3°	M-34-D		220	222	48 828
1:200 000	36				40′	1°	M-34-*XXXVI*	2 cm (4 km)	74	74	5 496
1:100 000	144				20′	30′	M-34-136	2 cm (2 km)	37	37	1 379
1:50 000		4			10′	15′	M-34-136-B	2 cm (1 km)	18,5	18,5	345
1:25 000			4		5′	7,5′	M-34-136-C-c	4 cm (1 km)	9,7	9,7	86
1:10 000				4	2,5′	3,75′	M-34-136-D-d-4	10 cm (1 km)	4,7	4,7	21

15.5. Mapa zasadnicza*

15.5.1. Definicja i znaczenie mapy zasadniczej

Zgodnie z art. 2, § 7 ustawy „Prawo geodezyjne i kartograficzne" *mapa zasadnicza* jest wielkoskalowym opracowaniem kartograficznym, zawierającym aktualne informacje o przestrzennym rozmieszczeniu obiektów ogólnogeograficznych oraz elementach ewidencji gruntów i budynków, a także sieci uzbrojenia terenu: nadziemnych, naziemnych i podziemnych. Mapa ta służy do celów administracyjnych, prawnych, ewidencyjnych i projektowych oraz stanowi część składową krajowego systemu informacji o terenie (SIT).

Mapa zasadnicza stanowi:

1) podstawowy element Państwowego Zasobu Geodezyjnego i Kartograficznego w rozumieniu art. 40 ustawy „Prawo geodezyjne i kartograficzne";
2) podstawowy materiał kartograficzny, wykorzystywany do zaspokojenia różnorodnych potrzeb gospodarki narodowej, a w szczególności zagospodarowania przestrzennego, katastru nieruchomości i powszechnej taksacji;
3) źródłowe opracowanie kartograficzne do sporządzania map pochodnych i innych wielkoskalowych map tematycznych oraz aktualizacji mapy topograficznej w skali 1:10000 (1:5000).

Zasady sporządzania mapy zasadniczej zostały unormowane w instrukcji K-1. Pierwsza wersja tej instrukcji została wprowadzona w r.1984, zaś następne wersje w r. 1995 oraz w r. 1998. Począwszy od r. 1995 instrukcja uwzględniła opracowanie mapy zasadniczej w formie numerycznej. Mapa ta jest *mapą obiektową*, zaś obiekty zostały zdefiniowane za pomocą unikalnych kodów i atrybutów opisujących cechy obiektów (rys. 15.10). Została również określona geometria obiektów.

15.5.2. Skale bazowe

Skale mapy zasadniczej określane jako *skale bazowe* to: 1:500, 1:1000, 1:2000, 1:5000. Na danym obszarze mapa zasadnicza jest prowadzona tylko w jednej, odpowiednio dobranej skali bazowej. Kryteriami jej doboru są: stopień zagęszczenia terenu szczegółami sytuacyjnymi, wyposażenie terenu w armaturę podziemną oraz przewidywane zamierzenia inwestycyjne. Najmniejszą jednostką obszaru, dla którego określa się skalę bazową mapy zasadniczej zarówno w postaci klasycznej jak i numerycznej jest obręb ewidencji gruntów i budynków. W wyjątkowo uzasadnionych przypadkach dopuszcza się odmienną skalę bazową dla części obrębu. Skalę bazową ustala się na podstawie stopnia zagęszczenia na mapie elementów stanowiących jej treść oraz przewidywanych zamierzeń inwestycyjnych.

Jako wytyczne do ustalania skali bazowej przyjmuje się, że niżej wymienione skale powinny być stosowane odpowiednio:

- skala **1:500** – dla terenów o znacznym obecnym lub przewidywanym zainwestowaniu,
- skala **1:1000** – dla terenów małych miast, aglomeracji miejskich i przemysłowych oraz terenów osiedlowych wsi będących siedzibami gmin,

---

* Ust. 15.4. został opracowany na podstawie tekstu instrukcji technicznej K-1 p.t. „Mapa zasadnicza" z 1998 r.

- skala **1:2000** – dla pozostałych zwartych terenów osiedlowych, terenów rolnych o drobnej, nieregularnej szachownicy stanu władania oraz większych zwartych obszarów rolnych i leśnych na terenach miast,
- skala **1:5000** – dla terenów o rozproszonej zabudowie wiejskiej oraz gruntów rolnych i leśnych na obszarach pozamiejskich.

Podział na grupy dokładnościowe szczegółów terenowych w myśl przepisów instrukcji O-1/O-2 (§32) i precyzja ich pomiaru nie mają związku ze skalą bazową mapy.

15.5.3. Treść mapy zasadniczej

Treść mapy zasadniczej dzieli się na obligatoryjną oraz fakultatywną.

Treść obligatoryjną stanowią:

- punkty osnów geodezyjnych,
- elementy ewidencji gruntów i budynków,
- elementy sieci uzbrojenia terenu, a w szczególności urządzenia nadziemne, naziemne i podziemne.

Do elementów *ewidencji gruntów i budynków* zalicza się, zgodnie z Rozporządzeniem Ministra Gospodarki Przestrzennej i Budownictwa oraz Ministra Rolnictwa i Gospodarki Żywnościowej z dn. 17 grudnia 1996 r. w sprawie ewidencji gruntów i budynków (art. 23 § 3):

1) granice jednostek terytorialnego podziału państwa,
2) granice jednostek ewidencyjnych,
3) granice obrębów,
4) granice działek,
5) opisy i kontury użytków gruntowych,
6) opisy i kontury klas gleboznawczych,
7) usytuowanie budynków,
8) stabilizowane (trwałe) punkty graniczne,
9) numery ewidencyjne działek,
10) numery porządkowe budynków,
11) numery ewidencyjne budynków,
12) numery punktów załamania linii granicznych,
13) nazwy ulic i oznaczenia dróg publicznych.

Do *elementów sieci uzbrojenia* zalicza się, zgodnie z Rozporządzeniem Ministra Gospodarki Przestrzennej i Budownictwa z 26 sierpnia 1991 r. w sprawie szczegółowych zasad i trybu zakładania i prowadzenia geodezyjnej ewidencji sieci uzbrojenia terenu oraz uzgodnień i współdziałania w tym zakresie:

1) urządzenia inżynieryjno-techniczne nadziemne,
2) urządzenia inżynieryjno-techniczne naziemne, w tym punkty położenia armatury naziemnej przewodów uzbrojenia technicznego,
3) linie przebiegu przewodów i elementów uzbrojenia terenu

Obiekty nie należące do treści obligatoryjnej stanowią *treść fakultatywną* mapy zasadniczej. Treść fakultatywna mapy zasadniczej stanowi zbiór otwarty, zależny od potrzeb i zamierzeń inwestycyjnych administracji państwowej, samorządowej i podmiotów gospodarczych. Szczegółowe definicje obiektów stanowiących treść obligatoryjną i fakultatywną mapy zasadniczej określa się w katalogu obiektów mapy zasadniczej, stanowiącego załącznik nr 1 do instrukcji K-1. W celu zachowania jednolitości mapy na

obszarze kraju, wprowadzenie definicji nowego obiektu następuje po uzgodnieniu z Głównym Geodetą Kraju. W części fakultatywnej mieści się następujący zakres tematyczny: komunikacja, rzeźba terenu, obiekty ogólnogeograficzne, zagospodarowanie terenu. W zależności od potrzeb inwestorów i na ich wyraźne żądanie i koszt informacje stanowiące treść fakultatywną są zbierane poprzez pomiar, zapis cech fizycznych. Informacje te umieszcza się w bazie danych i na mapie na równi z informacjami o treści obligatoryjnej.

Treść obligatoryjna mapy zasadniczej podlega *aktualizacji bieżącej* opartej o napływające do ośrodków dokumentacji wyniki prac geodezyjnych oraz przepisane prawem informacje o zmianach elementów tej treści. Treść fakultatywna mapy zasadniczej jest gromadzona i aktualizowana w tych ośrodkach z wykorzystaniem wyników pomiarów wykonywanych na potrzeby inwestorów, którzy pomiar elementów tej treści zlecili. Zakres treści fakultatywnej gromadzonej w ośrodku ustala geodeta wojewódzki. Wykonawca pomiarów dostarcza ośrodkowi pełną informację dotyczącą treści mapy, także w zakresie treści fakultatywnej. Do treści mapy mogą być wprowadzane wyłącznie dane spełniające wymogi dokładnościowe i formalne, określone w obowiązujących instrukcjach.

15.5.4. Forma, nakładki tematyczne i zasady prowadzenia mapy zasadniczej

Mapa zasadnicza prowadzona jest w formie numerycznej lub klasycznej. Warunki edycji mapy zasadniczej określa załącznik nr 2 do instrukcji K-1. Mapa zasadnicza w jej formie numerycznej jest mapą wektorową i obiektową. Treść mapy zasadniczej może być prowadzona i przedstawiana w systemie *nakładek tematycznych* (w postaci klasycznej - na osobnych arkuszach folii, w postaci numerycznej – w zbiorach warstw lub w zbiorach obiektów). Nakładki te oznacza się następująco:

O - osnowy geodezyjne,
E - ewidencja gruntów i budynków,
U - sieci uzbrojenia terenu,
S - sytuacja powierzchniowa (obiekty trwale związane z terenem),
W - rzeźba terenu (warstwice, punkty o znanej wysokości),
R - realizacyjne uzgodnienia projektowe.

Mapa zasadnicza, jako element państwowego zasobu geodezyjnego i kartograficznego, prowadzona jest przez ośrodki dokumentacji geodezyjnej i kartograficznej o których mowa w art. 40 ust. 2 ustawy „Prawo Geodezyjne i Kartograficzne", lub jednostki równorzędne oraz ich filie. Mapę zasadniczą prowadzi się w ramach krajowego Sytemu Informacji o Terenie (art. 5 i 7 ustawy Prawo geodezyjne i kartograficzne). Docelową postacią mapy zasadniczej w SIT jest jej postać *numeryczna, wektorowa*, związana z bazą informacji o obiektach. Na obszarach, gdzie istnieją założone arkusze mapy w formie *klasycznej*, do czasu założenia mapy numerycznej ich dalszą aktualizację należy wykonywać zgodnie z poprzednio obowiązującymi przepisami i znakami umownymi. Jeśli na danym obszarze nie istnieje mapa w określonej skali i zdecydowano założyć nowe arkusze w formie tradycyjnej, należy stosować znaki i symbole zgodne z aktualnym wydaniem instrukcji K-1. Niedopuszczalne jest stosowanie na jednym arkuszu mapy klasycznej znaków i symboli poprzednich i nowych przepisów. Przy prowadzeniu mapy w postaci klasycznej pierworys mapy zasadniczej wykonywany jest na arkuszach formatu A1. Do użytku dopuszcza się papier kreślarski naklejony na planszę aluminiową oraz folię kreślarską i inne materiały, których zmiany wymiarów pod

wpływem zmian wilgotności i temperatury powietrza nie przekraczają 0,2 mm wzdłuż ramek sekcyjnych arkusza mapy. Treść mapy zasadniczej może też być prowadzona w formie nakładek tematycznych na folii. Kopie mapy wykonywane są stosownie do potrzeb na różnym materiale, mogą zawierać niepełną treść (wybrane nakładki) i mogą mieć różny poziom kartometryczności.

Dla potrzeb poglądowych dopuszcza się tworzenie kopii niekartometrycznych, o charakterze szkicu. W szczególności za szkic należy uznawać kopię, której skale różnią się wzdłuż i w poprzek arkusza bezpośrednio po sporządzeniu kopii.
Poziom kartometryczności (stopień zaufania do skali kopii) powinien być określony w klauzuli umieszczanej na kopii przez jej wykonawcę. Treść klauzuli umieszczanej na kopii o charakterze szkicu poprzedzona powinna być słowem OSTRZEŻENIE.

Przy realizacji mapy w postaci *numerycznej* nie istnieje pierworys. Treść mapy może być prowadzona w sposób rozwarstwiony – w zbiorach warstw lub zbiorach obiektów. Kopie mapy numerycznej są sporządzane stosownie do potrzeb użytkownika:

- na różnym materiale,
- za pośrednictwem różnych urządzeń (drukarki, plotery, naświetlarki),
- mogą zawierać niepełną treść (wybrane warstwy lub zbiory obiektów, pominięcie niektórych atrybutów opisowych),
- mogą mieć różny poziom kartometryczności.

Mapa zasadnicza w postaci numerycznej jest zasobem informacji o obiektach, stanowiących jej treść. Obiekty te posiadają unikalne kody pozwalające na jednoznaczność ich identyfikacji i przyporządkowanie im znaków graficznych. Związki te są określone w katalogu obiektów mapy zasadniczej. Każdy obiekt stanowiący treść mapy numerycznej musi mieć przyporządkowane sobie:

- *atrybuty przestrzenne* – określające położenie obiektu,
- *atrybuty nieprzestrzenne* – określające inne właściwości obiektu, zależne od jego charakteru.

Wśród atrybutów nieprzestrzennych wyróżnia się także *atrybuty opisowe*, występujące na mapie w postaci tekstów opisujących. Graficzna postać mapy zasadniczej i dane zawarte w zbiorach mapy zasadniczej są udostępniane urzędom, instytucjom, osobom fizycznym i prawnym z zachowaniem warunków określonych w przepisach o tajemnicy państwowej i służbowej.

Ośrodek Dokumentacji Geodezyjnej i Kartograficznej udostępnia fakultatywną treść numerycznej mapy zasadniczej wraz z klauzulą. Klauzula ta umieszczona jest w opisie pozaramkowym graficznego obrazu i na początku danych tabelarycznych (gdy takie są udostępniane) i określa stopień kompletności i aktualności danych. Przyjmowanie, przechowywanie i udostępnianie danych zbiorów mapy zasadniczej określają instrukcje: O-3 oraz O-4.

15.5.5. Wymagania w stosunku do systemów informatycznych stosowanych dla potrzeb SIT

Ogólne wymagania w stosunku do systemów informatycznych wykorzystywanych do zakładania i prowadzenia Systemu Informacji o Terenie i jego elementów określą odrębne przepisy. Systemy wspomagające prowadzenie mapy numerycznej muszą być zdolne do zasilania Systemu Informacji o Terenie następującymi informacjami:

- kod obiektu zawarty w katalogu znaków umownych, przy czym dopuszcza się używanie zamiennie kodów literowych i kodów liczbowych,
- identyfikator obiektu,
- kształt geometryczny obiektu,
- lista współrzędnych punktów lokalizujących obiekt w terenie,
- przewidziane instrukcją atrybuty obiektu,
- źródło danych o położeniu obiektu,
- datę utworzenia obiektu,
- datę ostatniej modyfikacji obiektu,
- nr KERG (książki ewidencji robót geodezyjnych) opracowania, z którego pochodzą dane o obiekcie.

Niezależnie od stopnia generalizacji koniecznej do przedstawienia obiektu na graficznym obrazie mapy system informatyczny wspomagający prowadzenie mapy numerycznej powinien przechowywać pełen opis geometrii i atrybutów obiektu. System informatyczny wspomagający prowadzenie mapy numerycznej powinien zapewnić identyfikację danych źródłowych stanowiących podstawę zmiany treści mapy. System informatyczny prowadzący mapę numeryczną powinien pozwalać na uzyskanie klasycznej formy mapy zgodnej z przepisami instrukcji K-1.

Numeryczna mapa zasadnicza prowadzona jest dla obszarów określonych granicami jednostek ewidencyjnych. System informatyczny powinien jednak zapewniać możliwość składania informacji z różnych zbiorów dla uzyskania graficznego obrazu map w sekcyjnym kroju prostokątnym, określonym w instrukcji O-2. Z każdą jednostką ewidencyjną musi być związana informacja o arkuszach mapy 1:10000 (godło). Dane numeryczne mapy przekazywane do zbiorów krajowego Systemu Informacji o Terenie muszą być doprowadzane do obowiązującego formatu, określonego przez Standard Wymiany Informacji Geodezyjnych (SWING).

15.5.6. Metryka mapy zasadniczej

Metryka mapy zasadniczej (rys. 15.10) jest podstawowym dokumentem obrazującym przebieg opracowania mapy, przechowywanym w Ośrodku Dokumentacji Geodezyjnej i Kartograficznej. Metryka dla mapy prowadzonej metodą klasyczną zakładana jest osobno dla każdego arkusza, natomiast metryka mapy prowadzonej techniką numeryczną wykonywana jest dla każdego obrębu. Metryka dla obu technik prowadzenia mapy zasadniczej ma formę dokumentu pisanego, uwierzytelnianego odręcznymi podpisami. Wzór metryki i procedury jej prowadzenia ustala Główny Geodeta Kraju. Celem sporządzenia metryki mapy jest podanie podstawowych informacji źródłowych o cechach mapy i ogólnym stopniu jej aktualności. Metrykę zakłada się dla mapy w momencie jej opracowania i uzupełnia w miarę wprowadzanych zmian. Metryka zawiera następujące dane:

- dla mapy prowadzonej metodą klasyczną: tytuł, skalę, numer ewidencyjny, godło arkusza,
- dla mapy prowadzonej techniką numeryczną: nazwę obrębu, jego numer i skalę bazową,
- określenie układu współrzędnych,
- opis metod opracowania mapy, daty i otrzymane dokładności,
- wykonawców mapy odpowiedzialnych za jej opracowanie,
- informacje dotyczące aktualizacji mapy.

Numer ewid.: [ ]   Numer arkusza: [ ]

METRYKA MAPY

Skala: [ ]

Województwo:
Powiat:
Gmina/Miasto:
Obręb:
Aktualizacja:

Układ współrzędnych: Strefa:
Poprawki odwzorowawcze:
-liniowa:
-powierzchniowa:
Poziom odniesienia: ....
Sposób opracowania:..........................
Prace polowe: ....
....
....
Opracowanie kartograficzne: ....
....
....

Zakres opracowania:

PRZEBIEG AKTUALIZACJI:

L.p.	Rodzaj aktualizacji	Zakres, oznaczenie obszaru	Instytucja (data wykonania)

Wykonano nakładki tematyczne:

S ....
W ....
U ....
E ....
R ....
O ....

Okręgowe Przedsiębiorstwo Geodezyjno-Kartograficzne w Krakowie

....
podpis *podpis*
Wykonano w roku I. ks. rob.:

OSNOWA GEODEZYJNA:

WYKAZ WSPÓŁRZĘDNYCH:

Punkty triangulacyjne:

Numer	Klasa	X	Y	H

Punkty osnowy szczegółowej – stabilizowane:

Numer	Klasa	X	Y	H

Oznaczenia:
○ - osnowa istniejąca przed sporządzeniem mapy
- osnowa założona przy opracowaniu mapy zasadniczej
- osnowa założona podczas aktualizacji mapy.

Punkty wysokościowe:

Numer	Klasa	H

Rys. 15.10 Przykładowy formularz metryki mapy zasadniczej

15.5.7. Katalog obiektów i znaków umownych mapy zasadniczej w instrukcji K-1

Wszystkie wymiary obiektów zawartych w katalogu są wyrażone w milimetrach, chyba że wyraźnie zaznaczono inną jednostkę miary. Obiekty obligatoryjne wyróżniono w katalogu literą **O**, zaś fakultatywne literą **F** umieszczoną bezpośrednio po nazwie obiektu. Aby zapewnić jednoznaczność *kodowania* zarówno w systemach korzystających z kodów liczbowych jak i literowych, a także jednoznaczność wymiany między takimi systemami, każdemu z elementów graficznych i obiektów stanowiącym treść mapy przyporządkowano dwa równoważne kody: liczbowy i literowy. *Kody literowe* są (w stopniu w jakim się to dało uzyskać) pamięciowe (mnemoniczne) związane z nazwą obiektu, zaś *kody liczbowe* wiążą się z podziałem szczegółów na działy (tabela 15.7).

Tabela 15.7: Grupy kodów liczbowych

NAZWA DZIAŁU TREŚCI MAPY	GRUPA KODÓW
Osnowa	100
Granice, grunty	200
Budynki	300
Komunikacja	400
Uzbrojenie terenu	500, 600, 700
Rzeźba terenu i ogólnogeograficzna	800
Zagospodarowanie terenu	900
Elementy graficzne	990

W instrukcji K-1 nie dokonano jednoznacznego rozwarstwienia obiektów i elementów graficznych mapy, ponieważ tego rodzaju instrukcyjne rozstrzygnięcie eliminowałoby z zastosowań istniejące i przyszłe systemy, w których rozwarstwienie jest lub będzie niemożliwe albo nienaturalne.

Na geometrię poszczególnych obiektów wykazywanych na mapie zasadniczej składają się następujące elementy (twory) wykorzystywane do ich opisu:

1) punkt np. punkt osnowy, punkt graniczny, pikieta, punkt zmiany parametrów przewodu,
2) łamana otwarta np. przebiegający przez mapę odcinek granicy Państwa, oś przewodu gazowego,
3) łamana zamknięta np. linia granic działki,
4) łamana uogólniona otwarta np. warstwica przebiegająca przez mapę, odcinek warstwicy między budynkami, oś kanału murowanego kanalizacji ogólnospławnej (może zawierać łuki kołowe),
5) łamana uogólniona zamknięta np. obrys budowli kultu religijnego z łukowatymi absydami i pilastrami,
6) obszar jednospójny np. obszar działki o dowolnym kształcie, nie zawierającej enklawy,
7) obszar spójny, ale nie jednospójny np. obszar budynku zawierającego zamknięte atrium np. obszar działki zawierającej enklawę, np. obszar jeziora z wyspą, stanowiącą przedmiot odrębnego władania (odrębną działkę),
8) obszar niespójny np. przypadek obrębu składającego się z dwu lub więcej obszarów spójnych, np. części głównej i obszaru enklawy w przyległym obszarze Lasów Państwowych,

9) ograniczenie łamaną (ewentualnie uogólnioną) zamkniętą i ograniczenie zbiorem łamanych (ewentualnie uogólnionych) zamkniętych, nie przecinających się w następujących przypadkach:
   - obszar jednospójny jest ograniczony łamaną (ew. uogólnioną) zamkniętą,
   - obszar spójny ograniczony jest zbiorem łamanych (ew. uogólnionych) zamkniętych nie przecinających się, z których jedna stanowi granicę zewnętrzną obszaru, a pozostałe okalają enklawy,
   - obszar niespójny ograniczony jest zbiorem łamanych (ew. uogólnionych), z których co najmniej dwie nie zawierają się wewnątrz innej łamanej (ew. uogólnionej) zamkniętej.

15.5.8. Zalecenia redakcyjne dla mapy zasadniczej

W miejscach nakładania się lub wzajemnego zachodzenia elementów treści należy przyjąć zasadę pierwszeństwa (przesłaniania):

1) rysunku mapy przed opisami (z wyjątkiem wysokości warstwicy),
2) symbolu (z wyjątkiem symbolu drzewa) przed konturem sytuacji,
3) linii ciągłej przed linią przerywaną,
4) linii grubej przed linią cienką,
5) linie przebiegające przez symbol drzewa powinny pozostawać widoczne.

Podczas wykonywania opisów na mapie zasadniczej należy przestrzegać następujących zasad:

1. Obiekty wydłużone (ulice, rzeki) opisuje się wzdłuż obiektu, pismem pochyłym, wg zasady, że napisy biegną zawsze (licząc ostatnią literę w stosunku do pierwszej) w azymutach mniejszych od 180°.
2. Gdy obszar jest na tyle mały, że opis w nim nie mieści się, należy użyć odnośnika.
3. Opis warstwicy przesłania warstwicę (jest pod napisem niewidoczna) i góra opisu wskazuje kierunek wzrostu wysokości terenu.
4. Opisy wysokości punktów są równoległe do osi *Y* układu współrzędnych, ale gdy takie położenie prowadzi do utraty czytelności, dopuszcza się ich obracanie.
5. Metry od części dziesiątych w opisie wysokości oddziela kropka.
6. Nazwy ulic pisze się bez skrótu ul., natomiast stosuje się skrót *al.* (aleja) i *pl.* (plac).
7. Dla obszarów posiadających nazwy własne stosuje się skróty podane w wykazie skrótów (*zał., jez., wdsp, ...*). Gdy skrótów takich nie przewidziano, stosować należy pełne nazwy (*Cmentarz Powązkowski, Park Bema, Morze Bałtyckie...*).
8. Obszary PKP i Lasów Państwowych opisuje się w zależności od ilości miejsca, skrótem lub pełną nazwą, jednakże bez użycia słowa obszar. Służą temu celowi obiekty *„tekst dodatkowy"*.

Wszelkie drogi i place publiczne są treścią fakultatywną mapy zasadniczej. Nie stanowią treści mapy drogi położone wewnątrz działek, z wyjątkiem dróg biegnących w dużych obszarach o jednolitym władaniu (Lasy Państwowe, duża własność ziemska) i mających charakter stałych dróg wewnętrznego transportu lub łączących siedliska. Gdy droga na rysunku mapy nie wyróżnia się (np. równolegle biegną wąskie działki), należy opisać ją skrótem *dr.*

15.5.9. Formularz definicji obiektu

Wszystkie obiekty są definiowane w takim samym, standardowym formularzu, w którym opisano wszystkie pola, poza polami pierwszego wiersza. Znaczenia tych pól w wypełnionym formularzu opisane zostały poniżej. Niżej pokazano także kilka przykładów formularzy definiujących obiekty (rys. 15.11 a-c) zamieszczonych w instrukcji K-1:

a)

Punkt osnowy podstawowej wysokościowej	**O**	**112**	**OPZ**
GEOMETRIA: Punkt			

ATRYBUTY OPISOWE	NAZWA	WARTOŚCI DOPUSZCZALNE
Numer głowicy znaku	OMZ	Łańcuch znaków alfanumerycznych

PRZEDSTAWIENIE GRAFICZNE	UWAGI
AJ 1234 PT 247	Środek trójkąta w punkcie osnowy.

ELEMENTY PRZEDSTAWIENIA GRAFICZNEGO			WYMIARY W SKALI:			
ELEMENT		OPIS ELEMENTU	1:500	1:1000	1:2000	1:5000
▼		bok trójkąta	4.0	3.0	3.0	2.0
AJ 1234		tekst podkreślony	1.8	1.5	1.5	1.5

b)

Działka ewidencyjna	**O**	**211**	**GPE**
GEOMETRIA: Obszar spójny ograniczony zbiorem łamanych zamkniętych			

ATRYBUTY OPISOWE	NAZWA	WARTOŚCI DOPUSZCZALNE
Numer ewidencyjny działki	GNE	pusty, łańcuch znaków alfanumerycznych
Numer adresowy	GME	pusty, łańcuch znaków alfanumerycznych
Nazwa własna (ulica, plac)	GNL	pusty, łańcuch znaków alfanumerycznych

PRZEDSTAWIENIE GRAFICZNE	UWAGI
29, 123/1, 123/3, 114, 25, 123/2, PL. SASKI, ELEKTORALNA, 124, 23, 125, 115, 13a, 105, KREDYTOWA	Skala 1:5000. Punkt wstawienia środka numeru działki i zaczepienia odnośnika wewnątrz działki. Gdy nie mieści się - należy numer umieścić na odnośniku do wnętrza działki. Numer adresowy (jeśli nie pusty) orientuje się wzdłuż tej czołówki działki, która przylega do ulicy.

ELEMENTY PRZEDSTAWIENIA GRAFICZNEGO			WYMIARY W SKALI:			
ELEMENT		OPIS ELEMENTU	1:500	1:1000	1:2000	1:5000
124		tekst nr działki, nr adresowy	2.5	1.8	1.8	1.5
Okólna pl. Saski		tekst: nazwa własna	2.5	1.8	–	–
OKÓLNA PL. SASKI		tekst: nazwa własna	–	–	1.8	1.5

c)

Budynek		**O**	**312**	**BUD**
GEOMETRIA: Obszar spójny ograniczony zbiorem łamanych uogólnionych zamkniętych				
ATRYBUTY OPISOWE	NAZWA	WARTOŚCI DOPUSZCZALNE		
Przeważająca funkcja budynku	BFN	pusta, b, g, h, i, k, m, p, s, t, z		
Numer najwyższej kondygnacji	BKN	pusty, liczba naturalna		
PRZEDSTAWIENIE GRAFICZNE		UWAGI		
		Budynek z atrium, nawisem i podporami nawisu. Obrys nawisu jest osobnym obiektem. Gdy podpory w skali mapy są mniejsze od 1.0 x 1.0 należy użyć symboli. Nie kreślić pilastrów < 1.0 w skali mapy. Podpory wliczać do liczby kondygnacji np. budynek trójkondygnacyjny podparty na słupach dwukondygnacyjnych oznaczać jako pięć kondygnacji.		

ELEMENTY PRZEDSTAWIENIA GRAFICZNEGO			WYMIARY W SKALI:			
ELEMENT		OPIS ELEMENTU	1:500	1:1000	1:2000	1:5000
———		linia obrysu przyziemią	0.5	0.35	0.35	0.25
i3		tekst (funkcja, nr najw. kondygn.)	2.5	1.8	1.8	1.5

Rys. 15.11. Przykłady formularzy opisów obiektów wykazywanych na mapie zasadniczej

15.5.10. Grubości linii stosowane podczas wykreślania mapy zasadniczej

Grubości linii podane w załączniku nr 1 do instrukcji K-1 oparto na typoszeregu związanym z pisakami i szablonami zgodnymi z normami PN i DIN. Grubości linii znaków edytowanej mapy wynosić mogą 0,13; 0,18; 0,25; 0,35; 0,50 mm. Do wykreślenia treści mapy w określonej skali używa się trzech grubości linii zestawionych w tabeli 15.8.

Tabela 15.8: Grubości linii stosowane na mapie zasadniczej

LINIA [mm]	*SKALA*			
	1:500	*1:1000*	*1:2000*	*1:5000*
cienka	*0.18*	*0.13*	*0.13*	*0.13*
średnia	*0.35*	*0.25*	*0.25*	*0.18*
gruba	*0.50*	*0.35*	*0.35*	*0.25*

Ze względu na różnorodność i koszt sprzętu koniecznego do precyzyjnego spełnienia wymagań dotyczących edycji automatycznej, dopuszcza się odchylenia od podanych wymiarów grubości linii w górę i w dół o nie więcej niż 20% wg zasad:

- jeśli zmiana żadnej z grubości nie jest większa niż 5%, kierunek zmian jest dowolny (tzn. dopuszczalne jest to, że grubość linii grubszych maleje a cieńszych rośnie lub odwrotnie),
- jeśli zmiana którejkolwiek grubości przekracza 5%, to wszystkie nie rosną lub nie maleją (tzn. pozostałe mogą nie zmienić grubości, jeśli jednak zmieniają, to w tę samą stronę: wszystkie maleją, lub wszystkie rosną).

15.5.11. Zasady wykonywania opisów na mapie zasadniczej

Do wszystkich tekstów mapy oraz opisów pozaramkowych stosować należy pismo blok pochyły. Wysokości tekstu podane w katalogu znaków oparto na typoszeregu związanym z pisakami i szablonami zgodnymi z normami PN i DIN.

Wysokości tekstów treści mapy i opisów pozaramkowych wynosić mogą 1,5; 1,8; 2,5; 3,5; 5,0; 7,0 mm i kreślone mają być linią o grubości równej $^1/_{10}$ wysokości, z wyjątkiem pisma o wysokości 1.5 mm, które kreślone powinno być grubością 0,13 mm.

Dopuszcza się następujące odchylenia rozmiarów pisma:

- od podanych wysokości pisma, nie więcej jednak niż o +10% oraz –25%,
- od założonej grubości pisma $^1/_{10}$ jego wysokości, w dół do $^1/_{12}$ i w górę do $^1/_8$.

Zarówno w systemach określających wysokość pisma bezpośrednio w milimetrach, jak i w tych, gdzie następuje przeliczenie przez punkty typograficzne, przed edycją mapy użytkowej należy dokonać prób, bowiem przy różnych procesach technologicznych i użyciu różnych narzędzi (sprzętu i oprogramowania), odchylenia w wysokości pisma mogą przekraczać wartości podane wyżej

15.6. Mapy topograficzne

Mapy topograficzne dla celów gospodarczych są mapami ogólnogeograficznymi o treści dostosowanej do potrzeb gospodarczych. Dla obszaru całego kraju mapy te są opracowywane w skalach: 1:500000, 1:200000, 1:100000, 1:50000, 1:25000, 1:10000. W strefach intensywnie zagospodarowanych i na obszarach wielkich miast może być stosowana największa skala map topograficznych – 1:5000.

Polskie mapy topograficzne opracowywane są z uwzględnieniem potrzeb obronnych, gospodarczych i naukowych. Odznaczają się uzasadnionym doborem skal, odwzorowania, środków wyrazu i treści. Mapy topograficzne są najczęściej wykorzystywane do następujących celów:

- sporządzania projektów: osnów geodezyjnych, tras komunikacyjnych: kolejowych, drogowych, wodnych, osiedli, linii przewodów, melioracji wodnych, zapór i zbiorników wodnych, obiektów przemysłowych i innych.
- studiów nad terenem,
- organizacji i urządzania dużych gospodarstw leśnych i rolnych,
- jako podkład do opracowania map tematycznych,
- do oceny i pomiarów elementów terenowych,
- sporządzania ogólnych i szczegółowych planów zagospodarowania przestrzennego,
- rozwiązywania różnych problemów gospodarczych i naukowo-badawczych.

W zakres treści map topograficznych wchodzą: elementy osnowy matematycznej (skala, odwzorowanie, siatka kartograficzna i siatka kwadratów) i geodezyjnej (punkty osnowy poziomej i wysokościowej), osiedla, obiekty przemysłowe, rolnicze i kulturalno-socjalne, koleje, drogi i urządzenia towarzyszące, wody i urządzenia wodne (mosty, przeprawy, urządzenia hydrotechniczne), roślinność (lasy, zarośla, parki, ogrody, plantacje), uprawy, grunty, granice administracyjne, naziemne elementy uzbrojenia, rzeźba terenu.

Wspomniane elementy są za pomocą tzw. *kartograficznych środków wyrazu* przedstawiane kompleksowo, czyli w sposób zawierający wszechstronną charakterystykę przedmiotów terenowych i zjawisk powstałych w wyniku procesów przyrodniczych i działalności gospodarczej człowieka oraz współzależności zachodzących między nimi. Kartograficznymi środkami wyrazu nazywamy elementy rysunkowe (konstrukcje graficzne i barwne) tudzież opisowe przedstawiające poglądowo, z zachowaniem kartometryczności cechy jakościowe oraz ilościowe przedmiotów i zjawisk tworzących treść mapy. Wśród środków tych wyróżniamy: linie, konstrukcje graficzne, symbole (sygnatury punktowe) barwy i ich ton, oznaczenia literowe i cyfrowe. Zestawienie środków wyrazu prze-

widzianych do pokazania elementów treści konkretnej mapy nosi nazwę *zbioru (klucza) znaków umownych* (rys. 15.12).

Na polskich mapach topograficznych wykonywanych w różnych skalach (od 1:500 000 do 1:5 000) osiągnięto w znacznym stopniu *standaryzację znaków umownych*, polegającą na przyjęciu na te same przedmioty terenowe jednakowych znaków. W zależności od skali mapy zmianie mogą ulegać jedynie ich wymiary. Standaryzacja przyczynia się do ujednolicenia treści map topograficznych oraz uproszczenia i geometryzacji rysunku samych znaków.

Barwy stosowane na mapach topograficznych to przede wszystkim: czarna, brązowa, zielona i niebieska. Istotnym środkiem wyrazu zwiększającym poglądowość mapy może być również ton (nasycenie) barwy. Mapy topograficzne są obecnie reprodukowane w wersji czterobarwnej obejmującej wyżej wymienione barwy oraz dwubarwnej zawierającej kolory: czarny i brązowy.

Znaki liniowe, przedstawiające na mapie wąskie lecz silnie wydłużone obiekty albo zasięgi obszarów o określonych cechach, są różnicowane za pomocą grubości lub stylu i barwy linii. Ważną rolę odgrywają także *izolinie* (linie izarytmiczne), czyli linie łączące na mapie punkty posiadające jednakowe wartości określonej cechy ilościowej pewnego zjawiska terenowego. Typowym przykładem są tu warstwice (izohipsy) łączące punkty o tej samej wysokości. Na mapach topograficznych i tematycznych mogą także wystąpić inne izolinie np. izobaty pokazujące ukształtowanie pionowe dna dużych cieków i zbiorników wodnych.

Znaki punktowe (sygnatury) są symbolami przedstawiającymi lokalizację ważnych gospodarczo przedmiotów terenowych, których ze względu na małe rozmiary nie można wykazać na mapie w skali. Z reguły symboli używa się wtedy, gdy wymiary przedmiotu w skali są mniejsze niż 0,5×0,5 mm.

Znaki konturowe przedstawiają przedmioty i zjawiska, które w rzucie poziomym można wykazać w skali mapy w postaci konturów zamkniętych, obwiedzionych linią o określonym stylu np. kropkowaną, czarną. Znakami tymi oznaczane są uprawy, użytki gruntowe oraz większe zbiorniki wodne czy obiekty budowlane. Wypełnienie konturów mogą stanowić tła barwne, pojedyncze lub powtarzające się symbole oraz różne desenie szrafury (kreskowania).

Znaki objaśniające (opisy) są znakami składającymi się z liter albo cyfr, służącymi do opisu lub objaśnienia cech, których nie da się przedstawić w formie graficznej. Skróty takie jak: *wdsp.*, *masz.*, *chem.*, służą do bliższego określenia przedmiotu np. rodzaju fabryki. Napisy oznaczające nazwy własne miast, osiedli i przysiółków, obiektów krajobrazu geograficznego np. miana typu: *J. Leśne*, *G. Turbacz* ogromnie ułatwiają orientację w terenie. Istotne są także styl i gabaryty użytej czcionki, ponieważ rozmiary i znaczenie administracyjne miejscowości lub wielkość przedmiotu terenowego są różnicowane za pomocą wielkości napisu. Ważną rolę odgrywają na mapach wartości liczbowe określające wymierne cechy wykazywanych elementów np. numery dróg i słupów kilometrowych, wysokości punktów charakterystycznych terenu, cechy warstwic, szerokość rzeki, głębokość bagna, wymiary i nośność mostu, przeciętna wysokość i grubość drzew w lasach. Nadmierna ilość napisów na mapie może się jednak przyczyniać do zaciemnienia treści i obniżenia jej czytelności.

WAŻNIEJSZE ZNAKI UMOWNE MAP TOPOGRAFICZNYCH

Punkt triangulacyjny
Punkt poligonowy
Punkt topograficzny na wzniesieniu
Punkt topograficzny
Punkt wysokościowy stabilizowany trwale
Budynek
Wieża
Zabudowa zwarta
Zakład przemysłowy:
- z kominem (rzut w skali mapy)
- z kominem (symbol)
- bez komina (symbol)

Pojedyncza zagroda
Kościół
Droga wiejska
Droga polna lub leśna
Ścieżka

E 22 210 Międzynarodowe i krajowe numery dróg

Ogrodzenie trwałe (rzut)
Ogrodzenie trwałe (symbol)
Rzeka, potok, strumień, rów
Suchy rów
Wał sztuczny, grobla
Granica państwa
Granica województwa
Granica gminy
Pas lasu
Rząd drzew
Żywopłot, pas krzaków

a b Krzaki zwarte
a) iglaste, b) liściaste

Leśniczówka, gajówka
Stacja benzynowa
Transformator
Linia telefoniczna

Napowietrzny przewód elektryczny:
- niskiego napięcia
- wysokiego napięcia

Linia kolejowa, stacja
Autostrada
Droga szybkiego ruchu
15 Droga główna, słup km
Droga drugorzędna
Droga lokalna

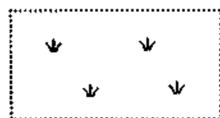
a b c
Las wysokopienny z linią oddziałową
a) iglasty, b) liściasty, c) mieszany

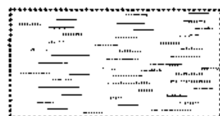
Las rzadki

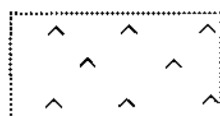
Zagajnik

Sad


Łąka sucha i podmokła


Zarośla, trzciny i sitowia


Bagno


Pastwisko

Rys. 15.12. Zestawienie ważniejszych znaków umownych stosowanych na mapach topograficznych

Dokładność mapy topograficznej, decydującą o kartometryczności, można ocenić zestawiając współrzędne punktów osnowy poziomej z katalogu współrzędnych i współrzędne odczytane z mapy oraz porównując wyniki pomiaru terenowego z pomiarem danego elementu na mapie. Rozbieżności obu obserwacji wynikają z błędów, których źródłem oprócz błędów samego pomiaru graficznego są następujące czynniki:

- zniekształcenia odwzorowawcze,
- generalizacja kartograficzna,
- błędy naniesienia osnowy geodezyjnej, szczegółów i interpolacji warstwic,
- błędy redakcyjne montażu elementów treści lub ich przeniesienia z źródłowych opracowań kartograficznych (np. z mapy zasadniczej),
- błędy związane z reprodukcją mapy podczas druku maszynowego,
- deformacje (skurcz) podkładu mapowego.

Zgodnie z instrukcją K-2 błąd położenia punktów osnowy geodezyjnej nie powinien przekraczać ±0,1 mm (maksymalnej dokładności graficznej), zaś błąd położenia punktu sytuacyjnego I grupy – wartości ±0,5 mm w terenach płaskich, natomiast w terenach górzystych ±0,75 mm, zaś dla punktów sytuacyjnych pozostałych grup ±1,0 mm. Osnowa geodezyjna powinna być rozłożona równomiernie na każdym arkuszu i występować w dostatecznej liczbie punktów.

Wszystkie mapy, a zwłaszcza bogate w szczegóły mapy topograficzne, podlegają procesowi *starzenia się*, polegającemu głównie na dezaktualizacji treści, powodującego jej niezgodność z aktualnym stanem sytuacji i rzeźby występującym w terenie. Dodatkowym czynnikiem przyspieszającym starzenie się map może być postęp naukowy i gospodarczy wymuszający wprowadzenie nowych wymogów odnośnie treści map, wzorów znaków umownych oraz zmian matematycznych podstaw konstrukcji mapy np. powierzchni odniesienia, odwzorowania kartograficznego, poziomu zerowego wysokości itp. Dla utrzymania map w stanie zgodności z terenem konieczne jest unormowanie procesu ich *aktualizacji*, zwanej także *unacześnianiem* lub *reambulacją*. Mapy w dużych skalach zawierają więcej szczegółów, toteż szybciej się starzeją. Aktualizacji dokonuje się głównie w oparciu o porównanie treści danej mapy z innymi materiałami kartograficznymi, a zwłaszcza z unacześnioną mapą zasadniczą oraz na podstawie powtarzanych okresowo zdjęć lotniczych i satelitarnych. Ważną informacją dotyczącą aktualności mapy jest rok jej wydania, który powinien być podany na każdym arkuszu. Zasady aktualizacji mapy zasadniczej w ramach tzw. *pomiarów uzupełniających* zostały bardziej szczegółowo omówione w rozdziale 16.

15.7. Mapy tematyczne

Jak już wcześniej wspomniano, mapa tematyczna jest opracowaniem kartograficznym eksponującym jeden albo kilka wybranych elementów treści ogólnogeograficznej, bądź określone zagadnienie społeczno-gospodarcze lub przyrodnicze. Mapy te są opracowywane na tle mapy zasadniczej lub ogólnogeograficznej w celu zaspokojenia potrzeb różnych dziedzin nauki, administracji i gospodarki, umożliwiając podejmowanie optymalnych decyzji gospodarczo-projektowych.

Skale map tematycznych mieszczą się w bardzo szerokim zakresie: od 1:250 do 1:500 000. Dobór skali mapy zależy od przeznaczenia i roli mapy oraz od jej wymaganej szczegółowości i czytelności.

Kryterium klasyfikacji map tematycznych (rys. 15.13) na: zespoły, grupy, podgrupy i rodzaje jest treść mapy. Aktualnie występujące rodzaje map gospodarczych zestawiono w tabeli 15.8.

W zespole map społeczno-gospodarczych znajdują się mapy zawierające informacje dotyczące zagadnień gospodarczych, społecznych i struktury zagospodarowania terenu. Na treść map należących do zespołu map przyrodniczych składają się informacje z zakresu: zasobów naturalnych, zjawisk fizjograficznych, powiązań pomiędzy poszczególnymi elementami środowiska przyrodniczego i jego ochrony.

Klasa: Mapy tematyczne

Zespoły: 1. społeczno-gospodarcze; 2. przyrodnicze

Grupy i podgrupy:

- 1. społeczno-gospodarcze
  - 1. gospodarcze
    - 1. mapa zasadnicza
    - 2. podstawowego zagospod. terenu
    - 3. uzbrojenia terenu
    - 4. komunikacji
    - 5. gospodarki mieszkaniowej
    - 6. przemysłu
    - 7. rolnictwa
    - 8. usług
    - 9. swobody dysp. terenu
  - 2. społeczne
    - 1. demograficzne
    - 2. wybranych elem. socjalno-bytowych
    - 3. patologii społecznych
- 2. przyrodnicze
  - 1. fizjograficzne
    - 1. geologiczne
    - 2. rzeźby terenu
    - 3. hydrograficzne
    - 4. klimatu
    - 5. glebowe
    - 6. szaty roślinnej
    - 7. świata zwierzęcego
  - 2. sozologiczne
    - 1. zagrożenia środowiska
    - 2. ochrony środowiska

Podgrupy

Rys. 15.13. Schemat klasyfikacji map tematycznych na grupy i podgrupy

Zespół map społeczno-gospodarczych dzieli się na dwie grupy map:

1. Mapy gospodarcze, ilustrujące jakościowe i ilościowe zagospodarowanie terenu.
2. Mapy społeczne, zawierające informacje dotyczące zjawisk i stosunków demograficznych, charakterystyki warunków socjalno-bytowych oraz ich powiązań ze strukturą zagospodarowania przestrzennego.

Tabela 15.9. Rodzaje map gospodarczych

Podgrupy	L.p.	Rodzaje map
1. Mapa zasadnicza	–	–
2. Podstawowego zagospodarowania terenu	*1.*	*Mapy pochodne od mapy zasadniczej*
	2.	*Mapy zagospodarowania i użytkowania terenu*
	3.	*Mapy ewidencji gruntów*
	4.	*Mapy nomenklatur prawnych nieruchomości*
	5.	*Mapy odniesień przestrzennych (istniejących podziałów terenu*
	6.	*Mapy nazw ulic i placów*
	7.	*Mapy osnów geodezyjnych*
3. Uzbrojenie terenu	*1.*	*Mapy sieci wodociągowej*
	2.	*Mapy sieci kanalizacyjnej*
	3.	*Mapy sieci cieplnej*
	4.	*Mapy sieci gazowej*
	5.	*Mapy sieci telekomunikacyjnej*
	6.	*Mapy sieci elektroenergetycznej*
	7.	*Mapy zbiorcze uzbrojenia terenu*
	8.	*Mapy geodezyjnej inwentaryzacji sieci przewodów napowietrznych w zakładach przemysłowych*
4. Komunikacji	*1.*	*Mapy układu komunikacyjnego*
	2.	*Mapy zbiorowej komunikacji miejskiej*
	3.	*Mapy organizacji ruchu kołowego*
	4.	*Mapy rodzaju nawierzchni ulic*
	5.	*Mapy potoków ruchu ulicznego*
	6.	*Mapy kontroli ruchu w przestrzeni powietrznej (mapy wizyjne radarowe)*
	7.	*Mapy sieci dróg publicznych*
	8.	*Mapy sieci dróg szybkiego ruchu*
5. Gospodarki mieszkaniowej	*1.*	*Mapy rozmieszczenia typów budownictwa mieszkaniowego*
	2.	*Mapy rozmieszczenia i struktury zasobów mieszkaniowych*
	3.	*Mapy intensywności zabudowy mieszkaniowej*
6. Przemysłu	*1.*	*Mapy zakładów przemysłowych*
	2.	*Mapy zagospodarowania terenu przemysłowego*
7. Rolnictwa	*1.*	*Mapy użytkowania ziemi*
	2.	*Mapy struktury władania gruntami*
	3.	*Mapy glebowo-rolnicze*
	4.	*Mapy glebowo-wilgotnościowe*
	5.	*Mapy waloryzacji rolniczej przestrzeni produkcyjnej*
8. Usług	*1.*	*Mapy rozmieszczenia i charakterystyki obiektów oświaty, nauki, kultury i sztuki, układów zabytkowych i zabytków*
	2.	*Mapy rozmieszczenia i charakterystyki obiektów ochrony zdrowia*
	3.	*Mapy rozmieszczenia i charakterystyki usług*
	4.	*Mapy rozmieszczenia i charakterystyki obiektów łączności*
9. Swobody dyspozycyjności terenu	*1.*	*Mapy gleb chronionych*
	2.	*Mapy terenów objętych ochroną przyrody*
	3.	*Mapy charakterystyki prawnej terenu*
	4.	*Mapy ograniczeń wynikających z występowania stref uciążliwości*
	5.	*Mapy ustalonych miejsc realizacji obiektów budowlanych zatwierdzonych*

W *zespole map przyrodniczych* występują dwie grupy:

1. Mapy fizjograficzne obejmujące takie zagadnienia jak: rzeźba terenu, wody powierzchniowe i podziemne, gleby, klimat, szata roślinna, procesy przyrodnicze związane z zagospodarowaniem przestrzennym terenu.
2. Mapy sozologiczne, których treść stanowią informacje dotyczące: stanu zasobów, ochrony, zanieczyszczeń, skażeń i zaburzeń środowiska geograficznego oraz dynamiki jego zmian.

Podstawę wykonania map tematycznych stanowi wspomniane wcześniej tło kartograficzne (mapa zasadnicza lub ogólnogeograficzna), natomiast same mapy tematyczne , będąc ostatnim ogniwem łańcucha produktów mapowych przeważnie nie stanowią już źródłowych opracowań. Zastosowanie map tematycznych jest wielokierunkowe, zaś treść, skala i stopień generalizacji zależą od wymagań podmiotów, dokonujących zamówienia danej mapy. Specyficznym rodzajem map tematycznych są mapy sporządzane dla celów projektowych.

Mapa do celów projektowych jest opracowaniem kartograficznym stanowiącym podkład do sporządzenia projektu zagospodarowania działki lub terenu. Mapa ta wykonana w formie analogowej lub numerycznej powinna zawierać treść obligatoryjną mapy zasadniczej poszerzoną o treść dodatkową, która obejmuje:

1. Linie rozgraniczające tereny o różnym przeznaczeniu, linie zabudowy, osie ulic i dróg opracowane geodezyjnie tzn. opatrzone miarami pozwalającymi na wytyczeniu tych linii w terenie.
2. Położenie zieleni wysokiej ze wskazaniem pomników przyrody.
3. Usytuowanie innych szczegółów i obiektów wskazanych przez projektanta jako mających istotne znaczenie dla projektu.

Poza standardową treścią mapy projektant może zlecić zamieszczenie załączonych do mapy, nie umieszczanych na niej dodatkowych informacji, które z odpowiednią dokładnością można określić tylko metodami geodezyjnymi. Dokładność ta powinna być uzgodniona z projektantem. Do uzyskania tych informacji mogą być wykonane takie prace przedprojektowe jak:

- przekroje terenu wzdłuż istniejących lub projektowanych tras,
- przekroje cieków i zbiorników wodnych,
- niwelacja siatkowa dla obliczenia objętości mas ziemnych,
- pomiar strzałek zwisu przewodów i prześwitów pod nimi,
- szczegółowa inwentaryzacja obiektów budowlanych, która może obejmować: elewacje, rzuty poziome i pionowe pomieszczeń i konstrukcji, rozmieszczenie elementów wyposażenia wnętrz, położenie urządzeń technicznych, bieg skomplikowanych fragmentów sieci i konstrukcji podziemnych i napowietrznych.

Zasięg obszarowy mapy projektu obejmuje teren inwestycji poszerzony o pas otaczający ten teren o szerokości minimum 30 m. Jeśli dla terenu inwestycji ustalono strefę ochronną, wówczas obszar przedstawiony na mapie projektu powinien obejmować również tę strefę.

Skala map wykonywanych do celów projektowych zależy od rodzaju i wielkości planowanej inwestycji, przy czym jako typowe należy przyjmować skale 1:500, 1:1 000, 1:2 000. Skalę 1:500 stosuje się dla małych obszarów i pojedynczych obiektów budowlanych, skalę 1:1 000 – dla terenów budownictwa przemysłowego i zespołów obiektów budowlanych, zaś skalę 1:2000 – dla obiektów liniowych i rozległych inwestycji.

15.8. Systemy informacji przestrzennej

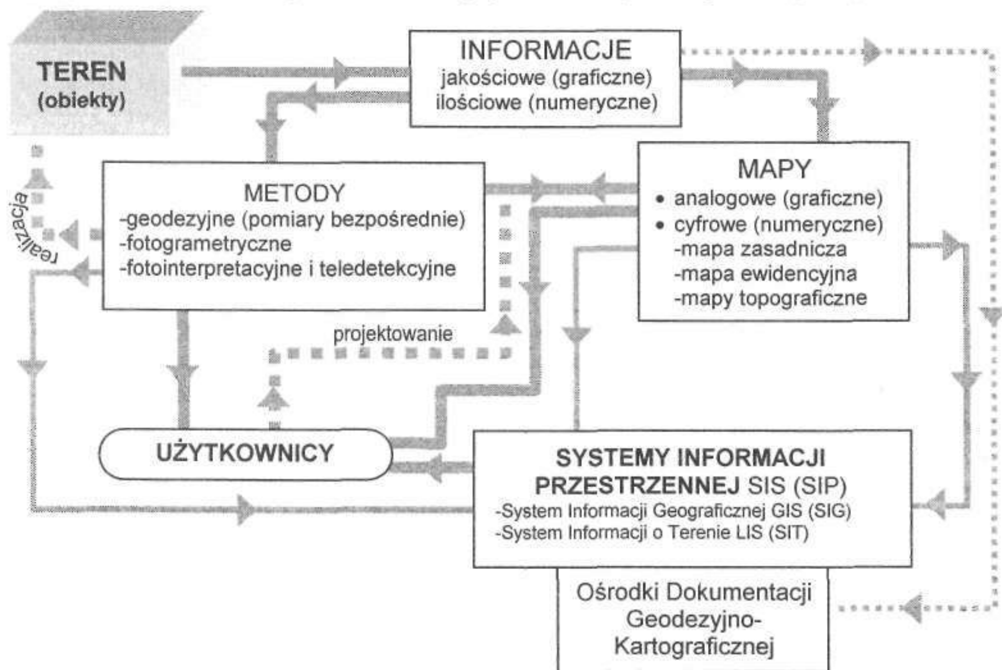
Współczesny rozwój technik pomiarowych i informatycznych umożliwił utworzenie w skali globalnej i w poszczególnych krajach ujednoliconych systemów informacji. Poprzez *informację* rozumie się zwykle rozszerzenie aktualnego stanu wiedzy w określonej dziedzinie na podstawie *danych*, które z kolei odpowiadają zarejestrowanym faktom lub opisom zdarzeń i pojęć. Informacje są przedmiotem działania *systemów informacyjnych*, na które składają się: sposoby zbierania informacji, metody ich przetwarzania i przechowywania w bankach danych w postaci baz danych oraz zasady udostępniania informacji użytkownikom. Podstawowym kryterium klasyfikacji systemów informacyjnych jest rodzaj fragmentu rzeczywistości, jaki opisują.

Wśród systemów informacyjnych bardzo ważną rolę odgrywają *systemy informacji przestrzennej*, których cechą charakterystyczną jest określenie nie tylko cech jakościowych i ilościowych opisywanych obiektów, lecz także ich p o ł o ż e n i a. Systemy te służą pozyskiwaniu, przetwarzaniu i udostępnianiu danych dotyczących położenia, własności geometrycznych i relacji przestrzennych trwałych obiektów naturalnych i sztucznych oraz różnego typu zjawisk związanych z Ziemią. W środowisku geografów i kartografów system komputerowy przeznaczony do przetwarzania i analizy danych geograficznych określany jest skrótem GIS (*Geographic Information System*), zaś w Polsce dla określenia systemu informacji przestrzennej geodeci posługują się nazwą: *System Informacji Terenowej* (SIT). Odpowiednikiem SIT jest w nomenklaturze światowej system określany skrótem LIS (*Land Information System*). Wymienione tu pojęcia mają charakter zbliżony do siebie, lecz zakresy zainteresowań poszczególnych systemów w zależności od celów ich utworzenia oraz wykorzystania przez przedstawicieli różnych dziedzin nauki i gospodarki mogą wykazywać pewne różnice. W opracowaniach polskich za główne kryterium podziału przyjęto stopień szczegółowości systemu. System GIS (SIG) odpowiada informacjom związanym z opracowaniami kartograficznymi średnio- i małoskalowymi, zaś LIS (SIT) – z wielkoskalowymi, poczynając od skali 1:5 000, czyli obejmuje także skale bazowe mapy zasadniczej. System Informacji Geograficznej stanowi zatem podstawę do podejmowania decyzji w skali kraju lub regionu, natomiast System Informacji Terenowej dotyczy spraw o zasięgu lokalnym. Typowymi obiektami SIT są nieruchomości: działka, budynek, lokal itp., zaś głównym celem utworzenia SIT jest ich opodatkowanie w ramach katastru (ewidencji) nieruchomości, oparte na ich powszechnej wycenie (taksacji).

Do końca lat siedemdziesiątych system zbierania, przechowywania, przetwarzania i udostępniania danych oparty był na mapie analogowej (kreskowej) i części dokumentacji o charakterze pomiarowo-opisowym określanej w operatach jako tzw. *część ewidencyjna*. Współczesny system informacji terenowej korzysta zarówno z dotychczasowych źródeł informacyjnych przekształconych na formę cyfrową poprzez digitalizację i skanowanie z wektoryzacją, jak i nowych technik pozyskiwania informacji, polegających na zastosowaniu GPS, zdjęć lotniczych i satelitarnych, nowoczesnych instrumentów geodezyjnych umożliwiających utworzenie ciągu technologicznego mającego na celu przetworzenie tych informacji za pomocą komputerów wyposażonych w odpowiednie oprogramowanie.

SIT stanowi bazę danych o terenie (w postaci analogowej lub cyfrowej), utworzonej dla określonego obszaru oraz zespół metod i technik ich systematycznego zbierania, aktualizacji i udostępniania zainteresowanym stronom. Celem wprowadzenia SIT jest uzyskanie informacji potrzebnych do podejmowania decyzji o charakterze prawnym, administracyjnym i gospodarczym oraz pomocy w procesach planowania

i rozwoju. Poprzez teren rozumie się zbiór obiektów naturalnych, powstałych wskutek funkcjonowania sił przyrody oraz antropogenicznych, utworzonych w wyniku działalności człowieka. Materialne obiekty, będące przedmiotem zainteresowania SIT dzielą się na: powierzchniowe (naziemne), nadziemne i podziemne. Do SIT nie należą jednak systemy informacji społeczno-ekonomicznej (np. statystycznej) zaliczane do systemów informacji geograficznej. Schemat systemu informacji przestrzennej został pokazany na rys. 15.14.



Rys. 15.14. Schemat pozyskiwania, przetwarzania i udostępniania informacji przestrzennych

Najważniejsze *przesłanki działania SIT* obejmują między innymi następujące założenia:

1. Informacje katastralne uzyskiwane lokalnie będą stanowiły podstawę utworzenia systemu informacyjnego na poziomie poszczególnych regionów.
2. W powiatach powstaną komórki SIT zbierające dane otrzymywane z ogniw SIT w oparciu o jeden uporządkowany system zarządzający przepływem informacji.
3. Ogniwem podstawowym SIT ma być lokalny ośrodek dokumentacji geodezyjnej, do którego zadań należy między innymi prowadzenie ewidencji gruntów i budynków oraz mapy numerycznej.

Działania lokalne mające na celu stworzenie SIT mają jednak do tej pory charakter spontaniczny, nie ujęty w szersze ramy organizacyjne.

Urzędową definicję SIT w Polsce określa rozporządzenie Ministerstwa Gospodarki Przestrzennej i Budownictwa z r. 1992, według którego: "SIT jest formą organizacyjną kontrolowanego przepływu w państwie lokalizowanej przestrzennie, standaryzowanej informacji o właściwościach terenu, jego podziałach, sposobie wykorzystania i uprawnieniach osób władających składnikami jego zagospodarowania".

Ważnym elementem bazy danych SIT są podsystemy związane z geodezją i obejmujące: osnowę geodezyjną, mapę zasadniczą i mapy topograficzne, ewidencję gruntów, budynków i sieci uzbrojenia terenu.

Dane w systemach informacyjnych mogą występować w formie analogowej (ciągłej) lub cyfrowej (dyskretnej). Dane analogowe w postaci graficznej są tworzone z linii, znaków umownych (symboli), obrazów kolorowych lub czarno-białych o zmiennym tonie szarości (np. zdjęcia fotogrametryczne), natomiast dane cyfrowe zapisywane są za pomocą znaków (cyfr) należących do określonego zbioru np. w systemie dwójkowym występują tylko dwa znaki zero lub jeden.

15.9. Mapa numeryczna

W każdym systemie informacji przestrzennej najważniejszą rolę odgrywają mapy zarówno analogowe jak i numeryczne. Mapy analogowe, stanowiące dwuwymiarowy model rzeczywistości geograficznej, są wygodnym źródłem informacji, dobrze dostosowanym do odbioru przez użytkownika dużej ilości danych, jednak wadami mapy graficznej (kreskowej) są: obniżenie dokładności informacji w wyniku ich przetworzenia z postaci cyfrowej na analogową, utrata ich części spowodowana generalizacją mapy i trudność aktualizowania. Z tych względów docelową formą wymienionych wcześniej podsystemów jest ich wyposażenie w odpowiednie oprogramowanie i zastąpienie danych analogowych danymi w formie numerycznej. Z zagadnieniem mapy numerycznej ściśle wiąże się pojęcie *numerycznego modelu terenu* (NMT), będącego zbiorem danych cyfrowych, zawierającym informacje dotyczące powierzchni terenu na określonym obszarze.

Mapa numeryczna (cyfrowa, digitalna) jest mapą komputerową powiązaną z opisową bazą danych. W fachowej literaturze geodezyjnej podawane są różne definicje *mapy numerycznej*. J. Gaździcki* podaje dwa określenia:

1) „Mapa numeryczna jest numerycznym modelem rzeczywistości geograficznej przedstawionym w postaci graficznej lub numerycznej."
2) „Mapa numeryczna jest zbiorem danych stanowiącym reprezentację mapy graficznej, dogodną do przetwarzania komputerowego."

W instrukcji K-1 zamieszczone jest również wcześniej cytowane określenie numerycznej mapy zasadniczej: „Mapa zasadnicza w postaci numerycznej jest zasobem informacji o obiektach, stanowiących jej treść".

W oparciu o powyższe sformułowania pojęcia mapy numerycznej można wyróżnić jej następujące cechy:

1. Mapa numeryczna stanowi zespół informacji o terenie w określonym systemie informatycznym, służącym do prowadzenia, archiwizowania, aktualizacji i dystrybucji zasobu geodezyjnego przetworzonego do postaci cyfrowej.
2. Informacje systemowe dotyczą obiektów, składających się na treść mapy.
3. Położenie obiektów jest określone za pomocą współrzędnych prostokątnych, zaś rodzaj obiektu za pomocą przypisanego mu *kodu*. Szczególne właściwości obiektu mogą być określone przez jego *atrybuty* w formie dodatkowych kodów lub identyfikatorów.
4. W systemie informatycznym mapy numerycznej znajdują się algorytmy przetwarzania informacji w postaci programów umożliwiających ustalenie matema-

* Jerzy Gaździcki „Systemy informacji przestrzennej"; PPWK Warszawa – Wrocław 1990.

tycznych podstaw konstrukcji mapy (skali, odwzorowania, stopnia generalizacji, doboru treści, aktualizacji itd.).

Mapa numeryczna bardzo ułatwia pobieranie danych i proces projektowania, a ponadto stanowi geometryczną podstawę do tworzenia innych systemów informatycznych, opartych na obiektach zawartych na tej mapie. Rysunek mapy obiektowej jest podzielony na poszczególne obiekty, złożone z elementów geometrycznych, takich jak: punkty, linie i wieloboki.

Kod obiektu jest symbolem alfanumerycznym stanowiącym atrybut służący do określenia rodzaju obiektu. Dla uściślenia jego cech dodatkowym atrybutem może być także *identyfikator obiektu*, który pozwala na jego jednoznaczną identyfikację w zbiorze obiektów tego samego rodzaju (np. obiekt: działka, identyfikator: numer działki). Symbole kodów stosowanych podczas rejestrowania obserwacji mogą być zgodne z instrukcją K-1 (porównaj ust. 15.4.9) lub ustalone indywidualnie przez wykonawcę prac geodezyjnych. Celem kodowania jest identyfikacja zdejmowanego punktu lub obiektu, co w procesie edycji mapy pozwala na przypisaniu obiektom punktowym określonych znaków umownych podanych w instrukcji. Uproszczony szkic polowy służy w tym wypadku do wskazania połączeń poszczególnych pikiet podczas automatycznego kreślenia przez ploter obiektów liniowych i linii konturowych szczegółów powierzchniowych.

Zapis numeryczny dotyczący określonej kategorii obiektów zdefiniowanych tematycznie lub geometrycznie nosi nazwę *warstwy tematycznej mapy*. Rozwarstwienie jej rysunku znacznie usprawnia proces tworzenia mapy numerycznej. Obiektami mapy numerycznej można łatwo zarządzać, dzięki czemu ułatwiona jest aktualizacja z jednoczesnym zachowaniem poprzedniej wersji mapy. Na pojedynczej warstwie tematycznej mapy numerycznej może być przedstawiona określona kategoria obiektów np. budynki, działki, elementy uzbrojenia terenu itp. przypomina to graficzną mapę zasadniczą którą można tworzyć na różnych nakładkach. Warstwa ma przypisane określone cechy np. grubości i kolory wykreślanych linii oraz inne specyficzne atrybuty. Warstwy można włączać lub wyłączać, dzięki czemu można oglądać i drukować różne elementy treści razem lub oddzielnie. Dla rozwarstwienia rysunku w określonym programie tworzenia mapy numerycznej trzeba najpierw utworzyć warstwy i nadając im nazwy np. *BUDYNKI*, *GRANICE* itp., a po wybraniu nazwy warstwy, umieścić na niej odpowiednie elementy rysunku. Ważną operacją jaką umożliwiają warstwy jest ukrycie części rysunku pozwalające na uzyskanie lepszej czytelności pozostałych elementów treści mapy. Warstwy można usuwać lub zmieniać ich nazwy. Umożliwia to filtrowanie informacji zawartych na mapie i jej wydrukach oraz ułatwia edycję jej rysunku. Istnieje też możliwość kasowania i edycji poszczególnych warstw, przenoszenia z nich rysunków, a następnie ich zmontowanie w jedną całość.

Mapa numeryczna może być uzyskana z następujących źródeł:

- z pomiarów bezpośrednich,
- na drodze teledetekcji lub fotogrametrii cyfrowej ze zdjęć naziemnych, lotniczych lub satelitarnych,
- poprzez przetworzenie aktualnie istniejących map analogowych w wyniku digitalizacji lub wektoryzacji po zeskanowaniu rysunku mapy pierwotnej.

W stosunku do tradycyjnej mapy graficznej mapa numeryczna wykazuje następujące zalety:

- przyspieszenie i automatyzacja cyklu opracowania mapy,

- zachowanie dokładności pomiarowej z możliwością wykonania w dowolnym czasie z przetworzonych danych terenowych wielu obliczeń np. długości, pól, objętości itp., pozbawionych błędów pomiaru graficznego,
- automatyzacja prac związanych z wykonaniem na ploterze mapy graficznej, uwalniająca powstały rysunek od błędów osobowych kartowania i kreślenia,
- możliwość szybkiego sporządzania map w dowolnej skali, map tematycznych i rozwarstwienia mapy w celu wykonania nakładek tematycznych,
- odtwarzanie historii tworzenia mapy lub jej fragmentów,
- łatwość zmiany opisów, cech graficznych rysunku mapy, aktualizacji i generalizacji z jednoczesną możliwością zachowania wersji pierwotnych,
- brak wpływu deformacji podkładu i niezmienność w czasie informacji terenowych zapisanych w nośnikach pamięci,
- możliwość wielokrotnego drukowania mapy graficznej w dowolnej postaci i kroju arkuszowym,
- uproszczenie tworzenia map pochodnych,
- możliwość edycji mapy w dowolnym układzie odniesień przestrzennych,
- ułatwienie podejmowania decyzji przez władze administracyjne i samorządowe w oparciu o dostępne i wiarygodne dane uzyskane z mapy numerycznej.

Warunkiem koniecznym do sprawnego przeprowadzania bieżącej aktualizacji zasobu geodezyjnego i mapy numerycznej jest wykonywanie dokumentacji, będącej efektem prac geodezyjnych w formie numerycznej, czyli plików zapisanych na komputerowych nośnikach pamięci.

Model danych przestrzennych w postaci numerycznej może być przedstawiony w wersji wektorowej lub rastrowej. *Digitalizacja* (ucyfrowienie) jest procesem przekształcenia mapy z postaci graficznej na postać cyfrową. W przypadku digitalizacji punktowej, określanej także mianem wektoryzacji bezpośredniej, konwersja ta polega na odczytaniu współrzędnych punktów z arkusza mapy analogowej , a następnie ich cyfrowej rejestracji w pamięci komputera.

Skanowanie opiera się na zamianie w urządzeniu zwanym skanerem rysunku analogowego na rastrową postać cyfrową i zapisaniu go w pamięci komputera. Rysunek rastrowy może być zapisywany w różnych formatach o symbolach: *bmp., jpg., gif,* stanowiących oznaczenia rozszerzeń nazw plików graficznych. Następnie zeskanowane rysunki rastrowe mogą być poddawane wektoryzacji, zwanej wektoryzacją pośrednią, dokonywanej nie na podkładzie mapowym, lecz na ekranie monitora. Możliwe jest także wstępne zeskanowanie map do postaci rastrowej, a następnie dokonanie automatycznej wektoryzacji obiektów przy użyciu odpowiedniego sprzętu i oprogramowania.

Grafika wektorowa składa się z linii prostych i krzywych, zdefiniowanych przez obiekty matematyczne zwane wektorami, które opisują grafikę w kategoriach jej charakterystyki geometrycznej. Wektory są parami lub trójkami liczb rzeczywistych. Punkt początkowy wektora definiuje jego położenie w przestrzeni, natomiast wektor definiuje kierunek (lub przesunięcie) w przestrzeni. Jeśli na przykład w programie wektorowym chcemy narysować koło o określonych wymiarach, to program graficzny tworzy je na podstawie wartości jego kształtu i rozmiaru. Narysowany obiekt można przesuwać, zmieniać jego wielkość i kolor, a rysunek nie traci przy tym na jakości. Cechą charakterystyczną grafiki wektorowej jest jej niezależność od rozdzielczości, co oznacza, że rysunek nie jest określany przez stałą liczbę pikseli i jest zawsze odtwarzany

z maksymalną rozdzielczością dowolnego urządzenia wyjściowego. Z tego powodu grafika wektorowa najlepiej nadaje się do tworzenia map zawierających rysunki i teksty o ściśle określonych wymiarach. Ekrany monitorów komputerowych składają się z siatki pikseli, toteż rysunki wektorowe są na nich eksponowane w formie pikseli. *Mapa wektorowa* dzięki systemom wspomagającym, czyli programom gromadzącym informacje o obiektach mapy, takich jak: współrzędne punktów tworzących na mapie poszczególne obiekty, ich atrybuty, sposób dokonywania połączeń punktów itp. Mapy wektorowe powstają zwykle na podstawie bezpośrednich pomiarów geodezyjnych.

W odróżnieniu od map wektorowych *mapy rastrowe* są z reguły uzyskiwane ze skanowania zdjęć fotogrametrycznych albo sporządzonych wcześniej map graficznych. Obrazy rastrowe składają się z prostokątnej siatki małych kwadratów lub kropek zwanych *pikselami*. Plik obrazu musi zawierać informację o rozdzielczości *dpi* (liczba punktów na cal). W tradycyjnej technice druku, *raster* jest przezroczem, na którym znajduje się jednolity, powtarzalny rysunek drobnych elementów geometrycznych, złożony z punktów, linii, lub desenia, tworzących układ punktowy, liniowy lub siatkę o różnej gęstości. Natężenie procentowe rastra jest stosunkiem powierzchni pod rysunkiem do pozostałej powierzchni podłoża.

Rastry służą w druku do tworzenia zmiennych tonów ilustracji i rysunków przekształcając tony ciągłe na elementy drukujące rastra, dające przy tym iluzję tonów ciągłych. Siatka rastra składa się z elementów limitujących ilość farby drukarskiej nałożonej w określonym miejscu podłoża. Zmiana tej ilości i gęstości rastra stanowi złudzenie zmienności tonu szarości lub ciągłości koloru. Dodatkowe efekty wizualne można też uzyskać przez nałożenie rastrów na siebie.

Wektoryzacja istniejących map jest powszechnie stosowaną praktyką podczas zakładania pierwszych map numerycznych. Wady tej wektoryzacji wynikają z błędów podkładu wyjściowego i niedokładności samego procesu, takich jak: deformacje podłoża mapowego, niedokładność ręcznej digitalizacji, błędy urządzeń do digitalizacji lub skanowania, zniekształcenia geometrii rastrów oraz kalibracji ich struktur.

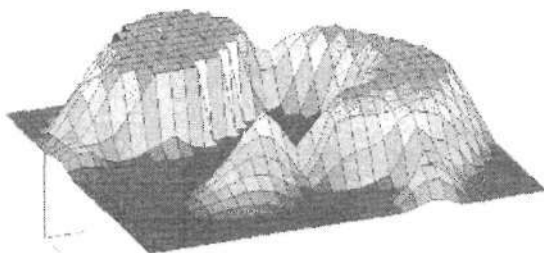
Możliwość wektoryzacji mapy rastrowej jest przeważnie wykorzystywana do uzupełniania niekompletnej treści mapy numerycznej o obiekty znajdujące się na mapie graficznej. Najczęściej przypadek ten ma miejsce wtedy, gdy numeryczna mapa ewidencji gruntów, zawierająca naniesione ze współrzędnych punkty wyznaczające granice działek, musi być uzupełniona o szczegóły występujące na graficznej mapie zasadniczej takie jak: budynki, elementy uzbrojenia terenu itp. W popularnym programie „Mikromap" firmy Coder służy do tego celu menu *Raster*, umożliwiający wstawienie na rysunek wektorowy rysunku rastra w formacie *bmp*, czyli tzw. *bitmapy*, pochodzącej z zeskanowanego rysunku mapy graficznej (funkcja *Dodaj*). Dla uzyskania kartometrycznego rysunku należy w ramach funkcji *Kalibracja* poddać raster przekształceniu opartym na transformacji Helmerta lub afinicznej (por. rozdz. 11). Kalibracja polega na wskazaniu myszką na mapie wektorowej i wklejonym do niej rysunku rastra odpowiadających sobie par punktów dostosowania, zidentyfikowanych na obu mapach. Na punkty te najlepiej nadają się oznaczone krzyżykami przecięcia linii siatki kwadratów. Na skalibrowanym rastrze można odczytywać współrzędne wybranych punktów, rysować linie lub wstawiać obiekty i symbole, przez co można zastąpić rysunek rastrowy rysunkiem w doskonalszej postaci wektorowej.

Systemy informacji przestrzennej zawierają bardzo dużą ilość danych przestrzennych, toteż dla sprawnego ich przetwarzania i właściwej aproksymacji powierzchni topo-

graficznej konieczne jest przyjęcie *numerycznego modelu terenu* (NMT)*, stanowiącego numeryczną reprezentację tej powierzchni, złożoną z odpowiedniej liczby punktów charakterystycznych oraz algorytmów interpolacyjnych, pozwalających na odtworzenie kształtu powierzchni terenu na zadanym obszarze.

Dzięki NMT możliwe jest obliczenie wysokości dowolnego punktu *P* o zadanych współrzędnych płaskich *X, Y* na podstawie znanego położenia przestrzennego innych punktów znajdujących się w otoczeniu punktu *P*. Umożliwia to dalsze sposoby wykorzystania NMT takie jak: kreślenie linii warstwic na powierzchni modelu, wyznaczanie profilów terenu zadanymi płaszczyznami pionowymi, obliczanie objętości wybranych form, wyznaczenie położenia punktu przebicia powierzchni terenu przez daną prostą, wyznaczanie spadków terenu, linii szkieletowych, tworzenie trójwymiarowych rysunków powierzchni terenu itp.

Model terenu powstaje w oparciu o zbiór znanych punktów terenowych, których położenie określono na podstawie istniejących map, bezpośrednich pomiarów geodezyjnych (np. niwelacji powierzchniowej lub tachimetrii) lub opracowań fotogrametrycznych. W zależności od rodzaju podstawowego elementu geometrycznego modele dzielą się na: punktowe, liniowe i powierzchniowe, natomiast ze względu na sposób rozmieszczenia tych elementów można wyróżnić modele: regularne i nieregularne. Model regularny może być utworzony za pomocą siatki kwadratów, która wyznacza współrzędne *X, Y* punktów węzłowych modelu, dla których następnie określane są wysokości *Z*. Model nieregularny może powstać jako siatka trójkątów, których wierzchołki stanowią punkty pomierzone podczas niwelacji powierzchniowej lub tachimetrii.



Rys. 15.15. Ilustracja graficzna numerycznego modelu terenu

Tworzenie i wykorzystywanie NMT jest obszernym zagadnieniem omawianym szczegółowo na wykładach z przedmiotów z zakresu informatyki geodezyjnej.

Współczesne instrumenty pomiarowe takie jak: tachimetry elektroniczne, teodolity i niwelatory cyfrowe, odbiorniki GPS zapewniają możliwość zautomatyzowania prac polowych i rejestracji wyników w pamięci wewnętrznej lub zewnętrznej, zaś dzięki wbudowanym mikroprocesorom mogą także dokonywać wstępnej obróbki danych i dalszego przekazywania informacji, dając w ten sposób możliwość utworzenia ciągu technologicznego obejmującego: pomiar, rejestrację wyników, transmisję danych do ich dalszego przetwarzania na zmodyfikowaną postać cyfrową za pomocą komputera, a następnie wydrukowanie opracowań w postaci tekstowej lub graficznej przy pomocy drukarki albo plotera.

* Numeryczny model terenu określany jest także skrótem DTM pochodzącym od wyrażenia angielskiego *digital terrain model*.

Technika GPS jest obecnie często stosowana do zakładania osnowy szczegółowej i pomiarowej, której punkty mogą być następnie wykorzystane jako stanowiska tachimetrów elektronicznych. Aktualnie tachimetry elektroniczne są podstawowymi przyrządami do pomiaru kątów, odległości, różnic wysokości oraz zdejmowania szczegółów sytuacyjnych metodą biegunową i trygonometrycznego niwelowania punktów wysokościowych z jednoczesną automatyczną rejestracją danych pomiarowych. Pozwala to na wyeliminowanie w terenie konieczności dokonywania odręcznych zapisów w dziennikach polowych, zaś dzięki kodowaniu zdejmowanych pikiet ogranicza do niezbędnego minimum prowadzenie szkiców terenowych.

Mariusz Zygmunt

15.10. „Mapa Kontekstowa" – program do tworzenia map numerycznych

15.10.1. Wprowadzenie

Programy komputerowe przeznaczone do wykonania map numerycznych stanowią przeważnie nakładki branżowe oparte na edytorach graficznych typu CAD*. Jednym z nich jest *MicroStation* firmy Bentley, który jako program podstawowy stanowi platformę programową dla innych aplikacji systemu. MicroStation jest w pełni zintegrowanym programem typu CAD/GIS, posiadającym zaawansowane funkcje graficzne (zarówno wektorowe, jak i rastrowe), przeznaczone dla inżynierów i twórców różnych wariantów programu. Funkcje dostępne w produkcie standardowym, jakim jest MicroStation, pozwalają na efektywne wykorzystanie tego pakietu do celów tworzenia systemów informacji przestrzennej, a w szczególności do opracowania map. Dodatkowo system może być wzbogacany w indywidualne programy i funkcje dostosowane do potrzeb użytkownika. W Polsce wykorzystywanych jest wiele pakietów programów i systemów służących do tworzenia map numerycznych np. DIGIMAP, NOBEL, GEO-MAP, LANDMAP, EWMAPA, GEO-INFO i in.

Program *Mapa Kontekstowa 2000* (*MK2000*), napisany przez mgr inż. Mariusza Zygmunta (pracownika naukowego Katedry Geodezji A.R. w Krakowie), jest nakładką programową, służącą do tworzenia mapy numerycznej, ulokowaną w środowisku programowania MicroStation i pracuje wyłącznie pod nadzorem tego systemu. MK2000 umożliwia opracowanie mapy numerycznej sytuacyjno-wysokościowej, ewidencji gruntów oraz uzbrojenia terenu, zgodnie z wymogami instrukcji K-1 z 1998 r. Program posiada także moduły do geodezyjnej obsługi inwestycji, obliczenia objętości mas ziemnych, rysowania profilów terenu, projektowania podziałów działek oraz generowania warstwic.

Geodezja Echo Help
Rejestracja MK2000
Kartowanie punktów
Mapa zasadnicza
Budynek
Skarpa
Warstwice
Wysokości
Ewidencja
Obsługa inwestycji
Masy ziemne
Profile
Pomiary
Raster
Nawigator
System Intel. Menu
Przeskalowanie
Dekoder
Konwerter DXF
Konwerter DGN
Opisy
Palety kolorów

Rys. 15.16. Zestaw funkcji w menu „Geodezja"

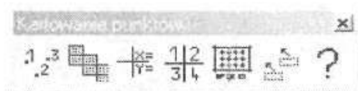
* Oznaczenie CAD stanowi skrót od *Computer Aided Design*, - projektowanie wspomagane przez komputer i obejmuje łącznie: metody, oprogramowanie i sprzęt, przeznaczone do projektowania w różnych dziedzinach techniki.

Problematyka zamieszczona w ust. 15.10 dotyczy samych pomiarów sytuacyjno-wysokościowych, natomiast obszerniejsze informacje na temat zastosowań programu MK2000 można uzyskać na stronie internetowej www.mk2000.cad.pl

Całość opracowania mapy prowadzona jest w jednym pliku rysunkowym o rozszerzeniu *dgn*, w którym dostępne są liczne warstwy (do 63 warstw). W systemie zaproponowanym przez autora programu MK2000 wyróżnikiem obiektu jest warstwa, kolor linii oraz jej styl. Całość treści mapy zawarta jest natomiast na dziewięciu warstwach odpowiadających grupom kodów liczbowych instrukcji K-1 zamieszczonych wcześniej w tabeli 15.7.

Po zainstalowaniu systemu MK2000 w środowisku MicroStation na górnej belce narzędziowej ukazuje się dodatkowa specyficzna sekcja menu o nazwie <Geodezja>, w której zamieszczony jest zestaw funkcji pokazany na rys. 15.16. Na wybór określonej funkcji menu program reaguje pokazaniem paska narzędzi, pola wyboru lub wykonaniem odpowiedniego polecenia w zależności od wykorzystanej opcji.

15.10.2. Funkcje paska narzędzi „Kartowanie punktów"



Rys. 15.17. Przyciski paska narzędzi „Kartowanie punktów"

System MK 2000 spełnia istotny wymóg programu do tworzenia mapy numerycznej, jakim jest możliwość współpracy z programami obliczeniowymi. Dane z rejestratora lub programu obliczeniowego są wprowadzane do systemu MK2000 za pośrednictwem plików tekstowych (*txt*), zawierających współrzędne *X*, *Y* i ewentualne wysokości *Z* pomierzonych punktów. Dane w pliku *txt* muszą tworzyć format „Nr X Y [Z]", przy czym jako separatora należy użyć spacji. Po przeniesieniu pliku tekstowego do bazy danych znajdującej się w programie, każdy punkt posiada swą reprezentację w przestrzeni roboczej rysunku MicroStation w postaci kropki lub kółka oraz numeru. Na miejsce punktu można wprowadzić symbol lub dowolny znak graficzny (celę).

Pasek narzędzi Kartowanie punktów (rys. 15.17) zawiera siedem przycisków wywołujących okna dialogowe i pola wyboru następujących poleceń, stanowiących narzędzia do przenoszenia punktów i wstępnego opracowania mapy:

1) przenoszenie punktów z pliku *txt* do MK2000,
2) wstawianie sekcji,
3) opisy krzyży siatki,
4) wstawienie godła arkusza,
5) wstawienie ramki sekcyjnej,
6) obracanie napisów,
7) pomoc (*help*).


Przenoszenie pikiet zapisanych w pliku tekstowym do rysunku MicroStation

Program przenosi dane z pliku tekstowego do istniejącego bądź nowego pliku MicroStation (po otwarciu pliku), zachowując wielkości ustawione wcześniej w oknie „Parametry", które ukazuje się po naciśnięciu przycisku 1 palety pokazanej na rys. 15.16. Wielkości takie jak: promień kółka i wysokość opisu pikiety wyrażone w milimetrach zostają zachowane po wydrukowaniu mapy w danej skali. Ustawieniom w polu „Parametry" podlegają następujące elementy:

Punkt/Cela – opcja odpowiada za ustalenie znaku kartowanego punktu (kropka lub kółko) albo celi (znaku umownego w postaci symbolu) z podłączonej biblioteki. Blokada zabezpiecza element przed niezamierzoną modyfikacją.

Cela z podłączonej biblioteki – gdy opcja ta jest aktywna, tj. obok polecenia Wczytaj celę wprowadzi się znaczek ☑, wtedy po wpisaniu w okienku Cela numeru znaku umownego instrukcji K-1, następuje pobranie symbolu z biblioteki znaków umownych i wrysowanie go na mapie.

- ☑ Grupa graficzna – aktywizacja opcji znaczkiem ☑ powoduje, że obiekt, punkt lub cela łączony jest z tekstem w grupę graficzną.
- ☑ Kartuj Z=0 – zaznaczenie tej opcji znaczkiem ☑ powoduje kartowanie tych punktów z pliku txt, których rzędne są zerowe.
- ☑ Kartuj do wieloboku, gdy opcja ta jest włączona, to kartowanie odbywa się do wskazanego obiektu zamkniętego (np. wieloboku).
- ☑ Zapisz ustawienia –gdy klikniemy w pustym kwadraciku znaczek ☑, wówczas zapisywane są aktualne ustawienia programu.
- ☑ Wczytaj – naciśnięcie przycisku [Nr X Y ▾] pozwala na wybór zespołu danych wczytywanych na mapę, dzięki czemu można wprowadzać na rysunek numery pikiet oraz ich wysokości z wybraną ilością miejsc po przecinku.
- ☑ Konwersja – ustalenie typu układu współrzędnych dla punktów z pliku tekstowego do konwersji na układ MicroStation (z poziomą osią x).
- ☑ Skala 1: [1000 ▾] – wybór mianownika skali mapy z listy rozwijalnej.
- ☑ **Tekst** – fragment pola wyboru Parametry, dotyczący parametrów opisów wprowadzanych na mapę takich jak: kolor, grubość itd.

Rys. 15. 18. Pole wyboru zawierające parametry przeniesienia współrzędnych punktów z pliku txt do rysunku MicroStation

Spacja + przesunięcie są wielkościami ustalającymi położenie opisu względem pikiety.

- ☑ dx, dy – określają dla danej skali przesunięcie w mm opisu względem pikiety.
- ☑ dx=dy=0, gdy opcja ta jest aktywna, wówczas przesunięcia *dx, dy* są zerowe, czyli opis umieszczany jest w punkcie wstawienia pikiety.
- ☑ Dodaj spację – przed wprowadzanym na mapę tekstem dodawana jest spacja, powodująca wizualne oddzielenie opisu od pikiety z zachowaniem położenia punktu wstawienia.

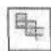
Rys. 15.19. Wybór pliku za pomocą drzewa katalogów

☑ AA=0 – uruchomienie opcji powoduje, że opisy kartowanych pikiet są ustawione poziomo. Wyłączenie znaczka ☑ przed kartowaniem wywołuje pytanie dotyczące ustalenia aktywnego kąta opisu.



Rys. 15.20. Ustalenie parametrów podziału mapy na sekcje

Po zatwierdzeniu wybranych parametrów przyciskiem OK pokazuje się menu wyboru plików do kartowania (rys. 15.19). Program niezależnie od opcji pamięta ostatni katalog, a także ułatwia wybór pliku poprzez ustalenie jednego z pięciu sposobów filtrowania danych. Podczas ich importu z systemu GEONET pomijane są wiersze zawierające same zera.



Podział obszaru kartowania na arkusze sekcyjne w układzie „1965" lub w układach lokalnych

Po naciśnięciu przycisku 2 (rys. 15.17) program dzieli mapę na arkusze w układzie współrzędnych geodezyjnych poprzez wskazanie dowolnego punktu w obrębie rysunku.

Sekcja – ustawienie to definiuje parametry wstawianej ramki sekcyjnej:

- ☑ Wstaw krzyże – po włączeniu opcji wstawiana jest siatka kwadratów w postaci krzyżyków. Po wyłączeniu opcji wstawiana jest tylko ramka sekcyjna.
- ☑ Wstaw ramkę – powoduje wstawienie ramki sekcyjnej. Po wyłączeniu opcji wstawiana jest tylko siatka krzyży.
- ☑ Lok. Warszawy – dzieli na arkusze w układzie lokalnym
- ☑ Skala – definiuje skalę mapy i zasięg wstawianej ramki sekcyjnej.



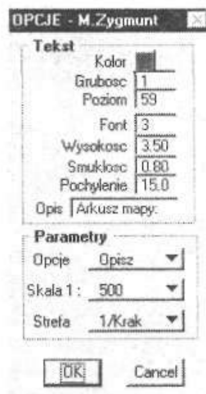
Rys. 15.21. Ustalenie parametrów opisu siatki kwadratów



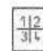
Wprowadzenie opisu współrzędnych na siatkę krzyży

Poprzez wskazanie otoczenia wybranego krzyża program dokonuje automatycznego opisu siatki krzyży współrzędnymi. W zależności od wskazanego miejsca wstawienia napis dla zadanej skali zostaje umieszczony po prawej lub lewej stronie krzyża.

- Przedrostki opisu – dodatki do opisu współrzędnych krzyża np. „X=; Y=".
- Skala – automatyczne przyporządkowanie współrzędnych przecięć linii siatki i ich opis obok odpowiednich krzyży dla wybranej skali.
- Dokładność – wymagana ilość miejsc z jaką zostaną opisane współrzędne linii siatki.
- Tekst – parametry formatu opisów krzyży siatki.



Rys. 15.22. Formatowanie opisu godła arkusza



Opisanie godeł arkuszy na sekcjach mapy, sekcyjny podział obszaru na pliki

Opcja ta jest dostępna po naciśnięciu przycisku 4 (rys.

15.17). Program wpisuje godła arkuszy na poszczególnych sekcjach mapy, a także „wycina" z opracowywanego obszaru pojedyncze sekcje w celu ich zapisania w formie oddzielnych plików rysunkowych. Najpierw pokazywane jest godło, po czym program oczekuje na ustalenie położenia punktu wstawienia godła na obszarze sekcji.

Tekst – opcja definiująca elementy formatu opisu godła.

- Opis – dodatkowy napis umieszczany przed godłem.

Parametry:

- Opcje. Na liście rozwijalnej dostępne są następujące opcje:
  - Opisz – opis wybranego arkusza,
  - Info – tylko informacja, bez wstawiania godła,
  - Plik – „wycięcie" z opracowywanego obszaru pliku sekcji i zapisanie go jako oddzielnego rysunku. Po zapisaniu następuje przekreślenie wybranej sekcji celem zaznaczenia. Nazwę pliku stanowi godło bez trzech pierwszych cyfr tj. numeru strefy, pasa i słupa.
- Skala – skala związana z godłem arkusza.
- Strefa – numer strefy odwzorowania kartograficznego opracowywanego obszaru w układach: „1965" (1-5) lub lokalnym.



Wykonanie opisów pozaramkowych

Po uruchomieniu polecenia „Opis pozaramkowy" za pomocą przycisku 5 (rys. 15.17) ukazuje się okno dialogowe w postaci tabeli z komórkami do wypełnienia, odpowiadającymi poszczególnym polom opisów pozaramkowych, do których wpisujemy teksty opisów. Na rys. 15. 23 zamieszczono przykładowe wpisy zaczerpnięte z wzoru podanego w instrukcji K-1 (wydanie z r. 1978), pokazanego na rys. 15.24.

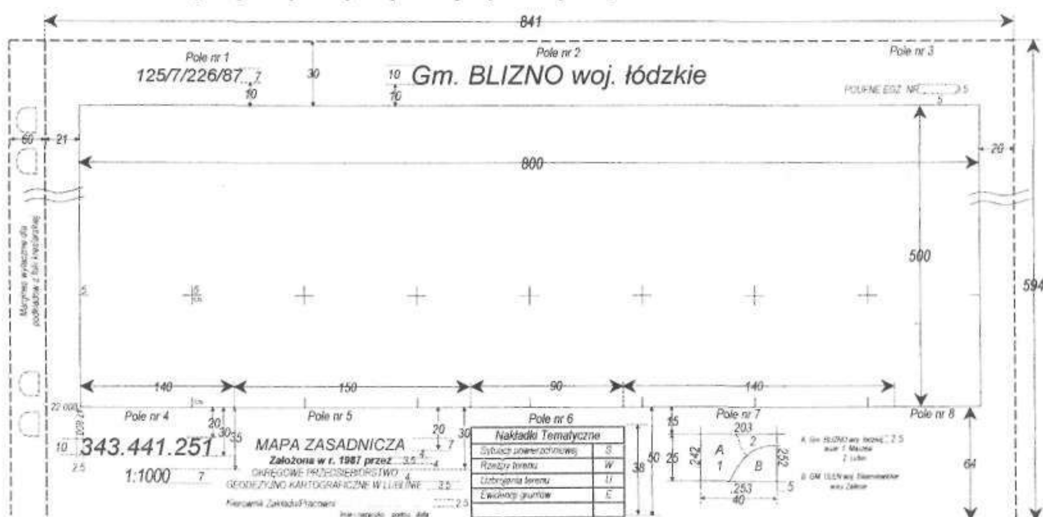
Rys. 15.23. Okno dialogowe z polami do wprowadzania opisów pozaramkowych

Okno pokazane na rys. 15.23 umożliwia zredagowanie opisów pozaramkowych poprzez ustalenie ich formatu i wpisanie odpowiednich tekstów za pomocą klawiatury w poszczególnych polach tego okna. Należy między innymi określić skalę sekcji, strefę układu współrzędnych.

Program umożliwia edycję opisu pozaramkowego, zapisanie go na dysku i odczyt, (przyciski: Odczyt i Zapis) oraz założenie nowego arkusza sekcyjnego przez wskazanie na mapie punktu wstawienia arkusza (przycisk Punkt) lub wpisanie jego godła (przycisk Godło). Opcja Dodatki służy do automatycznego wstawienia w odpowiednim polu znaku firmowego wykonawcy mapy np. pieczątki firmowej pod warunkiem założenia pod nazwami Firma 1, Firma 2, Firma 3 odpowiedniej celi graficznej. Funkcja Obrys powoduje wydruk narożników potrzebnych do obcięcia wydrukowanego arkusza mapy zgodnie z formatem ustalonym w instrukcji K-1.

Dwa ostatnie przyciski 6, 7 palety narzędziowej „Kartowanie punktów" to:

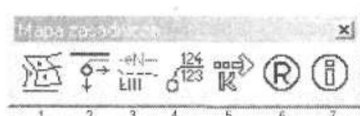
- przycisk **obrotu tekstu** wyświetlający okienko do ustawiania wartości kąta obrotu napisów wokół punktu ich wstawienia,
- przycisk **pomocy** (*Help*) ? wywołujący plik porad, który zawiera krótki opis funkcji wywoływanych przez przyciski palety.



Rys. 15.24. Rozmieszczenie opisów pozaramkowych na arkuszu sekcji mapy zasadniczej

15.10.3. Funkcje paska narzędzi „Mapa zasadnicza"

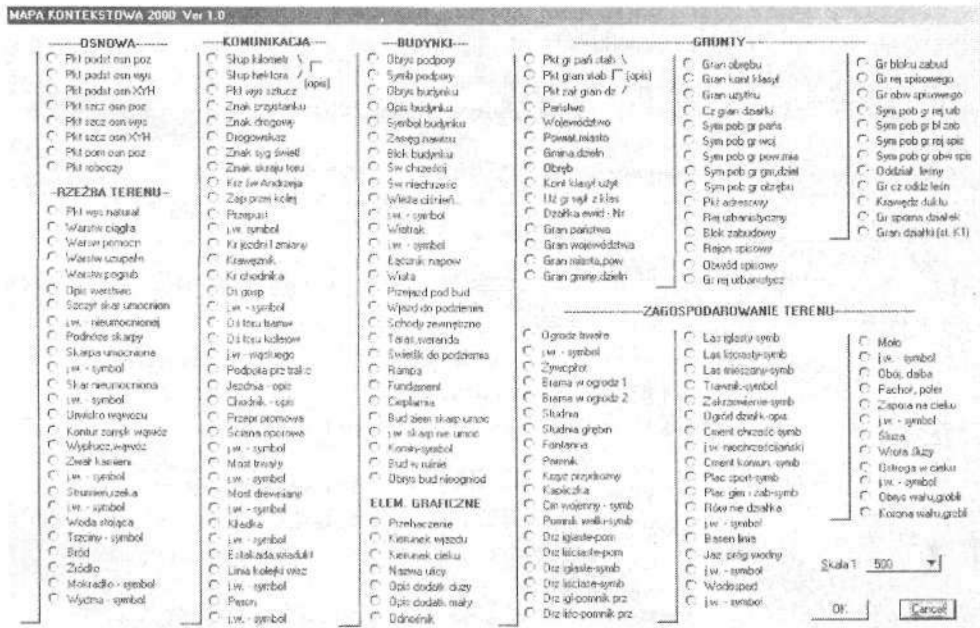
Podczas tworzenia mapy numerycznej przy pomocy programu MK 2000 pasek narzędzi **Mapa zasadnicza** (rys. 15.25) z siedmioma przyciskami jest podstawową paletą roboczą. Znaczenie tych przycisków jest następujące:



Rys. 15.25. Pasek narzędzi „Mapa zasadnicza"

„Sytuacja" . Po kliknięciu myszką na przycisku 1 następuje otwarcie okna zawierającego pogrupowane tematycznie nazwy szczegółów sytuacyjnych przedstawianych na mapie zasadniczej. Wybór obiektu i jednocześnie znaku umownego (symbolu) wprowadzanego na mapę następuje po

zaznaczeniu ciemnego punktu wewnątrz pustego kółka ⊙ przy wybranej nazwie szczegółu (rys. 15.26).



Rys. 15.26. Okno „Sytuacja" przeznaczone do wyboru szczegółów wprowadzanych na mapę

„Uzbrojenie terenu" . Po uruchomieniu przycisku 2 ukazuje się okno „Armatura", w którym podobnie jak w oknie „Sytuacja" można zaznaczać ⊙ i wprowadzać na mapę wybrane elementy uzbrojenia.

„Opisy przez wskazanie" Opcja aktywizowana przyciskiem 3 służy do opatrzenia opisem obiektu wskazanego na mapie.

„Opisy rzędnych" Funkcja wywoływana przyciskiem 4 jest przeznaczona do wykonania opisów wysokości (rzędnych) punktów charakterystycznych rzeźby i innych obiektów wskazanych na mapie.

„Kontynuuj przez wskazanie" Po naciśnięciu przycisku 5 można dokonać kontynuacji rysowania obiektu na wzór innego obiektu wskazanego na mapie. Zachowywane są przy tym wszystkie elementy formatu wskazanego obiektu.

„Powtórz ostatnią komendę" Przycisk 6 jest używany do powtórzenia ostatnio wykonanej czynności bez potrzeby korzystania z menu. Funkcja ta jest pomocna podczas powtarzania czynności edycyjnych takich jak: usuwanie, przemieszczanie itp. lub zamiarze kontynuowania przerwanego zadania.

„Informacja o obiekcie"  Przycisk 7 działa po wskazaniu na mapie kursorem wybranego obiektu i na pasku zadań, zgodnie z oznaczeniami z instrukcji K-1, podaje etykietę zawierającą: kody obiektu, symbol, przynależności do określonego rodzaju treści (obligatoryjna/fakultatywna) i opis słowny (rys. 15.25).

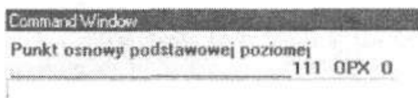
312 BUD O Budynek

Rys. 15.27. Etykieta obiektu

Menu „Sytuacja"

Po wybraniu odpowiedniego szczegółu poprzez zaznaczenie myszką punktu w kołowym okienku ⊙ i zaakceptowaniu wyboru przyciskiem OK program przechodzi do edycji na mapie wskazanego elementu. Okno „Sytuacja" znika, ukazując mapę i kursor w kształcie krzyża, którym można wprowadzić szczegół na mapę.

Podczas procesu edycji każdy element wywołany z menu jest opisywany w polu komend (rys. 15.28), zawierającym nazwę obiektu, kod liczbowy i literowy oraz oznaczenie *O* lub *F* (element obligatoryjny lub fakultatywny treści mapy zasadniczej). Na pasku zadań program wyświetla podpowiedzi, którymi w odpowiednim momencie przypomina o konieczności wykonania niezbędnej czynności np. wskazania obiektu. Elementy graficzne, które występują na mapie wraz z atrybutami opisowymi są uzupełniane o edycję nazw natychmiast po ich wstawieniu. Odnosi się to do np. punktów osnowy. Wariantowo w tę możliwość zostały wyposażone niektóre obiekty np. słup kilometrowy i hektometrowy oraz punkty graniczne.



Rys. 15.28. Okienko informacyjne z nazwą i kodem edytowanego obiektu

Menu „Uzbrojenie terenu"

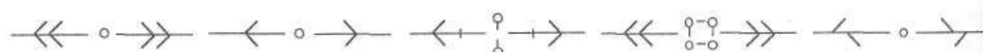
Pole wyboru „Uzbrojenie", wywoływane przyciskiem 2 (rys. 15.25), jest obsługiwane analogicznie jak menu „Sytuacja". Okno to dzieli się na trzy sekcje:

1. Sekcja ARMATURA (rys. 15.30) służy do wyboru odpowiedniego elementu uzbrojenia, który chcemy przenieść na mapę.
2. Sekcja POŁĄCZ ATRYBUTY ma za zadanie łączenie liniami przewodów obiektów wprowadzonych na mapę za pośrednictwem sekcji ARMATURA.
3. Sekcja AUTO-SŁUP służy do dokonania połączeń symboli słupów liniami przewodów napowietrznych.

Zestaw czterech przycisków zawartych w sekcji AUTO-SŁUP jest narzędziem do oznaczania i ustawiania symboli kierunków linii napowietrznych łączących słupy, które mogą składać się z określonej ilości podpór w zakresie od 1 do 4. W zależności od kształtu przekroju podpory są zaznaczane na mapie w postaci kółek lub kwadracików wraz z symbolami kierunku linii napowietrznej (rys. 15.29).

W zależności od ilości podpór moduł zakłada tzw. *punkty kluczowe*, do których będzie przyciągany symbol linii napowietrznej niezależnie od punktu wstawienia podpory. Obszar symboli podpór słupa jest dzielony na określoną ilość punktów kluczowych. Dla słupa pojedynczego (z jedną podporą) jest tylko jeden punkt kluczowy w środku podpory. Dla słupów o dwóch podporach punktów kluczowych jest 3, tj. punkty środkowe podpór i środek odcinka łączącego podpory. Dla słupa o trzech podporach tworzących trójkąt

punktów kluczowych jest 6, w tym: 3 podpory i 3 środki odcinków łączących podpory. Analogicznie dla słupów o 4 podporach będzie 8 punktów kluczowych.



Rys. 15.29. Typy podpór słupów i kierunków linii napowietrznych

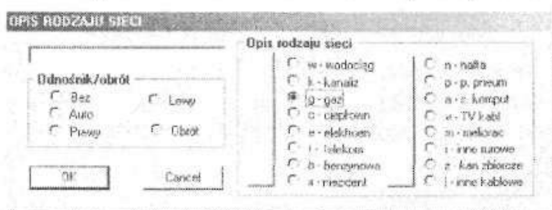
Przywiązanie symbolu kierunku linii napowietrznej do odpowiedniego punktu kluczowego następuje po kliknięciu kursorem myszy możliwie blisko wybranego punktu kluczowego. W razie pomyłki wybór resetujemy prawym klawiszem myszy, który odwołuje przywiązanie symbolu linii do punktu kluczowego. W razie potrzeby do symbolu podpory można także dołączyć symbol latarni -o-, po uprzednim zazaczeniu odpowiedniej opcji w sekcji AUTO-SŁUP. Rysowane mogą być trzy rodzaje symboli kierunków linii napowietrznych (rys. 15.29), a ich wymiana następuje poprzez naciskanie klawisza [Esc] w momencie czekania na identyfikację punktu kluczowego. Technologia ta umożliwia narysowanie w jednym ciągu czynności wszystkich rodzajów słupów o 1-4 podporach z ewentualnym dodatkiem latarni. Dla słupów o czterech podporach po narysowaniu czwartej podpory może nastąpić automatyczna ortogonalizacja czworoboku utworzonego przez podpory słupa.

Rys. 15.30. Zawartość pola wyboru „Uzbrojenie"

Funkcja „Opis przez wskazanie"

Zasadniczą cechą systemu MK 2000, od której wywodzi się nazwa programu, są jego funkcje kontekstowe, związane z możliwością wykorzystania wprowadzonych

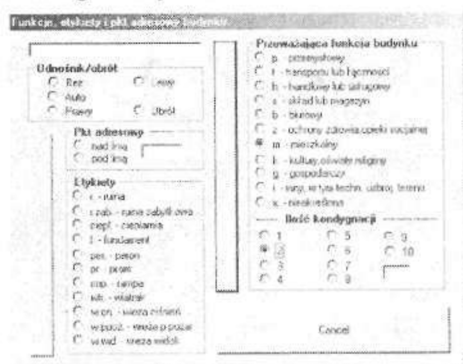
wcześniej parametrów pewnych elementów istniejących już na mapie dla nowo tworzonych obiektów i ich ewentualnych opisów.



Rys. 15.31. Pole wyboru do redagowania opisów rodzaju uzbrojenia terenu

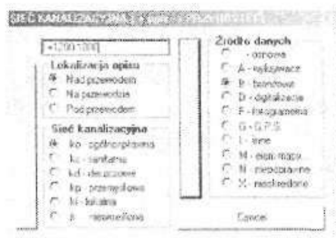
Kontekstowość mapy dotyczy wszystkich wprowadzonych na nią elementów, co oznacza, że tę samą funkcję możemy wykorzystać wielokrotnie np. gdy opisujemy budynek, elementy uzbrojenia terenu, granice użytków czy działek, nazwę drzewa-pomnika przyrody itp. Wszystkie obiekty mapy posiadające atrybuty opisowe są widziane przez funkcję Opis przez wskazanie i są odpowiednio interpretowane przez program przed ustaleniem parametrów opisowych wynikających z wymogów instrukcji K-1. Po uruchomieniu tej opcji program czeka na wskazanie obiektu, który ma być opisany, a następnie po wskazaniu obiektu w polach komend, wyświetlana jest nazwa i kod obiektu. Po zaakceptowaniu opcji pokazywane są do wyboru wszystkie dostępne etykiety wg instrukcji K-1. Możliwe jest też opisanie obiektu według własnych ustaleń.

Na rys. 15.32 pokazano przykładową sekcja paletę (pole wyboru) ukazującą się po wskazaniu obiektu Budynek. Umożliwia ona pełny, zautomatyzowany, zgodny z instrukcją K-1 opis takich atrybutów budynku jak: przeważająca funkcja budynku, ilość kondygnacji, numer adresowy i ewentualna etykieta (np. f. – fundament). W wypadku podjęcia próby opisu obiektu, dla którego nie przewidziano etykiet opisowych (np. pomierzonego drzewa liściastego), program informuje operatora o zamiarze opisu obiektu bez atrybutów opisowych i czeka na poprawną lokalizację obiektu do opisu.



Rys. 15.32. Paleta do tworzenia opisów budynków

Gdy chcemy utworzyć opis dowolnie wybranego elementu uzbrojenia podziemnego z listy pokazanej na rys. 15.30 np. przewodu kanalizacyjnego, wówczas po wskazaniu go na ekranie monitora, otwiera się pole wyboru, na którym znajdują się wszystkie atrybuty potrzebne do opisania przewodu. Opis ten umieszczony na linii, nad lub pod linią przewodu (rys. 15.33) powstaje przez złożenie symboli odnośnie rodzaju sieci, jej rozmiarach i źródle ustalenia jej położenia w terenie. Dla przykładu przewód sieci kanalizacyjnej może być opisany symbolem koB1200.1800, który oznacza, że jest to przewód kanalizacji ogólnospławnej o szerokości 1200 mm i wysokości 1800 mm, zaś położenie ustalono na podstawie materiałów branżowych. Obiekty typu „szambo" automatycznie otrzymują po wstawieniu etykietę „*kl*" i wyświetlane jest pytanie o miejsce jej



Rys. 15.33. Atrybuty opisu sieci kanalizacyjnej

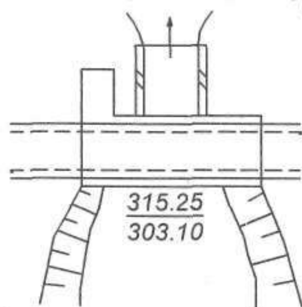
wstawienia. Oczywiście możliwe jest także dowolne opisanie przewodu przez operatora, z pominięciem ustawień menu. Gdy zaczniemy opis w polu wprowadzania danych dla użytkownika od symbolu „+", to zostanie on dodany do opisu przewodu.



Rys. 15.34. Okienko do tworzenia opisów wysokości obiektów

Obiekty takie jak: włazy, zasuwy itp. automatycznie po wstawieniu na mapę dostają propozycję typowego opisu, niezależnie od ewentualnej możliwości ich opisania za pomocą funkcji kontekstowej. Dla elementów liniowych uzbrojenia podziemnego, opisywanych wielokrotnie tym samym opisem, istnieje możliwość jego powtarzania, bez konieczności zestawiania tekstu poprzez ponowny wybór symboli z menu. Dla wielokrotnego powtórzenia opisu przewodu w oknie komend po ewentualnych atrybutach opisu sieci należy wpisać znak „*" np. dla podanego wyżej przewodu kanalizacyjnego powinniśmy wpisać: +koB1200.1800*.

Wychodząc na przeciw potrzebie szybkiego dostępu do symboli wymaganych w instrukcji K-1 i w innych instrukcjach branżowych autor programu zamieścił w menu większość atrybutów opisowych używanych podczas procesu tworzenia map cyfrowych



Rys. 15.35. Przykład obiektu z opisem wysokości (zapora wodna na cieku)

Funkcja „Opis rzędnych"

Funkcja kontekstowa opisująca te obiekty mapy, do których dodawane są rzędne (wysokości), dotyczy nie tylko uzbrojenia, lecz także innych szczegółów łączonych z opisem wysokości np. mostów, budowli i komór podziemnych, zapór i innych (rys. 15.34). Po wskazaniu wybranego elementu, program identyfikuje wybrany obiekt wyświetlając jego nazwę i kod, następnie po akceptacji, wyświetla menu do wprowadzenia rzędnej górnej i dolnej. Jeżeli wartość dolna jest poprzedzona znakiem minus, to jako rzędna dolna na mapę zostanie wpisana różnica pomiędzy rzędną górną a wartością ujemną. Opcja ta jest przydatna do wykonania opisu wysokości dna kanału, którego głębokość pomierzono za pomocą łaty, zaś znana jest rzędna górna. W pewnych przypadkach dla lepszego uczytelnienia mapy do opisu wysokości dołączony jest odnośnik Funkcja wyboru odnośnika pyta o wskazanie jego końca i samoczynnie łączy odnośnikiem wskazany przez operatora obiekt z opisem wysokości.

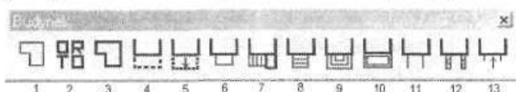
Funkcja „Kontynuuj przez wskazanie"

Rysowanie mapy jest czynnością złożoną z operacji na wielu, często powtarzających się obiektach takich jak: budynki, działki, elementy uzbrojenia itp. Stąd większość elementów rysunkowych, opisów i czynności edycyjnych musi być wykonywana wielokrotnie. Funkcja kontekstowa „Kontynuuj przez wskazanie" umożliwia kontynuowanie procesu rysowania określonego obiektu poprzez wskazanie innego, bliźniaczego elementu już znajdującego się na ekranie. Na przykład wskazując za pomocą opisywanej funkcji sieć wodociągową możemy rysować sieć wodociągową w innym miejscu mapy, zaś wskazując wprowadzone wcześniej na mapę drzewo liściaste można wstawiać inne drzewa liściaste itd. Zgodnie z zasadami przyjętymi w systemie MK 2000

elementy te są wprowadzane w takim samym rozwarstwieniu, jak zidentyfikowane wcześniej elementy.

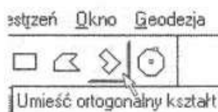
15.10.4. Funkcje paska narzędzi „Budynek”

Program MK2000 w menu „Geodezja” posiada moduł „Budynek”, pozwalający na znaczne przyspieszenie pracy związanej z rysowaniem budynków i towarzyszących im elementów architektonicznych. Odbywa się to dzięki gotowym schematom rysunkowym, ułatwiającym nanoszenie na mapę cyfrową zarówno samych budynków jak i przylegających do nich szczegółów, takich jak: schody, świetliki, tarasy, wjazdy itp. Po uruchomieniu polecenia Budynek w menu Geodezja na ekranie pojawia się pasek narzędzi Budynek pokazany na rys. 15.35 . Poszczególne przyciski tego paska odpowiadają następującym funkcjom:



Rys. 15.36. Pasek narzędzi „Budynek”

1. **Rysowanie budynków nieogniodpornych***. Funkcja ta nie uruchamia żadnego narzędzia do ortogonalizacji budynku, lecz wybiera tylko odpowiednie parametry rysowanych obiektów tj. warstwę, styl, grubość i kolor linii. Aby narysować kształt właściwego obiektu, należy wybrać opcję rysowania wieloboków (rys. 15.37) lub funkcję ORTO dla obiektów rysowanych z rastra lub z połączenia naniesionych pikiet.



Rys. 15.37

2. **Funkcja ORTO** pozwala wygodne rysowanie obiektów ortogonalnych (nie tylko samych budynków). Wybór tej funkcji nie pociąga za sobą rysowania konkretnego rodzaju obiektu, co oznacza, że funkcja ORTO służy do ortogonalizacji aktywnie rysowanego obiektu o kształcie prostokątnym. Może to dotyczyć budynku, szklarni, wiatraka, prostokątnej działki itp. Przycisk ORTO został umieszczony pomiędzy przyciskiem do rysowania budynków ognioodpornych i nieognioodpornych ponieważ trzy pierwsze funkcje są podczas rysowania mapy używane najczęściej. Ogólna zasada funkcji ORTO polega na rysowaniu linii dowolnej długości i wystawieniu prostopadłej do linii wyjściowej. Upraszcza to znacznie wektoryzację rastrów przedstawiających obiekty ortogonalne.

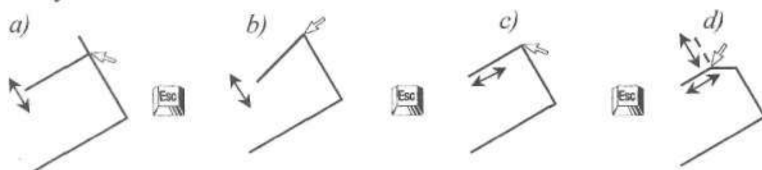
   Funkcja ORTO ma cztery tryby pracy zilustrowane na rys. 15.38, które podczas rysowania obiektu mogą być zmieniane po naciśnięciu klawisza Esc, określanego jako tzw. *zatrzask* (⇨). Można wykonać następujących czynności:
   a) rysowanie prostopadłych wystawianych z dowolnie wybranego punktu, leżącego na linii wyjściowej;
   b) rysowanie linii od końca linii poprzedniej pod dowolnym kątem;
   c) rysowanie prostopadłych od końca linii poprzedniej;
   d) rysowanie linii prostopadłych i równoległych do pierwszej narysowanej linii.

---

* Zgodnie z instrukcją K-1 z r. 1998 na mapie zasadniczej nie rozróżnia się już budynków ognioodpornych i nieognioodpornych

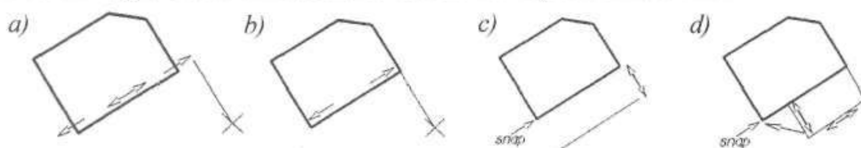
Ogólną zasadą rysowania odcinków wzajemnie prostopadłych i równoległych jest rozpoczęcie tej czynności od najdłuższego odcinka np. ściany budynku, względem którego pozostałe odcinki mają być prostopadłe lub równoległe.

Zakończenie rysowania rzutu budynku następuje po naciśnięciu prawego klawisza myszy (*Reset*). W ukazującym się wówczas oknie dialogowym program pyta czy zamknąć obrys. Punkt końcowy wykreślonej figury nie musi być wtedy ustawiony dokładnie w tym samym punkcie od którego rozpoczęto rysowanie konturu. Przy wektoryzacji rastra wystarczy wykreślić najlepsze pokrycie linii z rastrem, a program sam zakończy za nas rysowanie i zamykanie konturu obiektu.



Rys. 15.38. Tryby rysowania linii prostopadłych w ramach funkcji ORTO

3. **Rysowanie budynku** – wybór ustawień.
4. **Rysowanie rzutu okapu** – wybór ustawień.
5. **Rysowanie elementów prostopadłych**, przyległych do ściany budynku. Funkcja ta, podobnie jak funkcja ORTO, nie pociąga za sobą konieczności wyboru konkretnej kategorii obiektu, a jedynie uruchamia rysowanie otrogonalnych obiektów przyległych. Za jej pomocą można szybko dorysować np. przybudówkę lub inny stykający się budynek. Rysowanie polega na wskazaniu wyjściowej ściany budynku. Od ściany tej rysowany jest prostopadle kierunek ściany przybudówki. Po wskazaniu kierunku wyjściowego program rysuje już sam obrys przybudówki i pyta o ustalenie momentu zakończenia rysowania obiektu.



Rys. 15.39. Rysowanie obiektów przyległych do budynków

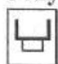
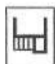
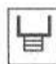
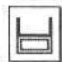
Odcinek wyjściowy ustalony na początku rysowania dzieli się na trzy zakresy, przez co można korzystać z trzech wariantów rysowania obiektów przyległych:

a. Po wskazaniu środka ściany linią kierunku może być dowolnie przesuwana wzdłuż ściany budynku i poza nią (rys. 15.39 a).

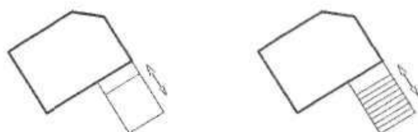
b. Wskazując pobliże jednego z końców ściany możemy przesunąć kierunek linii przybudówki, lecz tylko do wskazanego końca ściany budynku (rys 15.39 b). Jest to bardzo przydatny wariant, ponieważ większość obiektów graniczy z budynkiem pierwotnym dokładnie na przedłużeniu jednej ze ścian.

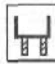
c. Gdy chcemy narysować przybudówkę dokładnie takiej samej szerokości, jak pierwotna ściana budynku zaznaczamy drugi koniec ściany budynku (rys.

15.39 c). Program od razu przechodzi do trybu odsuwania ściany przybudówki od całej ściany budynku (rys 15.39 d). Technologia ta może być wykorzystana do rysowania obrysu wszystkich rodzajów schodów, świetlików oraz tarasów.

6. **Przyciski 6 – 10**:
 - świetlik,  - schody prostopadłe,  - schody równoległe,
 - schody wewnętrzne,  - weranda.

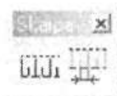
Działanie funkcji rysowania obrysów jest podobne do opcji z punktu 5. W przypadku kreślenia schodów po wskazaniu ich obrysu musimy dokładnie zaznaczyć początek zakresu samych schodów oraz ustalić sposób zapełnienia ich konturu. W tym celu używamy opcji tzw. *snapowania*, czyli wskazywania punktów kluczowych (*key point*), aby wyznaczyć początek zakresu. Jeśli cały obrys schodów jest zapełniony symbolami schodów, to snapujemy również koniec zakresu. Funkcja ta domyślnie nie zapełnia całego zakresu schodów, ponieważ bardzo często obok schodów występuje spocznik (rys. 15.40), który także zostanie uwidoczniony na mapie.


Rys. 15.40. Rysowanie schodów prostopadłych do ściany budynku.

7. **Przyciski 11,12**:  - wjazd do podziemia,  - ściana oporowa prostopadła. Rysowanie ścian kierunku wjazdu do podziemia rozpoczyna się od wskazania ściany budynku zaś w drugiej kolejności kierunku i zakresu ściany prostopadłej.

8. **Przycisk 13**:  - strzałka wjazdu do podziemia. Rysowanie kierunku wjazdu odbywa się podobnie jak opisano to wyżej. W zależności od strony ściany budynku następuje odpowiednia orientacja symbolu kierunku strzałki.

15.10.5. Funkcje paska narzędzi „Skarpa"



Pasek narzędzi do rysowania skarp posiada dwa przyciski:

1. Przycisk Skarpowanie: Funkcja ta zapełnia wybrany kontur deseniem kresek, tworząc znak skarpy. Przed zakreskowaniem konieczne jest wskazanie górnej i dolnej krawędzi skarpy. Elementami tworzącymi te krawędzie mogą być linie lub wieloboki. Program w odpowiednim polu dialogowym wymaga wskazania wszystkich elementów góry skarpy, a po naciśnięciu prawego klawisza myszy *Reset* należy wskazać wszystkie elementy dołu skarpy. Ponowne *Reset* powoduje pokrycie wybranego obszaru deseniem skarpy.



Rys.15.41. Ustawienia kreskowania skarp

2. Przycisk Parametry skarpy: – opcja realizująca ustawienie atrybutów kreskowania wewnątrz konturu skarpy takich jak: kolor, grubość oraz odstęp pomiędzy kreskami w danej skali opracowania.
   - Ilość kresek – możliwość wyboru pomiędzy zapełnieniem kreskami całego obszaru, a częściowym pokryciem obszaru fragmentami desenia skarpy składającymi się z odpowiedniej ilości odcinków. Dla tej opcji program wymaga wskazania środka zakresu kresek, co jest przydatne dla skarp, na których występują także inne szczegóły.
   - Przerysuj – funkcja dająca możliwość zmiany parametrów (np. odstępu pomiędzy kreskami) po narysowaniu skarpy, bez konieczności ponownego wskazywania konturu skarpy .
   - Odwołaj – polecenie umożliwiające cofnięcie czynności kreskowania skarpy na obszarze ostatnio wypełnionym tym rysunkiem.

15.10.6. Funkcje paska narzędzi „Warstwice"



Rys. 15.42. Pasek narzędzi „Warstwice"

Paleta **Warstwice** zawiera jedenaście przycisków służących do tworzenia warstwic na rysunku MicroStation w oparciu o wprowadzone wcześniej punkty o znanej wysokości (pikiety), uzyskane podczas pomiaru rzeźby terenu. Podczas tworzenia na mapie obrazu warstwic autor programu celowo zrezygnował z oparcia numerycznego modelu terenu na siatce kwadratów lub trójkątów, co ma miejsce w większości programów tego typu. Metody te nie zawsze dają poprawny przebieg warstwic, a ponadto wprowadzają sztuczną metodykę podejścia do pomiaru rzeźby. Istotę tego pomiaru stanowi bowiem rozstawianie pikiet w terenie mające na celu wyodrębnienie za pomocą pikiet obrysów skarp, punktów charakterystycznych rzeźby oraz linii grzbietowych i ściekowych, zwanych *liniami szkieletowymi* (por. rozdz. 13).

Koncepcja autora programu polega na interpolacji warstwic w oparciu o linie szkieletowe. Ich pojęcie zostało w tym przypadku poszerzone, ponieważ do linii tych zostały również włączone wszystkie naturalne i sztuczne odcinki, wzdłuż których następuje zmiana biegu lub ciągłości warstwic.W szczególności do linii szkieletowych, wyznaczających na mapie konstrukcję dla oparcia rysunku warstwic, zaliczamy kontury obiektów zdejmowanych sytuacyjnie takich jak: krawędzie skarp, obrysy budynków, linie dróg, rowów oraz obrysy innych szczegółów terenowych, które na mapie nie mogą być przecinane liniami warstwic. Drugi rodzaj konstrukcyjnych linii szkieletowych stanowią uwidocznione na szkicu tachimetrycznym typowe linie grzbietowe i ściekowe oraz linie, wzdłuż których następuje widoczna w terenie zmiana jego spadku. Nie są one obiektami sytuacyjnie uwidocznionymi na rysunku mapy, lecz mimo tego w bardzo istotny sposób oddziaływującymi na przebieg warstwic. Taki sposób podejścia do wykonania rysunku warstwic umożliwia wierniejsze zobrazowanie na mapie morfologii terenu dzięki pełnemu wykorzystaniu informacji o rzeźbie i sytuacji terenowej zawartych na polowym szkicu tachimetrycznym.

Interpolację prowadzimy na rysunku 3D, do którego kartujemy pikiety z pomiaru sytuacyjno-wysokościowego. Wstępny etap generowania warstwic polega na ustaleniu w rysunku MicroStation odcinków linii szkieletowych. W dalszej kolejności następuje wstawienie izolinii na obszary zdefiniowane przez odcinki szkieletowe, scalenie pojedynczych segmentów izolinii w krzywe warstwic i opisanie ich cech.

Przycisk 1  **– tworzenie odcinków linii szkieletowych**

Wszystkie odcinki szkieletowe stanowiące część sytuacyjną rysunku mapy (skarpy, drogi itd.) rysujemy z wykorzystaniem systemu MK 2000. Pozostałe linie szkieletowe nie będące szczegółami sytuacyjnymi rysujemy po naciśnięciu przycisku 1 Linie szkieletowe.

Przycisk 2  **– znaczniki (węzły)**



Rys. 15.43. Parametry znaczników

Podobnie jak przy interpolacji ręcznej wzdłuż wszystkich wykreślonych odcinków szkieletowych wprowadzamy znaczniki, zwane także węzłami. Są to punkty interpolacyjne o wysokości równej wielokrotności cięcia warstwicowego. Znaczniki, których parametry można ustawić w polu dialogowym pokazanym na rys. 15.43, są zróżnicowane kolorystycznie, przy czym węzłom o tej samej wysokości odpowiada jednakowy kolor. Na podstawie ułożenia węzłów można przeanalizować przebieg izolinii i usunąć ewentualne błędy. Po wskazaniu odcinków szkieletowych za pomocą zaznaczania wskaźnikiem lub prostokątem (ogradzanie), stanowiących standardowe narzędzia programu MicroStation, następuje wrysowanie węzłów. Na tym etapie można dorysować dodatkowe odcinki nowych linii szkieletowych, lub też zmienić ich dotychczasowy przebieg.

Przycisk 3  **– Usuń znaczniki**

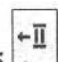
Opcja ta pozwala za pomocą jednej komendy usunąć z rysunku wszystkie węzły.

Przycisk 4  **– Izolinie**



Rys. 15.44. Pole wyboru – „Parametry warstwic"

Polecenie „Izolinie" służy do generowania izolinii łączących odpowiadające sobie węzły wyznaczone na sąsiednich odcinkach szkieletowych. Każdorazowo wymagane jest wskazanie pary odcinków, pomiędzy którymi zostaną wstawione izolinie. Powstające izolinie są wykreślane w różnych kolorach, co lepiej obrazuje ich przebieg.

Przycisk 5  **– Izolinie II**

Ze względu na złożoność przebiegu niektórych linii szkieletowych może się okazać konieczne użycie drugiej funkcji tworzenia izolinii, korygującej niedogodności związane z użyciem poprzedniej funkcji.

Przycisk 6  **– Warstwice**

Na podstawie zbioru odcinków izolinii według wcześniej ustalonych parametrów (rys. 15.44) program rysuje krzywe warstwic, uwzględniając przy tym zgodnie z instrukcją K-1 styl linii warstwicy (zasadnicza, pogrubiona, pomocnicza) odpowiedni dla danej cechy warstwicy i skali mapy. Rozróżniane są też warstwice otwarte i zamknięte. Ilość scalanych odcinków może dochodzić do 8000.



Rys. 15.45. Pole wyboru parametrów interpolacji

Przycisk 7  **– Warstwice II**

Działanie tego przycisku jest analogiczne jak przycisku 6, lecz funkcja tworzenia warstwic działa na większej ilości scalanych odcinków, która w tym wypadku może dochodzić do ok. 50 000.

Przycisk 8  **– Usuń warstwice**

Opcja ta pozwala na usunięcie za pomocą jednej komendy wszystkich warstwice z rysunku.

Przycisk 9  **Opis**

Opis warstwicy następuje automatycznie po jej wskazaniu. Program pobiera informacje o jej wysokości a następnie pyta o wskazanie kierunku wznoszenia terenu celem nadania opisowi odpowiedniej orientacji.

Przycisk 10  **– Cięcie**

Przycisk wywołuje pole wyboru pokazane na rys. 15.45, w którym dokonuje się ustawień parametrów generowanych warstwic.

Przycisk 11  **– Zmiana wierzchołka**

Funkcja realizująca zmianę krzywizny warstwicy przez jej wskazanie.

15.10.7. Palety kolorów



Rys. 15.46. Wybór palety kolorów do edycji mapy

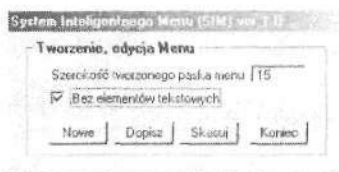
Po uruchomieniu polecenia Geodezja/Palety kolorów użytkownik systemu MK 2000 może korzystać z wybranego zestawu kolorów, w których można wykonywać i drukować mapę. W ramach palety roboczej rysunek jest edytowany w kolorach ułatwiających rozpoznawanie obiektów i redagowanie mapy. W wersji *Kolorowa* drukowanie na kolorowej drukarce lub ploterze odbywa się według kolorów przewidzianych w instrukcji K-1 dla elementów uzbrojenia, rzeźby terenu i treści ewidencyjnej. Wersja *Mono* jest przeznaczona dla wydruków czarno-białych. Istnieje także możliwość wykreślania poszczególnych rodzajów armatury w wybranym kolorze np. urządzeń

wodociągowych tylko na niebiesko. Paletę może też utworzyć sam użytkownik stosownie do swych indywidualnych wymagań.

15.10.8. System „Inteligentnego Menu" (SIM)

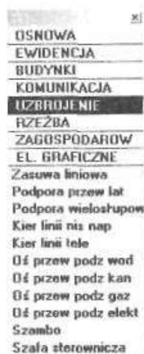


W programie MK2000 istnieje możliwość dowolnego skonfigurowania interfejsu tworzenia mapy zasadniczej dla dostosowania go do potrzeb użytkownika. W tym celu zakłada się menu boczne (rys. 15.47), zawierające jedną lub więcej sekcji, przy czym dodatkowo pojedyncze menu może być proste (zawierające tylko jeden pasek narzędzi) lub złożone – podzielone na kilka pasków, zawierających np. kategorie szczegółów zgodne z instrukcją K-1 (rys. 15.48).



Rys. 15.47. Ustalenie parametrów nowego menu

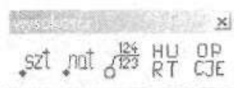
Utworzone przez SIM paski narzędzi lub pola dialogowe mogą swą tematyką obejmować też poszczególne asortymenty prac geodezyjnych. Dzięki przystosowaniu sekcji menu do określonych typów robót uzyskuje się przyspieszenie i usprawnienie procesu wykonania mapy. Sekcje menu (rys. 15.47) można utworzyć automatycznie w oparciu o elementy już znajdujące się na danej lub innej mapie. Oznacza to, że mając prototypową mapę wykonaną w technologii MK2000 możemy wykreować menu dotyczące tworzenia poszczególnych elementów mapy. Istnieje też możliwość dopisania do istniejącej już sekcji menu nowych funkcji podczas edycji mapy lub skasowania zbędnej sekcji. Całość menu jest przechowywana w plikach tekstowych, toteż modyfikacja sekcji menu (usunięcie zbędnego obiektu, dopisanie nowego, czy stworzenie całkiem nowej sekcji) może nastąpić z poziomu dowolnego edytora tekstowego.



Rys. 15.48. Przykład menu utworzonego w systemie SIM

15.10.9. Funkcje paska narzędzi „Wysokości"

Paleta **Wysokości** dostępna po uruchomieniu polecenia Geodezja/Wysokości zawiera pięć przycisków, których funkcje pozwalają na opisywanie wysokości pikiet. Dotyczy to w szczególności opisu pikiet wyznaczających sztuczne formy terenu (przycisk 1), naturalnych (przycisk 2), oraz opisu rzędnych armatury (przycisk 3) tj. kanałów, zasuw itp. Zasada działania tego menu opiera się na współpracy pomiędzy przesyłanym do systemu MicroStation plikiem tekstowym, zawierającym współrzędne punktów *X, Y, Z* a tworzonym w tym systemie plikiem rysunku mapy.



Rys. 15.49. Pasek narzędzi „Wysokości"

Przycisk 1 [szt] **– Pikieta sztuczna**

Po naciśnięciu tego przycisku wykonywany jest pojedynczy opis wysokości wybranej pikiety. Po wskazaniu jej numeru wstawiany jest symbol pikiety wysokościowej (kropka), a program oczekuje na ustalenie miejsca położenia opisu wysokości pikiety.

W tym trybie wciśnięcie prawego klawisza (*Reset*) myszy powoduje przejście do trybu definiowania kąta nachylenia opisu pikiety. Kolejne naciśnięcie tego klawisza powoduje powrót do trybu opisu poziomego (przywraca kąt = 0). Jest to bardzo szybkie i wygodne narzędzie, służące do opisu nie tylko pikiet, lecz także innych rodzajów obiektów np. dróg, których opisy powinny biec równolegle do osi drogi.

Przycisk 2 – **Pikieta naturalna**

Zasada tworzenia opisu wysokości jest taka sama jak w przypadku pikiet sztucznych.

Przycisk 3 – **Opisy rzędnych**

Funkcja ta posiada identyczną ikonę i działa tak samo jak w opisanym wcześniej menu Mapa zasadnicza (ust. 15.10 3).

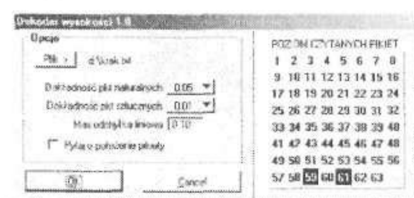


Rys. 15.50. Pole wyboru związane z funkcją HURT

Przycisk 4 – **Wczytaj z *Selection* lub *Fence***

Ta sekcja menu odpowiada za wstawienie wysokości dla pikiet wyróżnionych przez zaznaczanie na rysunku mapy wskaźnikiem (*Selection*) lub prostokątem (*Fence*). Po naciśnięciu przycisku o ikonie HURT pojawia się pole pokazane na rys. 15.50. Można wówczas z podanych zbiorów wybierać pikiety naturalne lub sztuczne oraz ustalać kąt pod jakim chcemy opisać ich wysokości. Kąt zerowy ustawiany przyciskiem Kąt=0 powoduje, że pikiety wraz z poziomymi opisami wysokości są wstawiane od razu. Uruchomienie przycisku Kąt=? przed wstawieniem wysokości wywołuje dialog, dotyczący wskazania dwóch punktów opisujących aktywny kąt nachylenia opisu.

Przycisk 5 – **Ustawienia**



Rys. 15.51. Ustawienia parametrów w polu „Opcje”

Sekcja Opcje menu Wysokości odpowiada za podłączenie pliku współrzędnych i konfigurację parametrów pikiet wysokościowych. Po naciśnięciu przycisku Plik -> ukazuje się standardowe okno z drzewem katalogów i filtrami dla różnych rodzajów plików. Wybieramy plik roboczy zawierający dane dla pikiet *Nr X Y Z*. Poszczególne opcje do ustawienia tych danych dotyczą:

- dokładności edytowania na mapie wysokości pikiet naturalnych i sztucznych,
- dopuszczalnej odchyłki liniowej pomiędzy pikietą na rysunku, a pikietą w pliku,
- pytania o położenie pikiety,
- poziomu odczytywanych pikiet, pokazującego aktywne warstwy, z których odczytywane są pikiety.

W pewnych sytuacjach, aby wyraźniej pokazać gdzie znajduje się punkt wysokościowy odsuwa się oznaczającą go kropkę od jej rzeczywistego położenia np. dla punktu na narożniku budynku, ponieważ wtedy pozycja pikiety na rysunku zostałaby

przykryta przez kontur budynku. Włączenie funkcji ☑Pytaj o położenie pikiety powoduje, że operator sam wskazuje miejsce położenia punktu.

15.10.10. Dodatkowe funkcje programu MK2000

Posiadając jeden kompletny i zintegrowany pakiet programowy MK2000 można go wykorzystać do praktycznego zrealizowania według podanych wcześniej zasad całego procesu technologicznego związanego z tworzeniem mapy sytuacyjno-wysokościowej. Niezależnie od tego program zawiera moduły umożliwiające wykonanie:

- prac z zakresu ewidencji gruntów, w tym projektu podziału i jego realizacji w terenie oraz zestawienia dokumentacji podziału (powierzchnie, obwodnice, użytki),
- zbilansowania robót ziemnych i wykonania profili, przygotowania danych do tyczenia,
- narzędzia do opracowania obsługi inwestycji, w tym przygotowania danych do wyniesienia projektu w teren, sprawdzenia projektu pod kątem poprawności topologicznej, pozyskania współrzędnych, zwymiarowania geodezyjnego projektu.
- Konwersja rysunków mapy wykonanych za pomocą programu MK2000 z formatu *DGN* do plików *DXF* używanych w programach: AutoCad i EwMapa.

Rozdział 16: Pomiary uzupełniające

16.1. Przedmiot pomiarów uzupełniających

Zgodnie z określeniem podanym w instrukcji G-4 (wydanie III z r. 1983): „*Pomiar uzupełniający* jest to zespół czynności technicznych pozwalających na dostosowanie dokumentów geodezyjno-kartograficznych do ich zgodności z terenem w zakresie ustalonej dla nich treści".

Do wspomnianych dokumentów zaliczamy mapę zasadniczą, mapy topograficzne i inne rodzaje map, zdjęcia lotnicze oraz dokumentację związaną z ewidencją gruntów, budynków i sieci uzbrojenia terenu. Pomiary uzupełniające mogą odnosić się zarówno do szczegółów terenowych jak i danych wysokościowych, związanych z urządzeniami technicznymi oraz rzeźbą terenu, toteż pomiary uzupełniające dzielimy na pomiary sytuacyjne i wysokościowe. Najczęstszymi przyczynami wykonywania pomiarów uzupełniających są:

- konieczność aktualizacji (unacześniania) map w celu wprowadzenia zmian zaistniałych w terenie po terminie edycji map,
- przystosowanie map do określonych zadań projektowych lub gospodarczych,
- domierzanie tych szczegółów, które nie odfotografowały się na zdjęciach lotniczych lub nie zostały na nich odwzorowane z wymaganą dokładnością dla potrzeb redakcji map sporządzanych w oparciu o metody fotogrametryczne,
- uzupełnianie treści mapy zasadniczej i map ogólnogeograficznych o szczegóły wykraczające poza treść danej mapy, potrzebne do specyficznych prac studialnych i projektowych.

Zasady wykonywania pomiarów uzupełniających po roku 1978 są uregulowane przepisami zawartymi w instrukcjach technicznych: G-4 „Pomiary sytuacyjne i wysokościowe" (wyd. III z r. 1983), G-1 „Osnowa pozioma" (wyd. IV z r. 1986) i G-2 „Osnowa wysokościowa" w zakresie nawiązania osnów pomiarowych dla potrzeb pomiarów uzupełniających, K-1 „Mapa zasadnicza" oraz wytyczne K-1.2 „Mapa zasadnicza; aktualizacja i modernizacja". Uzupełniające pomiary dla potrzeb studialnych i projektowych reguluje instrukcja G-3 „Geodezyjna obsługa inwestycji". Zamierzone pomiary uzupełniające należy zgłosić w terytorialnie właściwym ośrodku dokumentacji geodezyjno-kartograficznej (ODGK), stosownie do trybu przewidzianego w instrukcjach: O-3 „Zasady formalno-porządkowe" i O-4 „Zasady prowadzenia ośrodków dokumentacji geodezyjno-kartograficznej".

Jak na razie w geodezyjnych instrukcjach technicznych, które ukazały się po roku 2000 praktycznie nie ma informacji o pomiarach uzupełniających. Jedynie w § 33 instrukcji G-4 (wydanie IV z r. 2002) zawarte są przepisy dotyczące bezpośrednich pomiarów uzupełniających w ramach zdjęcia sytuacyjno-wysokościowego wykonywanego metodami fotogrametrycznymi.

Podstawową przyczyną wykonywania pomiarów uzupełniających jest konieczność aktualizacji mapy zasadniczej, operatów ewidencji gruntów i budynków oraz sieci uzbrojenia terenu. Przyczynami dezaktualizacji mapy zasadniczej są najczęściej: działalność inwestycyjna związana z budową i przebudową budowli, budynków i infrastruktury terenowej, zmiany granic administracyjnych, granic własności oraz nazewnictwa i numeracji porządkowej.

Aktualizacja mapy polega na pomierzeniu w terenie i wniesieniu na pierworys mapy lub do bazy danych SIT tych elementów, które składają się na treść danej mapy, a których nie zawiera mapa pierwotna. Wyróżniamy *aktualizację bieżącą*, dokonywaną sukcesywnie w oparciu o decyzje administracyjne i operaty geodezyjne robót związanych z obrotem nieruchomościami i zmianami stanu władania oraz działalnością inwestycyjną, dla której konieczne jest wydawanie pozwoleń na budowę oraz *aktualizację okresową* – wykonywaną w określonych odstępach czasu (zwykle co 5 lat) w celu wykrycia zmian, których nie zostały ujawnione w ramach aktualizacji bieżącej.

16.2. Prace przygotowawcze do pomiarów uzupełniających

Do prac przygotowawczych należy *zebranie materiałów* geodezyjno-kartograficznych istniejących dla danego obszaru, takich jak: mapy, w tym zwłaszcza mapę zasadniczą z jej wszystkimi nakładkami tematycznymi oraz mapy dyżurne aktualizacji bieżącej, operaty prac geodezyjnych i ewidencji gruntów, wykazy współrzędnych i wysokości oraz mapy przeglądowe osnowy, opisy topograficzne, zdjęcia lotnicze, dokumentacje związane z wydawaniem pozwoleń na budowę i inwentaryzacją powykonawczą, materiały z uzgodnień sieci uzbrojenia terenu. Zebrane dokumenty należy przeanalizować pod kątem wykrycia i naniesienia ewentualnych zmian, wykorzystania map jako podkładu, zaś danych o osnowie do nawiązania i zakładania osnowy pomiarowej potrzebnej podczas pomiaru uzupełniającego. Po zebraniu i analizie materiałów zostaje przeprowadzony *wywiad terenowy*, którego celem jest ustalenie zakresu i obszaru pomiarów uzupełniających, procentowej ilości zmian oraz istniejących warunków i potrzeb dotyczących zakładania osnowy dla tych pomiarów.

Wyżej wymienione prace dają podstawę do opracowania *warunków technicznych* pomiaru uzupełniającego, dla którego należy ustalić:

- sposób wykorzystania posiadanej dokumentacji geodezyjno-kartograficznej,
- ewentualne granice terenów wytypowanych do nowego pomiaru (gdy ilość zmian przekracza 30% – 60%),
- dane dotyczące sporządzenia przyszłej dokumentacji pomiaru: wielkość obszaru objętego pomiarem uzupełniającym, skalę mapy, cięcie warstwicowe pomiaru uzupełniającego rzeźby terenu, wymaganą dokładność pomiaru,
- zakres, przedmiot, metodykę i sprzęt do pomiarów uzupełniających, warunki terenowe pomiaru, ilość zmian terenowych w stosunku do stanu przedstawionego na istniejącej mapie,
- szczegóły aktualnie już nie istniejące, które trzeba usunąć z mapy,
- dodatkowe wymagania zleceniodawcy (przy przygotowaniu dokumentacji do celów projektowych i studialnych),
- kryteria ekonomiczne zapewniające najniższy koszt przyszłych prac,
- zestaw standardów technicznych (np. instrukcji geodezyjnych i branżowych), według których zostaną wykonane pomiary uzupełniające,
- rodzaj materiałów przekazywanych zleceniodawcy.

16.3. Sytuacyjne pomiary uzupełniające

Sytuacyjne pomiary uzupełniające mają za zadanie dostosowanie map i innych dokumentów geodezyjno-kartograficznych do ich zgodności z terenem w zakresie sytuacyjnych szczegółów terenowych. Pomiary te mogą być wykonywane bezpośrednimi metodami geodezyjnymi oraz w sposób pośredni – metodami fotogrametrycznymi. Uzupełniające pomiary sytuacyjne realizuje się zgodnie z wymogami podanymi w instrukcji G-4 dla nowych pomiarów. Najczęstszymi przyczynami podejmowania uzupełniających pomiarów sytuacyjnych są: aktualizacja okresowa mapy zasadniczej, uczytelnienie zdjęć lotniczych, przystosowywanie istniejących map do określonych celów, zmiany ukształtowania i sytuacji terenowej wywołane osuwiskami lub szkodami górniczymi (zwłaszcza położenie skarp), aktualizacja dokumentacji technicznej albo projektowej. Do pomiarów tych stosuje się przeważnie metodę ortogonalną lub biegunową. Zalecanym w instrukcji G-4 sposobem pomiarów bezpośrednich jest metoda biegunowa z wykorzystaniem tachimetrów elektronicznych.

Osnowa pomiarowa, nawiązana do punktów osnowy szczegółowej, założona zgodnie z wymogami instrukcji G-4, powinna zapewnić możliwość pomierzenia wszystkich nowopowstałych szczegółów sytuacyjnych. Osnowę mogą stanowić: ciągi sytuacyjne, wcięcia, sieci modularne oraz punkty wyznaczone techniką GPS. W myśl obowiązujących przepisów zawartych w dotychczasowej instrukcji G-4 błąd bezwzględny położenia najmniej dokładnego punktu pomiarowej osnowy sytuacyjnej nie może przekraczać 0,10 m. Punkty osnowy pomiarowej oznacza się prowizorycznymi znakami takimi jak: paliki, bolce, rurki, znaki z tworzyw sztucznych i inne. Można też wykorzystywać wybrane punkty trwałych obiektów sytuacyjnych np. elementy armatury, punkty graniczne, narożniki schodów itp.

Do zdejmowania szczegółów sytuacyjnych II i III grupy można zastosować linie pomiarowe oparte na punktach sytuacyjnych I grupy dokładnościowej pomierzonych w oparciu o punkty osnowy geodezyjnej (narożniki budynków, stabilizowane punkty graniczne, elementy naziemne uzbrojenia podziemnego). Wyjątkowo można też na sytuację terenową zdejmować wszystkie szczegóły w przypadku, gdy długość elementów nawiązujących do punktów osnowy szczegółowej przekracza 400 m w terenach zurbanizowanych i 600 m dla terenów rolno-leśnych, a oparcie linii pomiarowej na punktach sytuacyjnych I grupy dokładnościowej zapewnia wymaganą dokładność wniesienia wyników pomiaru uzupełniającego na mapę. W trakcie pomiaru osnowy sporządza się szkic polowy osnowy pomiarowej lub aktualizuje kopię dawnego szkicu polowego tej osnowy, zaś po zakończeniu pomiaru osnowy – wykaz współrzędnych poszczególnych punktów.

Szkice polowe pomiaru szczegółów wykonuje się w postaci:

- sporządzonych na nowo, odrębnych rysunków (jak podczas nowego pomiaru) wykreślonych kolorem czarnym lub czerwonym,
- rysunków na kopiach oryginalnych szkiców pierwotnych, zaznaczając kolorem czerwonym numery pikiet, miary, nowe elementy osnowy oraz sytuacji,
- sytuacji i linii konstrukcyjnych zaznaczonych na kopiach istniejącej mapy zasadniczej lub powiększonych odbitkach zdjęć lotniczych.

Na szkicach rysowanych na podkładzie odbitek dawnych map, szkiców lub zdjęć należy ponadto skreślić podwójną linią kolorem czerwonym te elementy sytuacji, które przestały istnieć w terenie. W tabeli opisowej nowego szkicu jako rodzaj pracy podaje się zapis: *„sytuacyjny pomiar uzupełniający”* lub wpisuje go kolorem czerwonym na kopiach sta-

rych szkiców, skreślając jednocześnie na odbitce dawne zapisy: numer szkicu, rodzaj pracy, liczbę książki robót, połączenia z sąsiednimi szkicami. Należy je zamienić na informacje aktualne zaznaczone kolorem czerwonym.

16.4. Wysokościowe pomiary uzupełniające

Wysokościowy pomiar uzupełniający jest to zespół czynności technicznych, którego celem jest dostosowanie dokumentów geodezyjno-kartograficznych do ich zgodności z terenem w zakresie ukształtowania pionowego terenu oraz określenia wysokości nowych elementów, które powstały po założeniu mapy zasadniczej, a zgodnie z wymogami instrukcji K-1 powinny być określone wysokościowo. Zmiany rzeźby terenu mogą być spowodowane przyspieszonym morfogenetycznym działaniem sił przyrody (np. w wyniku erozji, osuwisk), powstawać w wyniku zamierzonej działalności inwestycyjnej człowieka albo stanowić jej niepożądane skutki uboczne takie jak np. szkody górnicze. Obowiązkowemu pomiarowi wysokościowemu musza podlegać także urządzenia techniczne związane z powierzchniowym zagospodarowaniem terenu, a szczególnie elementy jego uzbrojenia, drogi, mosty, wiadukty.

Bezpośrednie uzupełniające pomiary wysokościowe realizuje się przeważnie metodą tachimetryczną lub poprzez niwelację sposobem punktów rozproszonych. W uzasadnionych ekonomicznie warunkach, dla większych obszarów wykorzystuje się metodę fotogrametryczną lub pomiary techniką GPS.

Pomiar uzupełniający rzeźby terenu wykonuje się najczęściej w celu aktualizacji mapy zasadniczej na obszarze, który ulegał widocznym zmianom w zakresie naturalnego lub sztucznego ukształtowania terenu. Zakres pomiaru powinien obejmować obszar zmian rzeźby powiększony dodatkowo o pas okalający szerokości co najmniej 30 m w celu uzgodnienia ciągłości rzeźby z niezmienionym otoczeniem.

Wymagana dokładność wyznaczenia wysokości punktów terenowych względem wysokościowej osnowy pomiarowej wynosi:

- ±0,01 m- dla elementów naziemnych uzbrojenia terenu i podziemnych sztywnych inwentaryzowanych przed zasypaniem wykopu oraz dla budowli i urządzeń technicznych o konstrukcji trwałej,
- ±0,10 m- dla urządzeń technicznych i budowli ziemnych i podziemnych, zakrytych oraz obiekty uzbrojenia terenu elastyczne lub inwentaryzowane wykrywaczami elektromagnetycznymi,
- dla punktów naturalnej powierzchni terenu – zgodnie z wartościami błędów dopuszczalnych podanymi w tabeli 13.4.

Podczas kontroli obszaru przekształceń rzeźby za obszar, który nie podlegał zmianom, można uznać fragment terenu, na którym różnice wysokości punktów z pomiaru uzupełniającego i pierwotnego nie przekraczają podwójnych wartości podanych wyżej.

Wysokościowy pomiar uzupełniający musi być nawiązany do istniejącej osnowy wysokościowej szczegółowej i pomiarowej, lecz w przypadku jej zniszczenia albo niedostatecznego zagęszczenia nie należy odtwarzać znaków zniszczonych, lecz założyć nowe znaki wysokości w odpowiednio dobranych miejscach, dokonując stabilizacji trwałej punktów osnowy pomiarowej w terenach o znacznym zainwestowaniu. Średni błąd wysokości m_H najmniej dokładnego punktu tej osnowy nie może przekroczyć 0,10 m. Dokumentami pomiaru są dzienniki i szkice polowe wykonane na typowych formularzach lub wydruki komputerowe z danych zapisanych w rejestratorach polowych. Szkice można też

prowadzić na odbitkach starych szkiców, zaktualizowanych sytuacyjnie map lub powiększonych zdjęciach lotniczych.

16.5. Aktualizacja bieżąca i okresowa mapy zasadniczej

Zmiany zachodzące z upływem czasu na danym obszarze powodują, że każda mapa stopniowo traci swą aktualność, co oznacza, że przedstawiona na niej treść przestaje odpowiadać stanowi aktualnie istniejącemu w terenie. Głównymi przyczynami dezaktualizacji map są najczęściej:

- działalność inwestycyjna (nowe budynki, budowle, szlaki komunikacyjne, zmiany w infrastrukturze, melioracje, prace ziemne powodujące powstawanie sztucznych form rzeźby terenu),
- naturalne procesy morfogenetyczne (np. erozja cieków wodnych i gleb),
- zmiany użytków, granic administracyjnych i granic własności, przeklasyfikowanie gruntów,
- zmiany w treści opisowej mapy (nazewnictwa, numerów porządkowych, numerów działek).

Konieczność utrzymywania mapy zasadniczej w stanie stałej aktualności wynika stąd, że tylko zaktualizowana mapa może stanowić podkład niezbędny do rozwiązywania ważnych zadań gospodarczych jak: planowanie przestrzenne, racjonalna gospodarka ziemią, projektowanie i realizacja inwestycji itp. Mapa zasadnicza jest także podstawą do aktualizacji map topograficznych i tematycznych.

Zgodnie z wytycznymi K-1.2 *aktualizacja bieżąca* jest to zespół czynności polowych i kameralnych pozwalający na określenie kształtu i położenia oraz naniesieniu na mapę nowo budowanych obiektów budowlanych oraz innych szczegółów stanowiących treść mapy zasadniczej, tuż po ich powstaniu. Podstawę wprowadzenia obiektów na mapę stanowią powykonawcze pomiary inwentaryzacyjne obowiązujące w budownictwie oraz operaty geodezyjne powstałe w wyniku konieczności zgłaszania w jednostkach administracji samorządowej wszelkich zmian związanych z ewidencją gruntów i budynków. Nadzór i kontrolę nad procesem zbierania i dostarczania informacji potrzebnych do aktualizacji bieżącej mapy zasadniczej przy współudziale ośrodków dokumentacji geodezyjnej sprawują geodeci wojewódzcy, powiatowi, miejscy i gminni.

W urzędach gmin i miast prowadzone są tzw. *mapy dyżurne aktualizacji bieżącej* wykonywane na podkładzie kopii mapy zasadniczej, na której w oparciu o dokumentację nanosi się zmiany zachodzące w terenie i dotyczące następujących elementów treści mapy:

- obiektów budowlanych, dla których wydaje się pozwolenie na budowę,
- granic administracyjnych i granic obrębów,
- granic działek i użytków gruntowych,
- konturów klasyfikacyjnych,
- treści opisowej mapy.

Dokumentami stanowiącymi podstawę do aktualizacji bieżącej są:

- dokumentacja powykonawczych pomiarów inwentaryzacyjnych obiektów budowlanych,
- geodezyjna dokumentacja techniczna dla celów prawnych dotycząca zmian granic administracyjnych, działek i użytków,
- dokumenty klasyfikacji gruntów,

- inne operaty pomiarowe z prac geodezyjnych na terenie objętym mapą dyżurną.

Oprócz zaznaczenia obiektu na mapie dyżurnej źródło informacji o zmianie zapisuje się w „Zbiorze zgłoszeń nowo realizowanych obiektów budowlanych" lub „Zbiorze dowodów zmian" związanych z ewidencją gruntów.

Wnoszenie na mapę dyżurną zmian w zakresie obiektów budowlanych wykonywane jest sukcesywnie w następujących etapach:

1) po wydaniu pozwolenia na budowę – linią w ołówku oraz zapisanym kolorem czerwonym numerem informacji ze „Zbioru zgłoszeń",
2) po wytyczeniu obiektu w terenie – linią czerwoną przerywaną,
3) po wykonaniu inwentaryzacji powykonawczej wybudowanego obiektu – linią czerwoną, ciągłą,
4) po wniesieniu obiektu na pierworys mapy zasadniczej – linią ciągłą czarną.

Wnoszenie na mapę dyżurną zmian związanych z ewidencją gruntów, a szczególnie granic i numerów działek przebiega następująco:

1. Po ustaleniu nowego przebiegu granicy działki, pomiarze i wprowadzeniu do części opisowej operatu ewidencji gruntów opisuje się nowy numer działki i wykreśla się na mapie dyżurnej przebieg nowej granicy linią ciągłą zieloną w przypadku, gdy mapa dyżurna dotyczy wszystkich zmian lub linią czerwoną gdy na osobnej kopii mapy nanosi się tylko zmiany w zakresie ewidencji gruntów (druga mapa dotyczy obiektów budowlanych).
2. Po wniesieniu na pierworys mapy zasadniczej granicy i numeru nowej działki granice i numer wykreśla się na mapie kolorem czarnym po śladzie uprzednio wykreślonej linii zielonej lub czerwonej.

Podobne zasady wprowadzania oznaczeń na mapie dyżurnej, opisane szczegółowo w wytycznych K-1.2, obowiązują dla zmian treści opisowej, granic administracyjnych, obrębów i konturów klasyfikacyjnych. Wykaz znaków umownych stosowanych na mapie dyżurnej został zamieszczony w tabeli 16.1.

Uwaga: Kolor zielony dla zmian w zakresie ewidencji gruntów stosuje się w przypadku prowadzenia mapy dyżurnej na jednym wspólnym egzemplarzu mapy zasadniczej, natomiast kolor czerwony, gdy mapa jest prowadzona w dwóch egzemplarzach: jednym dla nowo realizowanych obiektów budowlanych, zaś drugim dla ewidencji gruntów, klasyfikacji, granic administracyjnych, nazw i numerów porządkowych. W ramach aktualizacji bieżącej przewiduje się także kontrolę terenową, która polega na porównaniu mapy zasadniczej z terenem i corocznie powinna objąć 20% obszaru jednostki administracyjnej stopnia podstawowego (gminy, dzielnicy miejskiej).

Według wytycznych K-1.2 „*Aktualizacja okresowa* jest to zespół czynności polowych i kameralnych wykonywanych w odstępach czasu wynikających z bieżących potrzeb, pozwalający na doprowadzenie do zgodności mapy zasadniczej z sytuacją terenową. Ma ona na celu ujawnienie zmian nie zgłoszonych w trybie aktualizacji bieżącej."

Do aktualizacji okresowej należy wykorzystać istniejące materiały geodezyjno-kartograficzne i branżowe nie uwzględnione wcześniej w ramach aktualizacji bieżącej. Do materiałów tych zalicza się:

- pierworys mapy zasadniczej i jego kopie,
- operat ewidencji gruntów i dokumenty nie wprowadzone do operatu,
- mapy jednostkowe i operaty robót geodezyjnych,
- dokumentacje branżowe i mapy z zakresu sieci uzbrojenia terenu,

- mapy topograficzne w skalach 1:5000, 1:10000,
- mapa dyżurna aktualizacji bieżącej,
- mapy przeglądowe osnowy poziomej i wysokościowej,
- wykazy współrzędnych i wysokości oraz opisy topograficzne punktów osnowy geodezyjnej i granicznych,
- szkice osnów,
- zdjęcia lotnicze wykonane po założeniu mapy zasadniczej,
- dokumentacja nazw ulic i numeracji porządkowej nieruchomości.

Materiały te należy poddać szczegółowej analizie dla stwierdzenia ich przydatności do aktualizacji mapy. Ocena istniejącego pierworysu dotyczy: dokładności położenia ramki sekcyjnej, siatki kwadratów i osnowy, stanu podkładu i rysunku mapy. Po sprawdzeniu przygotowuje się dwie kopie pierworysu potrzebne do porównywania w terenie zaktualizowane kameralnie na podstawie wyżej wymienionych materiałów.

Zmiany i informacje należy wnosić kolorem pomarańczowym oraz podwójną linią skasować obiekty nie istniejące w terenie. Zmiany stwierdzone w terenie zaznacza się na kopii mapy kolorem czerwonym za pomocą znaków stosowanych na szkicach polowych. Umożliwia to określenie procentowej ilości zmian, dokonanie uzupełnienia mapy dyżurnej aktualizacji bieżącej oraz ustalenia metody pomiarów uzupełniających. W uzasadnionych ekonomicznie przypadkach dla terenów o szerokiej działalności inwestycyjnej i licznych zmianach stanu władania odnowieniu mogą podlegać całe sekcje mapy.

Tabela 16.1: ZNAKI UMOWNE STOSOWANE NA MAPACH DYŻURNYCH

L.p.	Opis przedmiotu	Znak umowny	Objaśnienia
W ZAKRESIE NOWO REALIZOWANYCH OBIEKTÓW BUDOWLANYCH PRZEDSTAWIONYCH KONTUREM			
1	*Nowy obiekt budowlany oraz numer kolejny ze „Zbioru ogłoszeń nowo realizowanych obiektów budowlanych" (łamany przez rok) po wydaniu pozwolenia na budowę*	47/89	*Kontur rysuje się ołówkiem, zaś numer zmiany ze „Zbioru zgłoszeń" wpisuje się kolorem czerwonym.*
2	*Nowy obiekt budowlany po jego wytyczeniu w terenie*	47/89	*Po wymazaniu linii ołówka kontur obiektu rysuje się linią czerwoną, przerywaną.*
3	*Nowo wybudowany obiekt budowlany po wykonaniu pomiaru powykonawczego*	47/89	*Kontur rysuje się linią ciągłą, kolorem czerwonym.*
4	*Obiekt budowlany po wniesieniu go na mapę zasadniczą*	47/89	*Kontur rysuje się linią ciągłą, kolorem czarnym.*
5	*Obiekt budowlany nie istniejący już w terenie: po uzyskaniu informacji o likwidacji*		*Skreślenie podwójną linią koloru czerwonego*
6	*Obiekt budowlany nie istniejący już w terenie: po usunięciu z pierworysu mapy zasadniczej*		*Skreślenie podwójną linią koloru czarnego*

ZNAKI UMOWNE STOSOWANE NA MAPACH DYŻURNYCH c. d.

L.p.	Opis przedmiotu	Znak umowny		Objaśnienia
W ZAKRESIE NOWO REALIZOWANYCH OBIEKTÓW BUDOWLANYCH PRZEDSTAWIONYCH LINIOWO				
		podziemny	naziemny, nadziemny	
1	Obiekt po wydaniu pozwolenia na budowę	13/89 ——e——	13/89 ——e——	Linię rysuje się ołówkiem, zaś oznaczenie rodzaju i nr przewodu wpisuje się kolorem czerwonym
2	Obiekt po wytyczeniu	13/89 – – –e– – –	13/89 – – –e– – –	Linia przerywana i opis w kolorze czerwonym
3	Obiekt po pomiarze powykonawczym	13/89 ——e——	13/89 ——e——	Linia ciągła i opis w kolorze czerwonym
4	Obiekt po wniesieniu na pierworys mapy zasadniczej	13/89 ——e——	13/89 ——e——	Linia ciągła, czarna; opis czerwony
W ZAKRESIE EWIDENCJI GRUNTÓW				
1	Granice i numery działek po wykonaniu pomiaru uzupełniającego i wprowadzeniu zmian do operatu ewidencji gruntów	17/89; 81/1, 81/2		Nowe granice i numery kolejne ze „Zbioru dowodów zmian" prowadzonego w ramach operatu ewidencji gruntów (łamane przez rok). Linia pogrubiona kolory zielonego lub czerwonego określa zasięg zmian objętych dowodem o podanym numerze.
2	Granice i numery działek po wniesieniu na pierworys mapy zasadniczej	17/89; 81/1, 81/2		Zasięg zmian zakreślony linią koloru czarnego

Przy ustalaniu procentu zmian należy określić:

- ilość elementów znajdujących się dotychczas na pierworysie – a,
- elementy nowe wniesione z materiałów geodezyjnych kartograficznych i branżowych spełniające wymagania dokładnościowe mapy zasadniczej – b,
- elementy do wniesienia na podstawie pomiarów uzupełniających – c,

Procent zmian $z\%$ wyraża wzór:

$$z\% = \frac{b+c}{a+b+c} \cdot 100\% \tag{16.1}$$

16.6. Modernizacja map

Modernizacja map polega na doprowadzeniu dotychczasowej treści i formy istniejącej mapy do treści i formy przewidzianych przez aktualnie obowiązujące przepisy i standardy techniczne. Modernizacji towarzyszy zwykle także aktualizacja mapy w celu doprowadzenia modernizowanej mapy do jej zgodności z terenem.

Konieczność dokonania modernizacji może wynikać z następujących przyczyn:

- inny niż aktualnie obowiązujący układ współrzędnych dotychczasowej mapy, z czym wiąże się także podział na sekcyjny niezgodny z wymaganym,
- zmiana obowiązującego poziomu odniesienia wysokości,
- niewłaściwa dla danego typu obszaru skala bazowa mapy lub cięcie warstwicowe,
- niewystarczająca dokładność pomiaru sytuacyjno-wysokościowego oraz niska dokładność (kartometryczność) rysunku mapy,
- niezgodne z aktualnie obowiązującymi zakresy treści i zestaw znaków umownych dotychczasowej mapy.

Szczegółowe zasady modernizacji mapy zasadniczej są podane w wytycznych K-1.2.